DYNAMICS — ДИНАМИКА

EINZELNE PROBLEME DER DYNAMIK ZUSAMMENGESETZTER SYSTEME

Von

Á. BOSZNAY

Lehrstuhl für Technische Mechanik, Fakultät für Elektroingenieurwesen, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 8. März, 1972)

1. Einleitung, Zielsetzung

Bei der Prüfung von komplizierteren dynamischen (mechanischen) Systemen — z. B. *eines Maschinensatzes* — stellt sich natürlicherweise die Forderung, aus den dynamischen Eigenschaften der einfacheren Systembestandteile auf die dynamischen Eigenschaften des Systems schließen zu können.

Als Beispiel soll der Turbostromerzeuger, bestehend aus Maschinenfundament, Turbine, Achsenkupplung und Stromerzeuger, genannt werden. Hier kann zum Beispiel die Frage gestellt werden, wie sich in Kenntnis der kritischen Umdrehungszahlen des *gesondert geprüften* Turboläufers und Stromerzeugerläufers auf die kritische Umdrehungszahl des Gesamtaggregats schließen läßt. Bei experimentellen Untersuchungen gestaltet sich dieses Problem dadurch noch verwickelter, wenn beim gesonderten Prüfstandlauf der beiden Läufer nicht *dasselbe* Maschinenfundament und nicht *dieselben* Lager wie für den gekoppelten Maschinensatz im Betrieb benutzt werden.

Im weiteren sollen einige Fragen der vorigen Ausführungen, u. zw. einige mögliche Arten der Schlußfolgerung aus der Dynamik der Teile auf die Dynamik des Ganzen, geprüft werden. Zuerst sollen Probleme betrachtet werden, die sich mit einer zufriedenstellenden Näherung durch lineare Beziehungen und konstante Koeffizienten beschreiben lassen. Die Frage, wie sich die Ausgangsmodelle aus der wirklichen Maschine, aus dem Maschinenteil usw. ableiten lassen, wird hier nicht behandelt.

Das vorige Beispiel bezog sich auf eine Maschine mit rotierenden Teilen ohne betriebsmäßig eingeschränkte Winkelverdrehung, die hier darzulegende Theorie gilt jedoch in der vorliegenden Form lediglich für Maschinen, die keine Bauteile enthalten, die betriebsmäßig uneingeschränkte Winkelverdrehungen ausführen.

Mit dem Problemenkreis befaßt sich eine ausgedehnte Literatur. Hier sollen nur die Arbeiten von bahnbrechender Bedeutung G. KRONS genannt werden, die in konzentrierter Form in [1] vorliegen, sowie der Aufsatz E. HÜBNERS [2], dem die Auffassung des vorliegenden Beitrags ziemlich nahesteht.

Das aufgeworfene Problem tritt nicht nur bei rein mechanischen Systemen auf; es ist z. B. auch bei der Prüfung von elektrischen Leitungsnetzen, bei optischen und thermischen Aufgaben, bei mathematischer Erforschung von ökonomischen und sozialen Fragen zu berücksichtigen.

Auch die Erfahrung ist vor Augen zu halten, daß ein zusammengesetztes System im allgemeinen qualitativ auch andere Erscheinungen zeigen kann als die gesondert betrachteten Teile.

2. Ein elementares Beispiel

Am Modell in Abb. 1a lassen sich bereits — trotz seiner Einfachheit — einige Grundgedanken studieren. Von der Beschreibung der Eigenschaften des Modells soll hier abgesehen werden, da es allgemein bekannt ist.

