

# SPANNUNGSVERTEILUNG IN DER KLEBFUGE TEILWEISE ZUGESCHÄRFTER ÜBERLAPPTER KLEBVERBINDUNGEN

Von

F. THAMM

Lehrstuhl für Technische Mechanik, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 2. April 1974)

Vorgelegt von Prof. Dr. Gy. BÉDA

Das günstigere Festigkeitsverhalten von zugeschärften Klebverbindungen gegenüber einfachen ist bereits seit langem experimentell nachgewiesen worden. Als Beispiel dafür seien in Abb. 1 die Resultate von Zugversuchen an einfachen und zugeschärften überlappten Klebverbindungen zusammengefaßt. In der Abb. 1 sind die auf 1 cm Laschenbreite bezogene Bruchlast  $T_b$  und die aus diesem auf die Einheit der Klebfäche bezogene Zugscherfestigkeit  $\tau_{kb}$  als Funktion der Überlappungslänge  $2c$  aufgrund von Angaben aus dem Schrifttum [1] aufgetragen. Im Falle der zugeschärften Klebverbindung ist die Bruchlast  $T_b$  nahezu proportional der Überlappungslänge  $2c$ , was auf fast gleichmäßig verteilte Schubspannungsverteilung in der Klebfuge längs der Überlappung hinweist. Diese gleichmäßige Schubspannungsverteilung kann im Falle gleicher Dicke der Fügeteile und vollständiger Zuschärfung (der Fügeteil endet in einer Schneide) auch theoretisch nachgewiesen werden [2].

Die Bruchlast strebt im Falle einfacher Überlappung mit wachsender Überlappungslänge gemäß Abb. 1 einem Grenzwert zu. Dies deutet darauf hin, daß die Verteilung der Schubspannung in der Klebfuge mit wachsender Überlappungslänge immer mehr von einer gleichmäßigen Verteilung abweicht, was ebenfalls im Einklang mit den Resultaten theoretischer Untersuchungen ist [3].

Die von VOCKE [2] für den Fall zugeschärfter Klebverbindungen nachgewiesene gleichmäßige Schubspannungsverteilung in der Klebschicht setzt — wie bereits erwähnt — vollständige Zuschärfung der Fügeteile voraus. Da die Herstellung der Schneide sehr sorgfältige Arbeit erfordert und die Handhabung derart vollständig zugeschärfter Fügeteile zwecks Vermeidung von Arbeitsunfällen ebenfalls mit großer Sorgfalt erfolgen muß, werden die Fügeteile üblicherweise nicht vollständig zugeschärft, so daß die Kante der Fügeteile noch endliche Dicke aufweist. Für den Fall teilweiser Zuschärfung sind die Resultate der für vollständig zugeschärfte Verbindungen angestellten Messungen und Berechnungen überhaupt nicht oder nur bedingt gültig. Somit erscheint auch der festigkeitsmäßige Vorteil zugeschärfter gegenüber einfacher Klebverbindungen als fraglich. Aus diesem Grunde sind Untersuchungen über

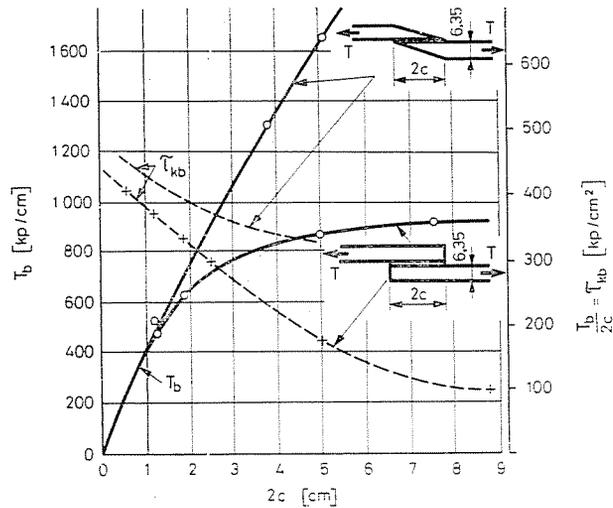


Abb. 1. Die auf die Einheit der Laschenbreite bezogene Bruchkraft  $T_b$  und die Zugscherfestigkeit  $\tau_{kb}$  einfacher und zugeschärfter überlappter Klebverbindungen als Funktion der Überlappungslänge  $2c$  (nach [1]) Fügeiteile: Stahl, Klebstoff: Redux

