

# ERMITTLUNG DES ALLGEMEINEN SPANNUNGSZUSTANDES VON ORTHOTROPEN ZYLINDRISCHEN SCHALEN AUS VERSTÄRKTEM KUNSTSTOFF, I

Von

L. VARGA

Lehrstuhl für chemisches Maschinenwesen und landwirtschaftliche Industrien  
Technische Universität, Budapest

Vorgelegt von Prof. Dr. S. SZENTGYÖRGYI  
(Eingegangen am 31. Juli 1975)

## Einleitung

Schalen aus verstärkten Kunststoffen sind Konstruktionen aus inhomogenem Material, deren Elastizitätskennwerte je nach Art der Verstärkung bzw. Mengenanteil und Orientierung der verstärkenden Fasern variieren, somit anisotrop sind. Die durch äußere Beanspruchungen erweckten inneren Kräfte lassen sich durch Makro- und Mikrospannungen kennzeichnen, deren genaue Ermittlung recht komplizierte Aufgaben stellt.

Diese Arbeit soll ein allgemeines Berechnungsverfahren liefern, das sich auf die in bezug auf homogene isotrope Schalen anerkannten grundlegenden Erkenntnisse sowie die Ergebnisse der Forschungen an verstärkten Kunststoffschalen stützt, und in üblicher Weise behandelbare, in der Ingenieurpraxis brauchbare Abhängigkeiten bietet. Grundlage der Methode ist ein Berechnungsmodell, welches die Werkstoffgesetze der untersuchten Konstruktionen mit erforderlicher Genauigkeit befolgt, deren Inhomogenität und Anisotropie in Betracht zieht und sich auch zur Untersuchung des allgemeinen Makrospannungszustandes eignet. Richtigkeit und Anwendbarkeit des empfohlenen, auf theoretischem Wege abgeleiteten Berechnungsverfahrens werden durch numerische Untersuchungen und experimentelle Messungen nachgewiesen, deren Ergebnisse Teil II der Arbeit enthält.

## 1. Gestaltung des Berechnungsmodells

Zylindrische Mäntel von Druckgefäßen werden, wie bekannt, zweckmäßig in der Weise verstärkt, daß sie in der Umfangsrichtung eine zweimal so große Zugspannung als in Richtung der Erzeugenden vertragen. Die zweckentsprechende Ausführung erfolgt am einfachsten durch Schraubenwicklung oder Verstärkung mit Geweben. Die Modelle der den zylindrischen Mantel bildenden gewickelten Lagenpaare (ausgewogene Lagen) bzw. gewebeverstärkten Lagen sind in Abb. 1 dargestellt. Die Steifigkeitshauptrichtungen der

gemäß Abbildung gedeuteten, in zwei Richtungen verstärkten zusammengesetzten Lagen fallen mit den Richtungen der Erzeugenden ( $x_1$ ) und des Umfanges ( $x_2$ ) der zylindrischen Schale zusammen. Die für diese Richtungen geltenden Elastizitätskonstanten sind ebenfalls aufgrund der Abbildung zu deuten. Die Verteilung der mit vollen Linien angedeuteten Verstärkungsfasern im

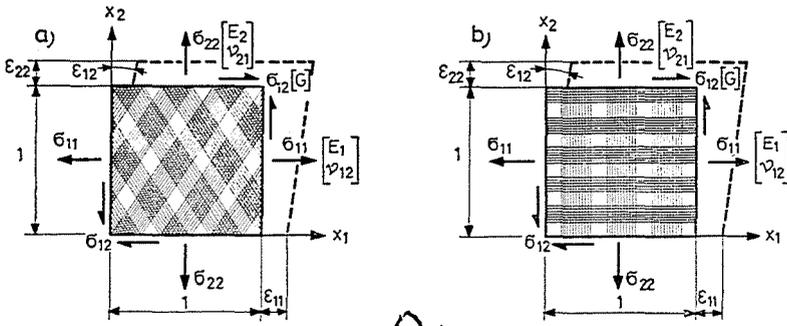


Abb. 1. Deutung der in den Lagen erweckten Spannungen und Formänderungen sowie der Elastizitätskonstanten. a: gewickeltes Lagenpaar; b: gewebeverstärkte Lage