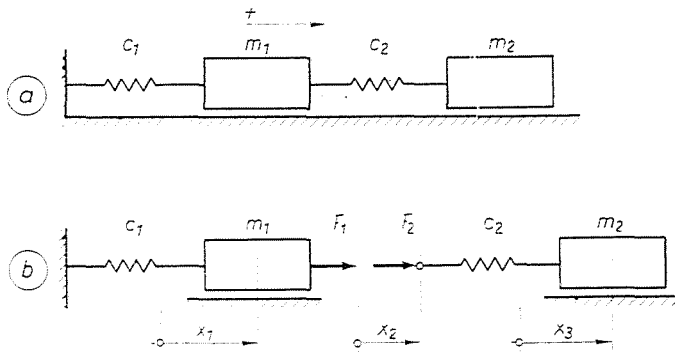

Abb. 1. Einfaches Schwingungssystem-Modell und seine Zerlegung in Teile

Das Modell sei aus den in Abb. 1a angegebenen Teilen zusammengesetzt vorgestellt. Die einstweilen aus einer äußeren Quelle stammenden Kräfte mit den Amplituden F_1 und F_2 verändern sich in der Zeit sinusförmig, mit derselben Kreisfrequenz ω. Zufolge der Annahme der Linearität des Modells, ändern sich *in stationärem Zustand* auch die Koordinaten sinusförmig, mit derselben Kreisfrequenz ω; die Amplituden werden durch x_1 bzw. x_2 bezeichnet. Unter diesen Annahmen werden die Amplituden die Werte

$$x_1 = r_1 F_1 \qquad \text{und} \qquad x_2 = r_2 F_2 \tag{1}$$

haben; r_1 und r_2 sind Funktionen von ω; sie können als *Resonanzfunktionen*, *dynamische Faktoren* bezeichnet werden. Auch andere Bezeichnungen sind üblich.

Durch die Verbindung der beiden Teile in Abb. 1b erhält man das ursprüngliche System in Abb. 1a. In diesem Falle stammen F_1 und F_2 nicht

aus einer äußeren Quelle, sondern stellen die Amplituden der von den beiden Teilen *einander* übermittelten Kräfte dar. Die Kopplung bedeutet, daß

$$x_1 = x_2 \qquad \text{und} \qquad F_1 + F_2 = 0 \tag{2}$$

dauernd gelten müssen. (Die zweite Gleichung ergibt sich aus der Überlegung, daß die entsprechenden zwei Punkte als durch ein Teilchen mit der Masse Null — dieses wird *Knotenpunkt* genannt — verbunden vorgestellt werden und die Gleichgewichtsgleichung dieses Teils angeschrieben wird.)
Aus (1) und (2) ergeben sich

$$x_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 0, \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0. \tag{3}$$

Aus der zweiten Gleichung (3) lassen sich in Kenntnis vor $r_1(\omega)$ und $r_2(\omega)$ die Kreisfrequenzen ω errechnen, mit denen das ursprüngliche System (nach Aufladung mit Energie, ohne äußere Erregung) zu schwingen fähig ist, d. h. die Eigenkreisfrequenzen.

In diesem Beispiel besteht also die Möglichkeit, in Kenntnis je eines dynamischen Kennwertes der Teile — r_1 und r_2 — auf das Ganze zu schließen.

In Verbindung mit diesem Beispiel stellt sich die Frage, ob die Eigenkreisfrequenzen der Teile die Eigenkreisfrequenz des Gesamtsystems sein können.

»Teile« bedeuten hier im Verbindungspunkt voneinander getrennte und dort frei (kraftwirkungslos) gelassene Teile. Die Frage also in diesem Beispiel ist: ist es mit $F_1 = 0$ möglich bei derselben Kreisfrequenz ω $x_1 \neq 0$, und mit $F_2 = 0$, $x_2 \neq 0$.

Im vorliegenden Falle gelten

$$r_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{c_1} - m_1\omega^2} \qquad \text{und} \qquad r_2 = \frac{m_2 c_2 \omega^2 - 1}{m_2 \omega^2}.$$

Aus (1) lassen sich die Eigenkreisfrequenzen der einzelnen Teile leicht ermitteln, mit denen die einzelnen Teile mit einer von Null unterschiedlichen Amplitude, ohne eine in bezug auf den betreffenden Teil äußere Kraftwirkung, schwingen können. Zum Beispiel kann bei $F_1 = 0$ nur dann $x_1 \neq 0$ gelten, wenn $\dfrac{1}{r_1} = 0$. Daher lautet die Gleichung, die die Eigenkreisfrequenz des einen Teils bestimmt:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{c_1} - m_1\omega^2 = 0, \tag{4a}$$

während die Eigenkreisfrequenz des anderen Teils durch die Gleichung

$$\frac{1}{r_2} = \frac{m_2\omega^2}{m_2c_2\omega^2 - 1} = 0 \tag{4b}$$

geliefert wird. Im weiteren sollen die Gleichungen, die die Eigenkreisfrequenzen angeben, Frequenzgleichungen genannt werden.