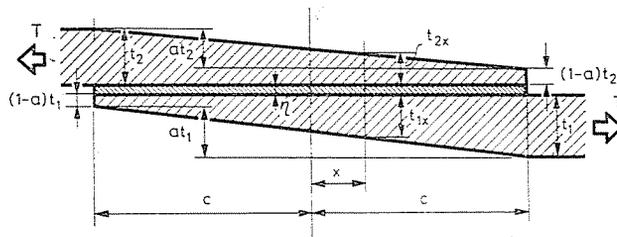


Abb. 2. Maßverhältnisse teilweise zugeschärfter Klebverbindungen

die Schubspannungsverteilung in teilweise zugeschärften Klebverbindungen angestellt worden, über die im Folgenden berichtet werden soll.

Die Abmessungen der für die Untersuchung angenommenen teilweise zugeschärften Klebverbindung zeigt die Abb. 2. Das Maß der Zuschärfung sei durch den auch in der Abb. 2 angeführten Faktor  $a$  gekennzeichnet. Die Dicke der Fügeiteile an der Stelle  $x$  ergibt sich aus den übrigen Abmessungen zu

$$\left. \begin{aligned} t_{1x} &= t_1 \left[ 1 - a \frac{c-x}{2c} \right] = \frac{t_1}{2c} (2c - ac + ax) \\ t_{2x} &= t_2 \left[ 1 - a \frac{c+x}{2c} \right] = \frac{t_2}{2c} (2c - ac - ax) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Der Elastizitätsmodul beider Fügeiteile sei gleich und habe den Wert  $E_L$ . Der Schubmodul des ausgehärteten Klebstoffes sei  $G_R$ . Die auf 1 cm Laschen-

breite bezogene Zugkraft betrage (entsprechend den Bezeichnungen der Abb. 2) außerhalb der Klebverbindung  $T$ , an der Stelle  $x$  für die beiden Füge­teile gemäß Abb. 3  $T_{1x}$  und  $T_{2x}$ . Das Gleichgewicht der Kraftkomponenten in der  $x$ -Richtung, die auf den Teil rechts vom Querschnitt  $x$  der Klebverbindung einwirken, kann wie folgt angeschrieben werden:

$$T_{2x} = T - T_{1x} \tag{2}$$

Entsprechend der Berechnung von VOLKERSEN [3] soll im folgenden die Abwei­chung der Wirkungslinie der Resultierenden von  $T_{1x}$  und  $T_{2x}$  gegenüber der von  $T$  vernachlässigt werden. Somit bleiben die Biegebeanspruchung der Füge­

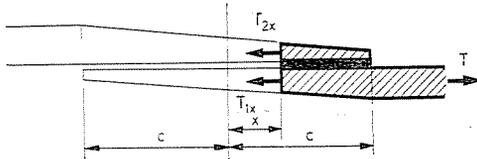


Abb. 3. Die Längskräfte in den Füge­teilen im Schnitt  $x$

teile und damit die senkrecht auf die Klebschicht angreifenden und die beiden Füge­teile von einander zu trennen trachtenden Spannungskomponenten unberücksichtigt [6].

Die durch die elastische Verformung bedingte Verschiebung der Längen­elemente der Füge­teile von der Länge  $dx$  in der  $x$ -Richtung betrage  $u_{1x}$  bzw.  $u_{2x}$ . Somit ergibt sich die Dehnung der beiden Füge­teilelemente zu

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1x} &= \frac{du_{1x}}{dx} = \frac{T_{1x}}{E_L t_{1x}} \\ \varepsilon_{2x} &= \frac{du_{2x}}{dx} = \frac{T_{2x}}{E_L t_{2x}} \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Das Gleichgewicht der an den einzelnen Füge­teil-Elementen angreifenden Kräfte ergibt folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} dT_{1x} - \tau_x dx &= 0 \\ dT_{2x} + \tau_x dx &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Da eine längs der Klebschichtdicke homogene Schubspannungsverteilung angenommen wird, wobei die Richtungen der Schubspannungen stets parallel bzw. senkrecht auf die Oberfläche der Füge­teile gerichtet sind, erscheint hier die Kennzeichnung der Richtung der Schubspannungen durch zwei Indices als überflüssig. Der Index  $x$  bezieht sich nicht auf die Richtung der Schubspannung, sondern auf den in den Abb. 2 und 3 eingezeichneten Querschnitt  $x$ .