Kunststoff darf als nahezu gleichmäßig betrachtet werden. Wegen der als gleichmäßig betrachteten Verteilung der in unendlicher Zahl im Kunststoff eingebetteten elementaren Fasern dürfen die Lagen als gleichmäßig anisotrope, ebene Platten behandelt werden, deren Formänderungen kontinuierlich sind und gemäß Abb. 1 verlaufen. Es darf angenommen werden, daß die Formänderungen der in zwei Richtungen verstärkten Lagen im Bereich der den betrieblichen Beanspruchungen entsprechenden bzw. aus Sicherheitsgründen noch zulässigen Spannungen nach dem Hooke'schen Gesetz verlaufen, somit sich die Zusammenhänge der in den Steifigkeitshauptrichtungen erweckten Makrospannungen (im weiteren: Spannungen) und der auftretenden Formveränderungen in der Form

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= E_1^*(\varepsilon_{11} + \nu_{12} \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= E_2^*(\varepsilon_{22} + \nu_{21} \varepsilon_{11}) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = G\varepsilon_{12} = G\varepsilon_{21}\end{aligned}\quad (1a-c)$$

ansetzen lassen, worin

$$E_i^* = \frac{E_i}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (i = 1, 2)$$

Weiters wird angenommen, daß jede der die Schalenwand bildenden, zusammengesetzten Lagen nach dem gleichen Verfahren gefertigt ist, so daß die Elastizitätskonstanten der Lagen für die Richtungen  $x_1$  und  $x_2$  entlang der

gesamten Schalendicke konstant sind. Im Laufe der Fertigung verschmelzen die einzelnen Lagen miteinander, so daß die dünne Schale — aus den Steifigkeitshauptrichtungen betrachtet — als eine gleichmäßig anisotrope, ja sogar orthotrope Konstruktion behandelt werden darf. Da hinsichtlich der geometrischen Kennwerte die Wanddicke der Konstruktion im Vergleich zu den übrigen Abmessungen und dem Krümmungshalbmesser gering ist, sind bei der Untersuchung folgende, für dünne Schalen anerkannte Annahmen und Vernachlässigungen gestattet [1, 2]:

1. Die zur Schalenmittelfläche senkrechten Geraden bleiben auch nach Formänderung gerade und senkrecht zur Mittelfläche der formveränderten Schale.
2. Die senkrecht zur Mittelfläche erweckten Spannungen dürfen neben den in der Ebene der Mittelfläche und den zu ihr parallelen Lagen erweckten Spannungen vernachlässigt werden.
3. Die zur Mittelfläche senkrechten spezifischen Formveränderungen dürfen unbeachtet bleiben.

Im Sinne des Gesagten darf der Spannungszustand der zu einem Punkt  $P(x_1, x_2, x_3)$  der Schale gehörenden Querschnitte mit guter Annäherung mit den symmetrischen Spannungs- und Formänderungstensoren

$$\mathfrak{S} = (\sigma_{ij}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{E} = (\varepsilon_{ij}) \quad (i, j = 1, 2)$$

gekennzeichnet werden.

Die Ableitung einer Berechnungsmethode für diese Tensoren folgt in den nächsten Abschnitten.

## 2. Die Differentialgleichungen des Spannungszustandes

Zur Ableitung der Differentialgleichungen für den allgemeinen Spannungszustand ist es zweckmäßig, sich weiterer Vernachlässigungen bzw. Annäherungen zu bedienen.