Gl. (4a) ist sogleich verständlich, da sie zur wohlbekannten Beziehung $\omega^2 = \frac{1}{m_1c_1}$ führt. Um (4b) physikalisch zu deuten, ist zu überlegen, daß sich die Resonanzfunktion r_2 auf die Amplitude x_2 bezieht (siehe Abb. 1!) und nicht auf x_3. Aus (4b) ergibt sich $\omega = 0$, d. h. im vorliegenden Falle ist die Deutung der Eigenkreisfrequenz im üblichen Sinne unmöglich.

In unserem Fall ist es nämlich bei $F_2 = 0$ unmöglich, daß der linke Endpunkt der Feder sich sinusförmig als Funktion der Zeit bewege.

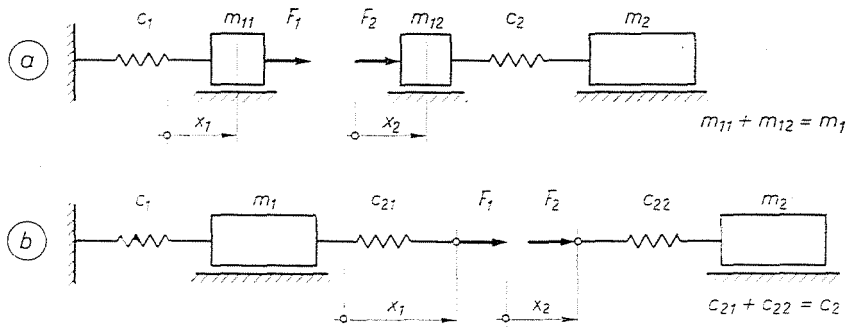

Abb. 2. Eine anderartige Zerlegung in Teile

Aus (4a) und (4b) ist sofort zu erkennen, daß die linke Seite der Gleichung (3) nicht in der Weise gleich Null sein kann, daß beide Glieder einzeln gleich Null werden. Das ist selbst bei einer besonderen — doch von Null unterschiedlichen — Annahme der Parameter m_1, m_2, c_1, c_2 unmöglich. Das bedeutet, daß im vorliegenden Falle keine der Eigenkreisfrequenzen der Teile in Abb. 1b die Eigenfrequenz des Gesamtsystems darstellt.

Durch die Kenntnis der Funktionen $r_1(\omega)$ und $r_2(\omega)$ wird die Auflösung der Frequenzgleichung (3) dennoch erleichtert.

Es besteht die Möglichkeit, sich das Schwingungssystem in Abb. 1a auch dann anders und sogar auf unendlich vielerlei Art in Teile zerlegt vorzustellen, wenn die Zahl der Teile endlich, z. B. mit zwei vorgegeben ist. In Abb. 2 sind zwei weitere, mögliche Zerlegungen in zwei Teile dargestellt.

Bei der Zerlegung nach Abb. 2a lassen sich zum Beispiel

$$\frac{1}{r_2} = -m_{12}\omega^2 - \frac{m_2\omega^2}{1 - m_2c_2\omega^2},$$

bei der Zerlegung nach Abb. 2b

$$\frac{1 - m_1c_1\omega^2}{c_1 + c_{21} - m_1c_1c_{21}\omega^2}$$

die nicht angeschriebenen Beziehungen analog zu (4a) und (4b) mechanisch bilden.

Die Frequenzgleichungen der Teile in Abb. 2a lauten

$$\frac{1}{c_1} - m_{11}\omega^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad -m_{12}\omega^2 - \frac{m_2\omega^2}{1 - m_2c_2\omega^2} = 0.$$

Aus der Frequenzgleichung der Form

$$\left(\frac{1}{c_1} - m_{11}\omega^2\right) + \left(-m_{12}\omega^2 - \frac{m_2\omega^2}{1 - m_2c_2\omega^2}\right) = 0 \tag{5}$$

des Gesamtsystems ist zu erkennen, daß sich diese Gleichung so befriedigen läßt, daß die beiden Glieder in den Klammern auf der linken Seite gleichzeitig gleich Null werden. Diese Forderung bedeutet eigentlich drei Gleichungen, da auch die Gleichung

$$m_{11} + m_{12} = m_1$$

gelten muß.

Diese drei Gleichungen ergeben eine Beziehung zwischen c_1, m_{11}, m_{12}, c_2, m_2 und dem ω, bei dem diese Erscheinung bestehen kann. Bei festgelegten c_1, m_2 und c_2 erhält man stets als Ergebnis positive Werte für m_{11}, m_{12} und ω^2.