Die Änderung des rechten Winkels zwischen den Oberflächen eines ursprünglich kubischen Volumelementes der Klebschicht durch die als elastisch angenommene Formänderung betrage  $\gamma$ . Der Zusammenhang zwischen der Winkeländerung  $\gamma$  und der Schubspannung  $\tau_x$  kann, da der Winkel  $\gamma$  tatsächlich als klein angesehen werden kann, folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{u_{1x} - u_{2x}}{\eta} = \frac{\tau_x}{G_R} \quad (5)$$

Die erste Gleichung der Gruppe (4) in Gleichung (5) eingesetzt, ergibt

$$u_{1x} - u_{2x} = \frac{\eta}{G_R} \cdot \frac{dT_{1x}}{dx} \quad (6)$$

Die Ableitung der Gleichung (6) nach  $x$  gebildet, und in die so erhaltene Gleichung die Gleichungen der Gruppe (3) eingesetzt, ergibt

$$\frac{\eta}{G_R} \frac{d^2 T_{1x}}{dx^2} = \frac{T_{1x}}{E_L t_{1x}} - \frac{T_{2x}}{E_L t_{2x}} \quad (7)$$

bzw. unter Berücksichtigung der Gleichung (2) nach entsprechender Umformung

$$\frac{d^2 T_{1x}}{dx^2} = \frac{G_R}{\eta E_L} \left[ \frac{1}{t_{1x}} + \frac{1}{t_{2x}} \right] T_{1x} - \frac{G_R}{\eta E_L} \cdot \frac{T}{t_{2x}} \quad (8)$$

Die Werte von  $t_{1x}$  und  $t_{2x}$  aus Gleichung (1) in Gleichung (8) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_{1x}}{dx^2} = & \frac{G_R 2c}{E_L \eta} \cdot \frac{t_1(2c - ac + ax) + t_2(2c - ac - ax)}{(2c - ac + ax)(2c - ac - ax) t_1 t_2} T_{1x} - \\ & - \frac{G_R}{E_L} \frac{2c}{t_2(2c - ac + ax)} T \end{aligned} \quad (9)$$

bzw. durch Einführung der Bezeichnung  $\mu = \frac{G_R}{\eta E_L t^2}$  und des Plattenstärkerverhältnisses

$$\omega = \frac{t_1 - t_2}{t_1}$$

$$\frac{d^2 T_{1x}}{dx^2} = \mu 2c \left[ \frac{1}{2c - ac - ax} + \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{1}{2c - ac + ax} \right] T_{1x} - T \frac{2c}{2c - ac - ax} \quad (10)$$

Hierin noch die dimensionslosen Variablen  $T_{1x}/T = \varphi$  und  $x/c = \xi$ , sowie die dimensionslose Steifigkeitszahl  $m = \frac{G_R c^2}{E_L t_2 \eta}$  eingeführt, ergibt

$$\frac{d^2 \varphi}{d \xi^2} = m \left[ \frac{1}{1 - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \xi} + \frac{\omega - 1}{1 - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \xi} \right] \varphi - \frac{m}{1 - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \xi} \quad (11)$$

Der Mittelwert der in der Klebschicht durch die Zugkraft  $T$  verursachten Schubspannung beträgt

$$\tau_k = \frac{T}{2c} \quad (12)$$

Die Schubspannung an der Stelle  $x$  ergibt sich aufgrund der Gleichung (4) zu

$$\tau_x = \frac{dT_{1x}}{dx} \quad (13)$$

Gleichung (13) durch Gleichung (12) dividiert ergibt mit Berücksichtigung der Bedeutung von  $\varphi$  und  $\xi$

$$\frac{\tau_x}{\tau_k} = \frac{2c}{T} \cdot \frac{dT_{1x}}{dx} = 2 \frac{d\varphi}{d\xi} \quad (14)$$

Die Differentialgleichung (11) muß entsprechend der Abb. 1 folgenden Randbedingungen genügen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } x = +c, \text{ bzw. } \xi = +1 \text{ wird } \varphi = +1 \\ \text{für } x = -c, \text{ bzw. } \xi = -1 \text{ wird } \varphi = 0 \end{array} \right\} \quad (15)$$