Drückt man die spezifischen Formänderungen der die Schalenwand bildenden Lagen als Verschiebungen der Mittelfläche aus [1] und wendet in den Ausdrücken die Annäherung  $1 + x_3/R \approx 1$  an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{u^1}{R} - x_3 \frac{w^{11}}{R^2} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{v^1}{R} + \frac{w}{R} - x_3 \frac{w''}{R^2} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{u^1}{R} + \frac{v^1}{R} - 2x_3 \frac{w^1}{R^2} \end{aligned} \tag{2a-c}$$

Die in den Gleichungen stehenden Ausdrücke für Derivation bedeuten;

$$\frac{\partial(\ )}{\partial \frac{x_1}{R}} = \frac{\partial(\ )}{\partial \bar{x}_1} = ( )^I \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\ )}{\partial \frac{x_2}{R}} = \frac{\partial(\ )}{\partial \bar{x}_2} = ( )^{\cdot}$$

Durch Anwendung obiger Annäherung auch in den Ausdrücken der Schnittkräfte und Schnittmomente in Richtung der Erzeugenden erhält man die üblichen Reduktionsformeln in folgender Schreibweise:

$$N_{ij} = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_{ij} dx_3 \quad \text{und} \quad M_{ij} = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad (i, j = 1, 2) \quad (3a-b)$$

Aus den Abhängigkeiten (3a-b) erhält man nach Einsetzen der Ausdrücke (1a-c) und (2a-c) und Durchführung der Integration:

$$N_{11} = \frac{D_{11}}{R} (u^I + \nu_{12} v^{\cdot} + \nu_{12} w)$$

$$N_{22} = \frac{D_{22}}{R} (\nu_{21} u^I + v^{\cdot} + w)$$

$$N_{12} = N_{21} = \frac{D_{12}}{R} (u + v^{\cdot})$$

$$M_{11} = \frac{B_{11}}{R^2} (w^{II} + \nu_{12} w^{\cdot}) \quad (4a-f)$$

$$M_{22} = \frac{B_{22}}{R^2} (w^{\cdot\cdot} + \nu_{21} w^{II})$$

$$M_{12} = M_{21} = 2 \frac{B_{12}}{R^2} w^{\cdot}$$

Von den in den Abhängigkeiten (4a-f) stehenden Größen sind

$$D_{11} = E_1^* s \quad B_{11} = \frac{E_1^* s^3}{12}$$

$$D_{22} = E_2^* s \quad B_{22} = \frac{E_2^* s^3}{12}$$

$$D_{12} = Gs \quad B_{12} = \frac{Gs^3}{12}$$

die Dehn-, Scher-, Biege- und Drillsteifigkeiten in den Richtungen der Erzeugenden und des Umfanges der orthotropen Schale.

Verstärkte Kunststoffschalen haben zumeist geringere Biege- und Drillsteifigkeiten als die entsprechenden berechneten Werte. Die tatsächlichen Biege- und Drillsteifigkeiten lassen sich allgemein in der Form

$$B_{11}^* = \nu_E B_{11}, \quad B_{22}^* = \nu_E B_{22} \quad \text{und} \quad B_{12}^* = \nu_G B_{12} \quad (5a-c)$$

schreiben. Damit erhalten die Ausdrücke der Schnittmomente folgende Gestalt:

$$M_{11}^* = \frac{B_{11}^*}{R^2} (w^{||} + \nu_{12} w^{\cdot})$$

$$M_{22}^* = \frac{B_{22}^*}{R^2} (w^{\cdot\cdot} + \nu_{21} w^{||}) \quad (6a-c)$$

$$M_{12}^* = M_{21}^* = 2 \frac{B_{12}^*}{R^2} w^{\cdot}$$

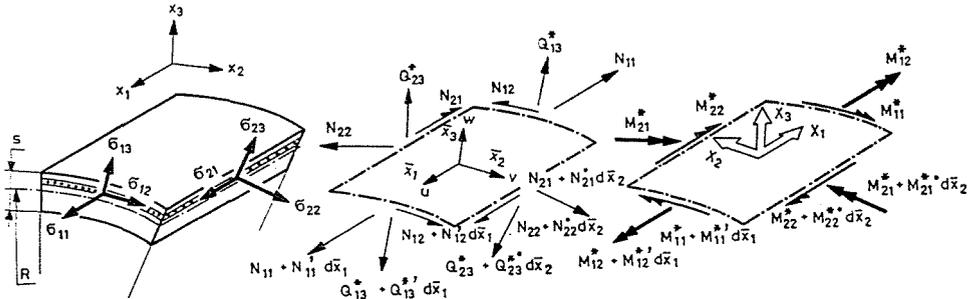


Abb. 2. Deutung der auf das Schalelement wirkenden Spannungen, Schnittkräfte und Schnittmomente sowie der äußeren Belastungen