Schließlich läßt sich feststellen, daß die am Verbindungspunkt getrennten, und dort kraftlos gelassenen Teile eine solche gemeinsame Eigenfrequenz haben können, die auch Eigenfrequenz des ganzen Systems ist.

Man kann in Zusammenhang mit der Zerlegung nach Abb. 2b eine andere, oben noch nicht behandelte Erscheinung untersuchen. Wir fragen: kann irgendwelcher Verbindungspunkt des Systems ohne äußere Einwirkung während der Schwingung in Ruhe bleiben? In Formeln ausgedrückt: $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$ (natürlich inzwischen $F_1 + F_2 = 0$), und $x_1 = x_2 = 0$. Diese Möglichkeit besteht dann und nur dann, wenn bei derselben ω $r_1 = 0$ und $r_2 = 0$. In diesem speziellen Fall kann man nicht aus der Frequenzgleichung:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0$$

diese Eigenkreisfrequenz des Systems gewinnen. (Das ist natürlich, da wir diese letztere Gleichung aus der Forderung $x_1 = x_2 = 0$ bekamen.)

Diese Erscheinung kann bei der Zerlegung nach Abb. 2b — mit entsprechendem c_{21} — zu Tage kommen. Also: bei dieser Zerlegung (bei diesem c_{21}) enthalten die aus $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0$ berechenbaren Eigenkreisfrequenzen nicht alle Eigenkreisfrequenzen des Systems.

Betrachtet man die bisherige Behandlung dieses elementaren Beispiels, so ist zu erkennen, daß zwar die Kenntnis der Eigenkreisfrequenzen der Teile nicht immer die Eigenkreisfrequenz des Gesamtsystems direkt ergibt, die Kenntnis der Funktionen $r_i(\omega)$ die Auflösung der Frequenzgleichung des Systems dennoch erleichtert.

Zur Vorbereitung der weiteren Ausführungen soll in Verbindung mit dem Modell in Abb. 1 zusetzlich noch die folgende Frage aufgeworfen werden. Gesetzt, es wirkt auf den Zerlegungspunkt nach Abb. 1b aus äußerer Quelle eine in der Zeit sinusförmige Kraft mit der Amplitude F_0, und es soll die Amplitude x_0 der Verschiebung dieses Punktes des Schwingungssystems in stationärem Zustand bestimmt werden. Dieses Problem wird anstatt der Gleichungen (2), durch die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = x_0 \qquad \text{und} \qquad -F_1 - F_2 + F_0 = 0 \tag{2a}$$

beschrieben.

Mit (1) erhält man

$$x_0 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = F_0 \qquad \text{d. h.} \qquad x_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} F_0 . \tag{3a}$$

Es besteht also die Möglichkeit, in Kenntnis der dynamischen Faktoren der Teilsysteme den dynamischen Faktor R des Gesamtsystems zu errechnen:

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} .$$

3. Verallgemeinerungsmöglichkeiten

Im vorigen Abschnitt wurden dynamische Faktoren eingeführt, die zwischen der Amplitude der in einem Punkte des (Teil)-systems angreifenden, sinusförmigen Einzelkraft und der Verschiebungsamplitude dieses Punktes in stationärem Zustand eine Beziehung angeben. Bei zusammengesetzteren Systemen können auch dynamische Faktoren bestimmt werden, wo anstatt einer

Einzelkraft ein konzentriertes Moment, statt der Verschiebung eine Winkelverdrehung stehen. Damit erhält man vier Arten von dynamischen Faktoren mit den Dimensionen:

$$\frac{\text{Länge}}{\text{Kraft}}, \quad \frac{\text{Länge}}{\text{Moment}}, \quad \frac{\text{Winkel}}{\text{Kraft}}, \quad \frac{\text{Winkel}}{\text{Moment}}.$$

Betrachten wir nun das in Abb. 3 abstrakt dargestellte, dynamische System; es wird in die Teile a, b, c, . . . zerlegt; es wird angenommen, daß jeder Teil in einer *endlichen* Zahl von Punkten mit dem anderen verbunden ist.