Da die analytische Lösung der Differentialgleichung (11) nicht bekannt ist, ist sie auf numerischem Wege gelöst worden. Zu diesem Zwecke ist die Differentialgleichung in eine Differenzgleichung umgeformt worden. Die Strecke  $-1 < \xi < +1$  in  $n = 100$  gleiche Teile geteilt, und die Bezeichnung  $\chi = 2/n$  eingeführt, ergibt für die zweite Ableitung von  $\varphi$  nach  $\xi$  an der Stelle der  $i$ -ten Teilung ( $\xi = \xi_i$ ) angenähert [4]

$$\left( \frac{d^2 \varphi}{d \xi^2} \right)_{\xi = \xi_i} = \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\chi^2} \quad (16)$$

womit Gleichung (11) in folgende Form geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \varphi_{i-1} \frac{1}{\chi^2} - \varphi_i \left[ \frac{m}{1 - \frac{a}{2} (1 + \xi_i)} + \frac{m(\omega - 1)}{1 - \frac{a}{2} (1 - \xi_i)} + \frac{2}{\chi^2} \right] + \\ + \frac{\varphi_{i+1}}{\chi^2} = \frac{-m}{1 - \frac{a}{2} (1 - \xi_i)} \end{aligned} \quad (17)$$

Diese Gleichung für jeden Wert von  $i$  angeschrieben und die Randbedingungen (15) berücksichtigt, ergibt algebraische Gleichungen mit  $n$  Unbekannten. Die Lösung dieses Gleichungssystems kann auf einem Digitalrechner mittels eines Verfahrens für Matrizeninvertierung erfolgen, für das im vorliegenden Falle ein fertiges Programm zur Verfügung stand [5].

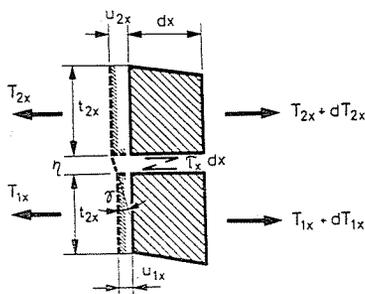


Abb. 4. Verschiebung der Längenelemente der Fügeteile der Länge  $dx$  an der Stelle  $x$  in der  $x$ -Richtung, und die angreifenden Kräfte

Die Gleichungen (11) und (17) gelten — durch Einsetzen von  $a = 1$  — auch für den Fall der vollständigen Zuschärfung. Den Wert von  $a = 1$  in Gleichung (11) eingesetzt, ergibt nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{2m} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = -\frac{1 - \varphi}{1 - \xi} + \frac{(\omega - 1)\varphi}{1 + \xi} \quad (18)$$

Da die rechte Seite der Gleichung (18) für die Ränder der Überlappung ( $\xi = -1$ , bzw.  $\xi = +1$ ) den Wert  $\infty$  annimmt, ist Gleichung (18) für eine numerische Behandlung ungeeignet. Aus diesem Grunde wurde sie weiter umgeformt und ergab folgende Gleichung

$$\frac{1 - \xi^2}{2m} \cdot \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \varphi [\xi(2 - \omega) + \omega] - [1 + \xi] \quad (19)$$

Dem Fall der längs der ganzen Überlappungslänge gleichförmigen Schubspannungsverteilung entspricht aufgrund der Gleichung (14) eine Lösung der Gleichung (19) in folgender Form

$$\varphi = \frac{1}{2} \xi + C \quad (20)$$

Hierbei ist  $C$  eine Integrationskonstante. Diese in die Gleichung (19) eingesetzt, ergibt folgende Identität

$$0 \equiv \left( \frac{1}{2} \xi + C \right) [\xi(2 - \omega) + \omega] - (1 + \xi) \quad (21)$$

woraus sich, da sie für alle Werte von  $\xi$  gültig sein muß, für die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von  $\xi$  folgende Gleichungen ergeben

$$\text{Koeffizienten von } \xi^2: \quad 0 = \frac{1}{2} (2 - \omega) \tag{22a}$$

$$\text{Koeffizienten von } \xi: \quad 0 = \frac{\omega}{2} + C(2 - \omega) - 1 \tag{22b}$$

$$\text{Glieder, die } \xi \text{ nicht enthalten: } 0 = -C\omega + 1 \tag{22c}$$

Die Gleichungen (22) sind erfüllt für  $\omega=2$  und  $C = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2}$ , d. h. die gleichmäßige Schubspannungsverteilung längs der ganzen Überlappungslänge tritt nur im Falle gleicher Dicke der Fügeteile auf. Dies entspricht den von VOCKE [2] abgeleiteten Zusammenhängen. Für  $\omega \neq 2$ , d. h. bei unterschiedlicher Dicke der Fügeteile, muß die Verteilung  $\varphi(\xi)$  durch eine den Gleichungen (16) und (17) entsprechende numerische Methode bestimmt werden.