Aus der Gleichgewichtsbedingung des in Abb. 2 dargestellten Schalelementes lassen sich folgende Abhängigkeiten ableiten [1]:

$$Q_{13}^* = \frac{1}{R} (M_{11}^{*||} + M_{21}^*)$$

$$Q_{23}^* = \frac{1}{R} (M_{22}^{*||} + M_{12}^*) \quad (7a-b)$$

Weiters

$$N_{11} + N_{21} = X_1 R$$

$$N_{22} + N_{12} - Q_{23}^* = X_2 R \quad (8a-c)$$

$$M_{11}^{*||} + M_{22}^{*||} + M_{12}^{*||} + M_{21}^{*||} + N_{22} R = X_3 R^2$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (4a-c) und (6a-c) für Schnittkräfte und Schnittmomente in die Abhängigkeiten (8a-c), weiters durch Vernachlässigen der sehr geringen tangentialen Komponente der in Formel (8b) stehenden,

an sich schon kleinen Scherkraft  $Q_{23}^*$  [3] ergeben sich die gesuchten Differentialgleichungen. Diese lassen sich am einfachsten in die Form

$$\begin{aligned} d_{11}(u) + d_{12}(v) + d_{13}(w) &= X_1^* \\ d_{21}(u) + d_{22}(v) + d_{23}(w) &= X_2^* \\ d_{31}(u) + d_{32}(v) + d_{33}(w) &= X_3^* \end{aligned} \quad (9a-c)$$

fassen, worin

$$X_i^* = \frac{R^2}{D_{22}} X_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Die Deutung der als Koeffizienten der Verschiebungen auftretenden Differentialoperatoren  $d_{ij}(\ )$  ist unter der Annahme  $\nu_E/\nu_G \cong 1$  die folgende:

$$\begin{aligned} d_{11}(\ ) &= \frac{E_1}{E_2} (\ )^{II} + \frac{G}{E_2^*} (\ )^{IV} \\ d_{12}(\ ) = d_{21}(\ ) &= \left( \frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) (\ )^{II} \\ d_{13}(\ ) = d_{31}(\ ) &= \nu_{21} (\ )^{II} \\ d_{22}(\ ) &= \frac{G}{E_2^*} (\ )^{II} + (\ )^{IV} \\ d_{23}(\ ) = d_{32}(\ ) &= (\ )^{II} \end{aligned} \quad (10a-f)$$

$$d_{33}(\ ) = 1 + k^* \left[ \frac{E_1}{E_2} (\ )^{IV} + 2 \left( 2 \frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) (\ )^{III} + (\ )^{VI} \right]$$

worin:

$$k^* = \frac{B_{ij}^*}{R^2 D_{ij}} = \nu_E \frac{1}{12} \frac{s^2}{R^2} \quad (11)$$

### 3. Lösung der Differentialgleichungen durch Einführung der Verschiebungsfunktionen

Zu den Lösungen des Systems von Differentialgleichungen (9a-c) für den allgemeinen Spannungszustand der orthotropen zylindrischen Schale gelangt man verhältnismäßig einfach durch Einführung der Potentialfunktion [4, 5]

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \tilde{\mathfrak{U}}_0 + \tilde{\mathfrak{U}}_1 + \tilde{\mathfrak{U}}_2 + \tilde{\mathfrak{U}}_3 = \sum_{i=0}^3 \tilde{\mathfrak{U}}_i \quad (12),$$

die mit Hinsicht auf ihre Maßeinheit (cm) Verschiebungsfunktion genannt sei. Von den in Abhängigkeit (12) erscheinenden Funktionen enthält:

- $\mathfrak{S}_0$  die die Lösungen für das homogene System bedeutenden Verschiebungen  $u_0, v_0$  und  $w_0$ ;
- $\mathfrak{S}_1$ , die erste Verschiebungsfunktion, die aus der Belastung  $X_1$  herrührenden Verschiebungen  $u_1, v_1$  und  $w_1$ ;
- $\mathfrak{S}_2$ , die zweite Verschiebungsfunktion, die aus der Belastung  $X_2$  herrührenden Verschiebungen  $u_2, v_2$  und  $w_2$ ;
- $\mathfrak{S}_3$ , die dritte Verschiebungsfunktion, die aus der Belastung  $X_3$  herrührenden Verschiebungen  $u_3, v_3$  und  $w_3$ .