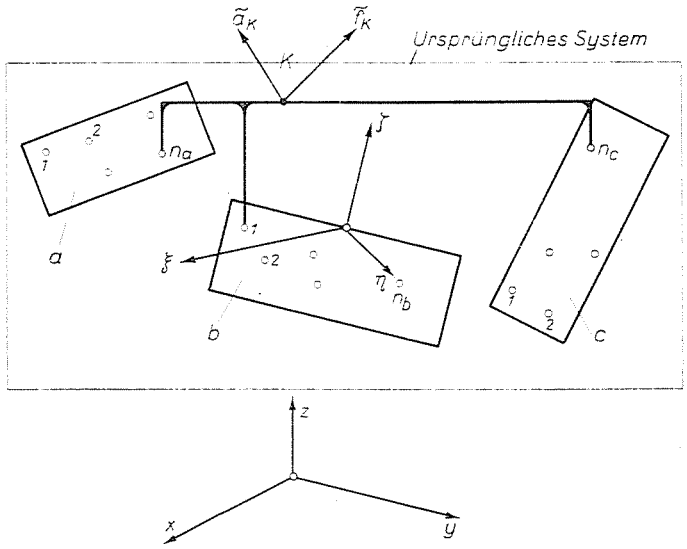

Abb. 3. Aus Teilsystemen zusammengesetzt vorgestelltes Schwingungssystem mit dem K-ten Knotenpunkt

Durch die Annahme einer endlichen Zahl von Verbindungspunkten *wird die Entscheidung nicht bestimmt*, ob die einzelnen Teile als diskret oder als Kontinuum modelliert werden sollen; die folgenden Ausführungen sind von dieser Wahl unabhängig in beiden Fällen gültig. Eine Beziehung kann nicht nur einen, sondern auch mehrere Punkte in der oben gekennzeichneten Weise verbinden. Solche Verbindungspunkte sollen *Knotenpunkte* genannt werden. Das Gesamtsystem soll derart in Teilsysteme zerlegt werden, daß kein einziges Teilsystem vorhanden sei, das sich mit mehr als einem Verbindungspunkt an denselben Knotenpunkt anschließt.

Es sei einstweilen angenommen, daß sämtliche Verbindungen derartig sind, daß die Verschiebungen der verbundenen Punkte und die Winkelverdrehungen in diesen Punkten — jede für sich — gleich werden. Auch »lockerere«

Beziehungen können berücksichtigt werden. Dafür wird in Abschnitt 8 ein Beispiel angeführt.

Sämtliche mechanischen Eigenschaften der Verbindungskonstruktionen werden als zu den einzelnen Teilsystemen gehörig betrachtet. Daher sind die Linien in der Zeichnung, die die Verbindung darstellen, als massenlose und starre Stäbe zu betrachten.

Im weiteren soll *auf zwei wichtigere* Fragen eingegangen werden. *Zuerst* wird geprüft, wie die Frequenzgleichung eines an sich betrachteten Teils gebildet werden kann. Als *zweite Aufgabe* wird darauf eine Antwort gesucht, wie in Kenntnis der Eigenschaften der Teile die Frequenzgleichung des Gesamtsystems oder bei Fremderregung der stationäre Zustand abgeleitet werden können.

4. Die Frequenzgleichung eines Teilsystems

Für die Analyse *der ersten Frage* genügt es, das Verfahren an einem Teilsystem zu zeigen. Es wird dazu der Teil b gewählt.

Wir nehmen an, es nehmen n_b Punkte des Teils b an der Verbindung teil. Es seien die Koordinaten der Verschiebung des i-ten Punktes — im an Teil b angeschlossenen Koordinatensystem ξ, η, ζ — ξ_i, η_i, ζ_i; die der Winkelverdrehung, die wegen ihrer geringen Größe als Vektor behandelt werden darf, $\varphi_i, \psi_i, \chi_i$.