Die sich aus der Lösung der Gleichungen (11) bzw. (19) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (15) für  $m = 2$  und  $\omega = 1,5, 2$  und  $3$  ergebende Verteilung von  $\tau_x/\tau_h$  zeigen die Abbildungen 5, 6 und 7. Die Schubspannungsverteilung ist in allen drei Abbildungen für verschieden starke Zuschärfung (verschiedene Werte von  $a$ ) aufgezeichnet worden. Den Höchstwert der Schubspannung in der Klebschicht für  $m = 2$  und  $\omega = 1,5, 2$  und  $3$  in Abhängigkeit von dem Ausmaß  $a$  der Zuschärfung zeigt die Abb. 8.

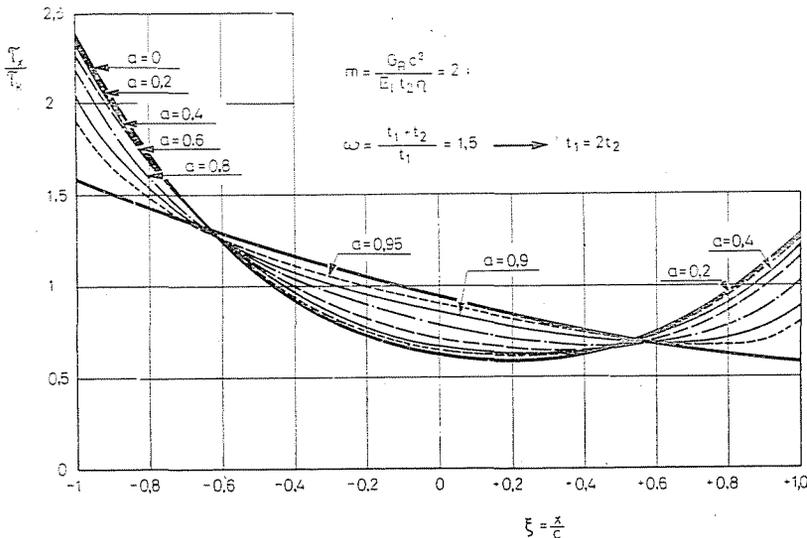


Abb. 5., 6., 7. Verteilung der auf den Mittelwert der Schubspannung bezogenen Schubspannung  $\tau_x$  in der Klebfuge längs der Überlappungslänge  $2c$  für die Steifigkeitszahl  $m = 2$  und verschiedene Zuschärfungsgrade  $a$

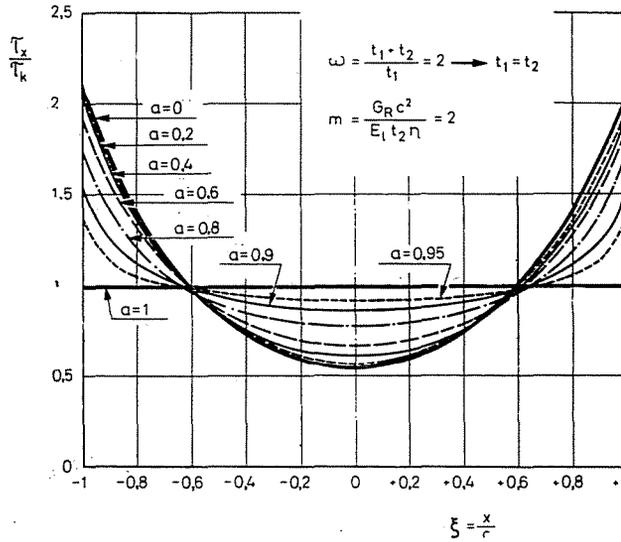
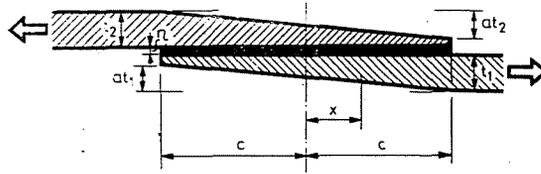