Die Methode zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen Verschiebungen und Verschiebungsfunktionen ist in einer früherer Arbeit [5] des Verfassers zu finden. Demnach sind die die Lösungen des Systems von Differentialgleichungen (9a—c) enthaltenden Verschiebungsfunktionen die Lösungen der gleichwertigen Differentialgleichungen

$$\frac{E_2^*}{G} \mathfrak{D}(\mathfrak{S}_i) = X_i^* \quad (i = 0, 1, 2, 3 \text{ und } X_0 \equiv 0) \quad (13)$$

Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen der Mittelfläche und den Verschiebungsfunktionen kann aber in der Form

$$\begin{aligned} u &= \frac{E_2^*}{G} [\mathfrak{D}_{11}(\mathfrak{S}_1) + \mathfrak{D}_{12}(\mathfrak{S}_2) + \mathfrak{D}_{13}(\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_3)] \\ v &= \frac{E_2^*}{G} [\mathfrak{D}_{21}(\mathfrak{S}_1) + \mathfrak{D}_{22}(\mathfrak{S}_2) + \mathfrak{D}_{23}(\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_3)] \\ w &= \frac{E_2^*}{G} [\mathfrak{D}_{31}(\mathfrak{S}_1) + \mathfrak{D}_{32}(\mathfrak{S}_2) + \mathfrak{D}_{33}(\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_3)] \end{aligned} \quad (14a-c)$$

geschrieben werden. In den Gleichungen bedeuten  $\mathfrak{D}(\ )$  die Determinante aus den Koeffizienten,  $d_{ij}(\ )$  und  $\mathfrak{D}_{ij}(\ )$  die zugehörigen Subdeterminanten.

#### 4. Ermittlung des Spannungszustandes

Im Besitz der angeführten Abhängigkeiten können nunmehr die für den Spannungszustand von zylindrischen Schalen aus verstärktem Kunststoff kennzeichnenden Verschiebungen, Schnittkräfte und Schnittmomente einfach abgeleitet werden. Zweckmäßig wird hierzu die Differentialgleichung [13] zur Ermittlung der Verschiebungsfunktionen in die Form

$$\mathfrak{S}_i^{VIII} + a_{01} \mathfrak{S}_i^{VI} + a_{02} \mathfrak{S}_i^{IV} + a_{03} \mathfrak{S}_i^{II} + a_{04} \mathfrak{S}_i^0 + 4\beta_1^{*4} \mathfrak{S}_i^{IV} = \frac{4R^2 \beta_1^{*4}}{E_{1s}} X_i \quad (i = 0, 1, 2, 3 \text{ und } X_0 \equiv 0) \quad (15)$$

gebracht, deren Koeffizienten sich aus den Abhängigkeiten

$$\begin{aligned}
 a_{01} &= \frac{E_2}{G} + 4 \frac{G}{E_1^*} \\
 a_{02} &= 6 \frac{E_2}{E_1} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{E_2}{G} \nu_{21} - \frac{4}{3} \frac{G}{E_2^*} \nu_{12} - \frac{4}{3} \nu_{12} \nu_{21} \right) \\
 a_{03} &= \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{E_2}{G} + 4 \frac{G}{E_1^*} \right) \\
 a_{04} &= \left( \frac{E_2}{E_1} \right)^2 \\
 \beta_1^* &= \sqrt[4]{\frac{3}{\kappa_E} \frac{E_2}{E_1^*} \left( \frac{R}{s} \right)^2}
 \end{aligned} \tag{16a-e}$$

berechnen lassen.

Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen der Mittelflächen und den Verschiebungsfunktionen kann nunmehr in der Form

$$u = \sum_{i=0}^3 [d_{ui}(\tilde{\mathfrak{Y}}_i)], \quad v = \sum_{i=0}^3 [d_{vi}(\tilde{\mathfrak{Y}}_i)], \quad w = \sum_{i=0}^3 [d_{wi}(\tilde{\mathfrak{Y}}_i)] \tag{17a-c}$$

geschrieben werden, worin die Differentialoperatoren folgende Bedeutungen haben:

$$\begin{aligned}
 d_{u0}(\ ) &= d_{u3}(\ ) = d_{w1}(\ ) = -\nu_{21}(\ )^{|||} + (\ )^{\cdot\cdot} \\
 d_{u1}(\ ) &= (\ )^{||} - k^* \left[ \frac{E_1}{E_2} (\ )^{VI} + \left( \frac{E_1^*}{G} + 4 \frac{G}{E_2^*} + 2\nu_{21} \right) (\ )^{IV\cdot} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 2\nu_{21} \frac{E_2^*}{G} + 5 \right) (\ )^{\cdot\cdot\cdot} + \frac{E_2^*}{G} (\ )^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \right] \\
 d_{u2}(\ ) &= d_{v1}(\ ) = -(\ )^{\cdot} - k^* \left[ \left( \frac{E_1}{E_2} + \nu_{21} \frac{E_1^*}{G} \right) (\ )^{V\cdot} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( 4 \frac{G}{E_2^*} + 2\nu_{21}^2 \frac{E_2^*}{G} + 6\nu_{21} \right) (\ )^{||\cdot\cdot} + \left( \nu_{21} \frac{E_2^*}{G} + 1 \right) (\ )^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \right] \\
 &\hspace{15em} (18a-f)
 \end{aligned}$$

$$d_{v0}(\ ) = d_{v3}(\ ) = d_{w2}(\ ) = \left( \nu_{21} - \frac{E_1}{G} \right) (\ )^{||\cdot} - (\ )^{\cdot\cdot}$$

$$d_{v2}(\ ) = \frac{E_1}{G} (\ )^{||} + (\ )^{\cdot\cdot} + k^* \left[ \frac{E_1^*}{G} \frac{E_1}{E_2} (\ )^{VI} + \left( 5 \frac{E_1}{E_2} + \right. \right.$$

$$+ 2\nu_{21} \frac{E_1^*}{G} \Big) ( )^{IV} + \left[ 4 \frac{G}{E_2^*} + \frac{E_1^*}{G} + 2\nu_{21} \right] ( )^{III} + ( )^{III} \Big]$$

$$d_{w0}( ) = d_{w3}( ) = \frac{E_1}{E_2} ( )^{IV} + \left( \frac{E_1}{G} - 2\nu_{21} \right) ( )^{III} + ( )^{III}$$

Schließlich erhalten die Ausdrücke für Schnittkräfte und Schnittmomente die Formen

$$N_{11} = \frac{D_{11}}{R} \sum_{i=0}^3 [d_{ui}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^I) + \nu_{12} d_{vi}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^I) + \nu_{12} d_{wi}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^I)] = \\ = \frac{E_1 s}{R} (\tilde{\mathfrak{F}}_0^{II} + \tilde{\mathfrak{F}}_1^{IV} - \tilde{\mathfrak{F}}_2^{II} + \tilde{\mathfrak{F}}_3^{II})$$

$$N_{22} = \frac{D_{22}}{R} \sum_{i=1}^3 [\nu_{21} d_{ui}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^I) + d_{vi}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^I) + d_{wi}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^I)] \approx \frac{E_1 s}{R} (\tilde{\mathfrak{F}}_0^{IV} + \tilde{\mathfrak{F}}_3^{IV})$$

$$N_{12} = N_{21} = \frac{D_{12}}{R} \sum_{i=0}^3 [d_{ui}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^I) + d_{vi}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^I)] \approx \frac{E_1 s}{R} (-\tilde{\mathfrak{F}}_0^{III} + \tilde{\mathfrak{F}}_2^{III} - \tilde{\mathfrak{F}}_3^{III})$$

$$M_{11}^* = \frac{B_{11}^*}{R^2} \sum_{i=0}^3 [d_{wi}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^{II} + \nu_{12} \tilde{\mathfrak{F}}_i^I)] \tag{19a-h}$$