Der Teil b sei in allen n_b Punkten durch je eine sinusförmige Kraft und ein Moment mit derselben Kreisfrequenz ω angegriffen. Es seien die Koordinaten des Amplitudenvektors der im i-ten Punkt angreifenden Kraft im Koordinatensystem ξ, η, ζ F_i, G_i, H_i, die Koordinaten des Amplitudenvektors des in demselben Punkt angreifenden Moments M_i, N_i, K_i. Für ein lineares System gelten:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= r_{11}F_1 + r_{12}G_1 + r_{13}H_1 + r_{14}M_1 + r_{15}N_1 + r_{16}K_1 + \dots, \\
\eta_1 &= r_{21}F_1 + r_{22}G_1 + r_{23}H_1 + r_{24}M_1 + r_{25}N_1 + r_{26}K_1 + \dots, \\
\zeta_1 &= r_{31}F_1 + r_{32}G_1 + r_{33}H_1 + r_{34}M_1 + r_{35}N_1 + r_{36}K_1 + \dots, \\
\varphi_1 &= r_{41}F_1 + r_{42}G_1 + r_{43}H_1 + r_{44}M_1 + r_{45}N_1 + r_{46}K_1 + \dots, \\
\psi_1 &= r_{51}F_1 + r_{52}G_1 + r_{53}H_1 + r_{54}M_1 + r_{55}N_1 + r_{56}K_1 + \dots, \\
\chi_1 &= r_{61}F_1 + r_{62}G_1 + r_{63}H_1 + r_{64}M_1 + r_{65}N_1 + r_{66}K_1 + \dots, \\
&\vdots \\
\xi_{n_b} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\eta_{n_b} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\zeta_{n_b} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\varphi_{n_b} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\psi_{n_b} &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\chi_{n_b} &= r_{n_b1}F_1 + r_{n_b2}G_1 + r_{n_b3}H_1 + r_{n_b4}M_1 + r_{n_b5}N_1 + r_{n_b6}K_1 \dots .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Die Größen $r_{ij}(i, j = 1, \ldots, n_b)$ in (6) sind Funktionen von ω; das sind das System in den angegebenen Verbindungspunkten kennzeichnende dynamische Faktoren; unter diesen kommen Faktoren mit allen vier möglichen Dimensionen vor. Sie werden als bekannte Funktionen betrachtet.

Nach Einführung der Spaltenmatrizen

$$\mathbf{a}_b = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \\ \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{n_b} \\ \psi_{n_b} \\ \chi_{n_b} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_b = \begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \\ H_1 \\ M_1 \\ N_1 \\ K_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{n_b} \\ N_{n_b} \\ K_{n_b} \end{bmatrix} \tag{7}$$

und der quadratischen Matrix,

$$\mathbf{R}_b = [r_{ij}] \tag{8}$$

läßt sich (6) in der Form

$$\mathbf{a}_b = \mathbf{R}_b \mathbf{f}_b \tag{6a}$$

schreiben.

$\mathbf{R}_b$ kann als »*dynamischer Matrixfaktor des Teils b*« bezeichnet werden.

Angenommen, daß $\mathbf{R}_b$ nichtsingular ist, kann $\mathbf{f}_b$ aus (6a) ausgedrückt werden:

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}_b . \tag{6b}$$

Die Schwingung des Teils b ohne äußere Kraftwirkungen, d. h. im Falle $\mathbf{f}_b = \mathbf{0}$ mit einem von Null unterschiedlichen $\mathbf{a}_b$, stellt den Fall der Eigenschwingung dar. Diese ist nur möglich, wenn

$$\det \mathbf{R}_b^{-1} = 0 \tag{9}$$

gilt. Das ist die Frequenzgleichung des Teils b; die den Gl. (4a) bzw. (4b) entsprechende Beziehung.

Existiert eine solche Eigenfrequenz dieses Teiles, zu der eine Schwingungsform mit

$$\boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{0}$$

gehört, kann diese nicht aus (9) berechnet werden. Zugegeben, daß bei dieser Schwingung zufällig $f_b \neq \mathbf{0}$ sein kann, folgt aus (6a), daß dann

$$\det \boldsymbol{R}_b = 0 \tag{9a}$$

sein muß. Die aus den Lösungen von (9) fehlenden Eigenfrequenzen können aus (9a) gewonnen werden.

In ähnlicher Weise lassen sich für sämtliche Teile den Matrizen (7) und (8) entsprechende Matrizen bestimmen; die Elemente der einzelnen Matrizen sind immer im zum betreffenden Teil gehörenden (eigenen) Koordinatensystem gedeutet.

5. Zusammenstellung des vollen Systems aus Teilsystemen

Um das volle System zu analysieren, sollen erst die Knotenpunkte betrachtet werden.