Abb. 6

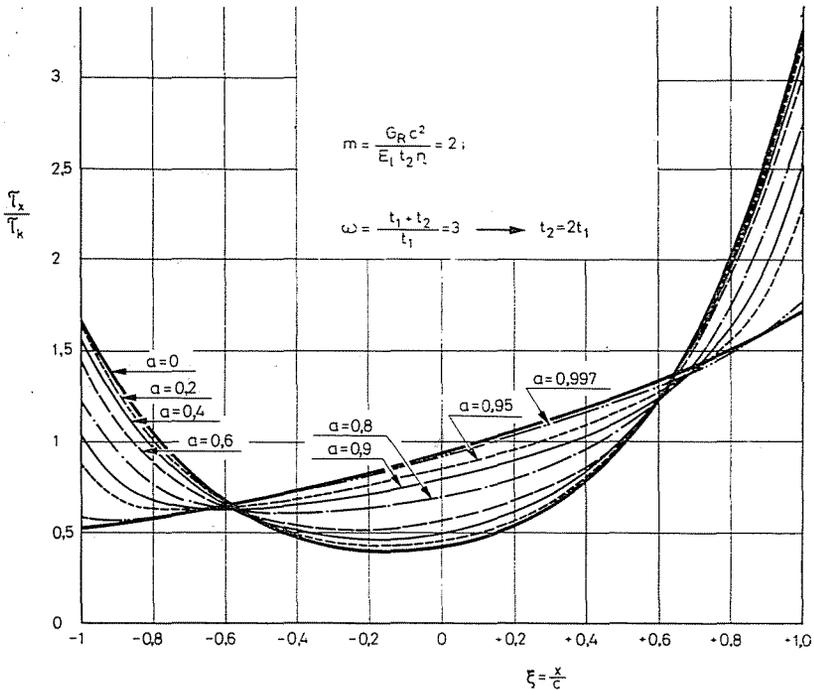


Abb. 7

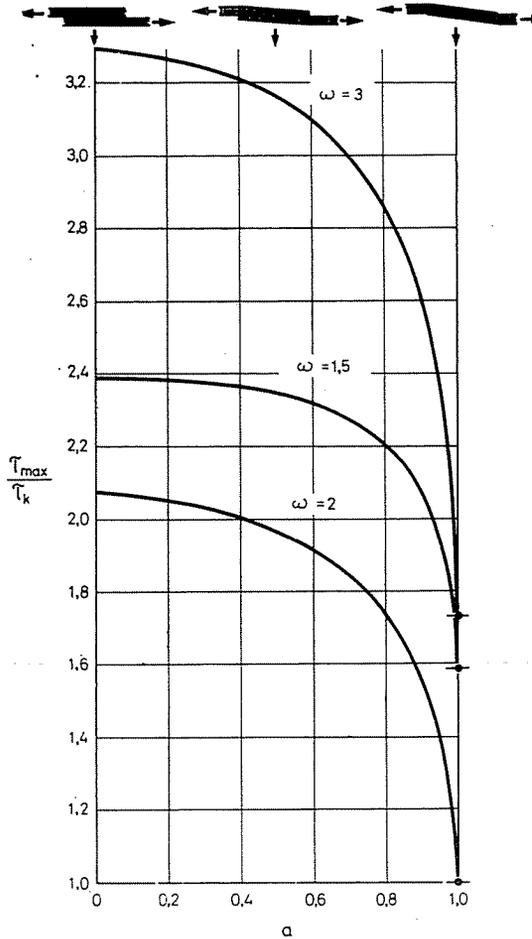


Abb. 8. Der Spitzenwert  $\tau_{\max}$  der Schubspannung in der Klebfuge auf den Mittelwert  $\tau_k$  bezogen, als Funktion des Zuschärfungsgrades  $a$  für  $m = 2$  und  $\omega = 1,5; 2$  und  $3$

Wie aus Abbildung 8 ersichtlich, vermindert sich der Wert der Spannungsspitze bei teilweiser Zuschärfung bei etwa  $a = 0,5$  nur geringfügig gegenüber der bei einfacher Überlappung, und erst ab etwa  $a = 0,8$  ist eine rasche Verminderung der Spannungsspitze mit steigendem  $a$  zu beobachten.