$$M_{22}^* = \frac{B_{22}^*}{R^2} \sum_{i=0}^3 [d_{wi}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^{II} + \nu_{21} \tilde{\mathfrak{F}}_i^I)]$$

$$M_{12}^* = M_{21}^* = 2 \frac{B_{12}^*}{R^2} \sum_{i=0}^3 [d_{wi}(\tilde{\mathfrak{F}}_i^I)]$$

$$Q_{13}^* = \frac{B_{11}^*}{R^3} \sum_{i=0}^3 \left\{ d_{wi} \left[ \tilde{\mathfrak{F}}_i^{III} + \left( 2 \frac{G}{E_1^*} + \nu_{12} \right) \tilde{\mathfrak{F}}_i^I \right] \right\}$$

$$Q_{23}^* = \frac{B_{22}^*}{R^3} \sum_{i=0}^3 \left\{ d_{wi} \left[ \tilde{\mathfrak{F}}_i^{III} + \left( 2 \frac{G}{E_2^*} + \nu_{21} \right) \tilde{\mathfrak{F}}_i^I \right] \right\}$$

In Kenntnis der in den Steifigkeitshauptrichtungen der zylindrischen Schale auftretenden Verschiebungen, spezifischen inneren Kräfte und Momente können die für die Hauptrichtungen geltenden Makrospannungen einfach berechnet werden, woraus sich nunmehr auch die für Belastbarkeit bzw. den Bruchzustand kennzeichnenden Normal- und Scherspannungen längs und quer zur Faser ermitteln und grundsätzlich auch die Mikrospannungen errechnen lassen.

## 5. Folgerungen

Die abgeleiteten Zusammenhänge eignen sich zur Ermittlung des allgemeinen Makrospannungszustandes, sie können in üblicher Weise behandelt werden und sind auch in der Ingenieurpraxis brauchbar. Das dem Verfahren zugrundeliegende Berechnungsmodell befolgt die Werkstoffgesetze der untersuchten Konstruktion und zieht auch deren Inhomogenität und Anisotropie in Betracht.

Durch Deutung und Einführung der Verschiebungsfunktionen werden die Berechnungen bedeutend vereinfacht und mechanisiert, was vor allem dem Umstand zu verdanken ist, daß die gesuchten Größen (Verschiebungen, Schnittkräfte und Schnittmomente) aus nur einer Variablen, nämlich der Verschiebungsfunktion abgeleitet und mit dieser auch die Rand- oder Passungsbedingungen unmittelbar ausgedrückt werden können. Diese Vorteile machen sich auch in den einfacheren Belastungsfällen (axialsymmetrische Biegung, Membranspannungszustand) sowie auch bei der Untersuchung der isotropen Schalen geltend, besonders bei Aufgaben, wo neben den inneren Kräften auch die Formveränderungen von Interesse sind.

## Zusammenfassung

Diese Arbeit soll ein allgemeines Berechnungsverfahren liefern, das sich auf die in bezug auf homogene isotrope Schalen anerkannten grundlegenden Erkenntnisse sowie die Ergebnisse der Forschungen an verstärkten Kunststoffschalen stützt und in üblicher Weise behandelbare, in der Ingenieurpraxis brauchbare Abhängigkeiten bietet. Richtigkeit und Anwendbarkeit des empfohlenen, auf theoretischem Wege abgeleiteten Berechnungsverfahrens werden durch numerische Untersuchungen und experimentelle Messungen nachgewiesen, deren Ergebnisse Teil II der Arbeit enthält.

## Literatur

1. W. FLÜGGE: Stresses in Shells. Springer-Verlag, Berlin, 1960.
2. L. GOLDENWEISER: Theory of elastic thin Shells. Pergamon Press, Oxford 1961.
3. H. DONELL: Stability of thin-walled tubes under torsion. NACA, Tech. Rep. 1933.
4. A. AMBARZUMJAN: Teorija anisotropnych obolotschek. Fismatgis, Moskwa 1961.
5. L. VARGA: Acta Techn. Acad. Sc. Hung., Tomus 76, (3—4), 1974.

Dr. László VARGA, H-1521 Budapest