Aufgrund der Resultate der Berechnungen können für die praktische Klebtechnik folgende Schlüsse gezogen werden:

a) Das Zuschärfen der Fügeteile von überlappten Klebverbindungen ergibt nur dann eine wesentliche Festigkeitserhöhung, wenn die Zuschärfung vollständig ist, d. h. die Fügeteile möglichst auf eine Schneide zugeschärft sind. Die teilweise Zuschärfung bis etwa auf die Hälfte der ursprünglichen Fügeteildicke ist festigkeitsmäßig praktisch wirkungslos.

b) Da der Höchstwert der Schubspannung mit fallendem  $a$  in der Umgebung von  $a = 1$  sehr rasch ansteigt, kann bereits eine geringfügige Beschädigung der Schneide einer vollständigen Zuschärfung eine beträchtliche Erhöhung der Spannungsspitze und damit den Abfall der Zugscherfestigkeit der Verbindung zur Folge haben.

c) Kann aus bearbeitungstechnischen Gründen die Zuschärfung nicht vollständiger als  $a = 0,9$  verwirklicht werden, ist die dadurch gegenüber der einfachen Überlappung erreichte Verminderung des Wertes der Spannungsspitze nur ein Bruchteil derjenigen, die im Falle vollständiger Zuschärfung erreichbar wäre. Es ist fraglich, ob in diesem Falle der für die Herstellung der Zuschärfung benötigte Mehraufwand durch den dadurch erreichbaren, nicht allzu großen Anstieg der Zugscherfestigkeit gerechtfertigt wird.

Abschließend soll Herrn Dipl. Ing. G. ÁGOSTON für die Aufstellung und Abwicklung des Rechenprogramms gedankt werden.

### Zusammenfassung

Theoretische und experimentelle Untersuchungen bestätigen die festigkeitsmäßige Überlegenheit zugeschärfter überlappter Klebverbindungen gegenüber einfachen. Diese Überlegenheit setzt jedoch vollständige Zuschärfung (d.h. der Füge teil endet in einer Schneide) voraus. Da die Herstellung der Schneide bearbeitungstechnisch umständlich ist und die Ursache von Arbeitsunfällen sein kann, werden die Füge teile üblicherweise nur teilweise zugeschärft, so daß deren Kante noch endliche Dicke aufweist. Da der für den Fall vollständiger Zuschärfung nachgewiesene festigkeitsmäßige Vorteil in diesem Falle als fraglich erscheint, wurden Berechnungen zur Klärung der Spannungsverteilung in der Klebschicht teilweise zugeschärfter Klebverbindungen angestellt. Die Berechnung fußte auf den Annahmen von Volkersen. Da die Berechnung im vorliegenden Falle auf eine Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten geführt hat, deren analytische Lösung nicht bekannt war, wurde sie numerisch gelöst.

Aus den Resultaten der Berechnung ergibt sich, daß der Maximalwert der Schubspannung in der Klebfuge im Fall teilweiser Zuschärfung meistens nur geringfügig unter dem für die einfache Überlappung liegt und nur in Fällen, wo die Zuschärfung fast vollständig ist, steil auf den Wert für den Fall der vollständigen Zuschärfung abfällt.

### Literatur

1. DE BRUYNE, N. A.—HOUWINK, R.: Klebtechnik Berliner Union. Stuttgart, 1957.
2. VOCKE, W.: Lineare Elastizität. Profilstab und Profilebene. VEB Fachbuchverlag. Leipzig, 1966.
3. VOLKERSEN, O.: Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. Luftfahrtforschung, 15 (1938). S. 41—47.
4. SHAW, F. S.: Relaxation Methods, Dover Publication Inc. Constable and Co, London, 1953.
5. A BME Számítóközpontjának Közleményei (Mitteilungen des Rechenzentrums des T U Budapest) No 6, (Sept. 1971) S. 132—133.
- [6] GOLAND, M.—REISSNER, E.: The Stresses in Cemented Joints. Jr. Appl. Mechanics 11 (1944) S. A-17—A-27.

Dr. Frigyes THAMM, H-1521 Budapest