Die Knotenpunkte werden zweckmäßigerweise, ähnlich wie es in Abschnitt 2 gesagt wurde, als Körperchen mit der Masse gleich Null und mit einem Trägheitsmoment gleich Null aufgefaßt. Der Summenvektor der in einem Knotenpunkt angreifenden Einzelkräfte und der Summenvektor der Momente müssen also — durch den äußeren Kraft- bzw. Momentenvektor in diesem Knotenpunkt ergänzt — gleich Null sein. Die Gleichungen, die diese Tatsache beschreiben, werden zweckmäßig — anstatt der eigenen Koordinatensysteme der einzelnen Teile — unter Anwendung eines gemeinsamen Koordinatensystems angeschrieben. Die Erkenntnis dieser Notwendigkeit erfordert die Transformation der in den eigenen Koordinatensystemen der einzelnen Teile dargestellten Kraft- und Momentenvektoren in das gemeinsame Koordinatensystem.

Auch der Umstand, daß die Verschiebungs- und Winkelverdrehungsvektoren der in einem Knotenpunkt zusammenlaufenden Verbindungspunkte mit dem Verschiebungs- und Winkelverdrehungsvektor des Knotenpunktes übereinstimmen, läßt sich am bequemsten in einem gemeinsamen Koordinatensystem x, y, z ausdrücken. Es ist also zweckmäßig und notwendig, auch die Kenngrößen der Verschiebungen und Verdrehungen in diesem Koordinatensystem auszudrücken.

Um das Verfahren zu erläutern, bedienen wir uns wieder des Teils b. Aus der Spaltenmatrix der Kraftwirkungsamplitude $\mathbf{f}_b$ erhält man das entsprechende $\tilde{\mathbf{f}}_b$ mit den im gemeinsamen Koordinatensystem ausgedrückten Elementen, indem man $\mathbf{f}_b$ mit der diagonalen Hypermatrix $\mathbf{T}_b = \langle \mathbf{t}_b \ldots \mathbf{t}_b \rangle$,

$$\mathbf{t}_b = \begin{bmatrix} \cos(x, \xi) & \cos(x, \eta) & \cos(x, \zeta) \\ \cos(y, \xi) & \cos(y, \eta) & \cos(y, \zeta) \\ \cos(z, \xi) & \cos(z, \eta) & \cos(z, \zeta) \end{bmatrix},$$

multipliziert, die aus den Matrizen, bestehend aus den auf das Koordinatensystem ξ, η, ζ bezogenen Richtungskosinus des Koordinatensystems x, y, z aufgebaut ist:

$$\tilde{\mathbf{f}}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_b & & & & & & \\ & \mathbf{t}_b & & & & & \\ & & \mathbf{t}_b & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \mathbf{t}_b \\ & & & & & & & \mathbf{t}_b \end{bmatrix} \mathbf{f}_b = \mathbf{T}_b \mathbf{f}_b . \tag{10}$$

Hier und im weiteren sind die nicht angeschriebenen Matrizenblöcke bzw. Skalarelemente gleich Null.

Eine ähnliche Beziehung besteht zwischen $\mathbf{a}_b$ und dem entsprechenden $\tilde{\mathbf{a}}_b$ mit im gemeinsamen Koordinatensystem ausgedrückten Elementen:

$$\tilde{\mathbf{a}}_b = \mathbf{T}_b \mathbf{a}_b . \tag{11}$$

Für sämtliche Teile gelten Beziehungen wie (10) und (11); in jede Beziehung kommen die entsprechenden Richtungskosinusmatrizen.

Aus (10) ergibt sich — da $\mathbf{T}_b$ eine Orthogonalmatrix und somit ihre Inverse gleich ihrer mit einem Stern bezeichneten Transponierten ist — durch Multiplikation von links mit $\mathbf{T}_b^*$

$$\mathbf{T}_b^* \, \mathbf{f}_b = \mathbf{f}_b . \tag{12}$$

In ähnlicher Weise erhält man aus (11)

$$\mathbf{T}_b^* \, \tilde{\mathbf{a}}_b = \mathbf{a}_b . \tag{13}$$

(12) und (13) in (6b) eingesetzt, und beide Seiten von links mit $\mathbf{T}_b$ multipliziert, erhält man

$$\tilde{\mathbf{f}}_b = \mathbf{T}_b \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{T}_b^* \tilde{\mathbf{a}}_b . \tag{14}$$

Um die Beziehungen für die Knotenpunkte aufschreiben zu können, wird je eine Spalten-Hypermatrix eingeführt:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_a \\ \tilde{\mathbf{a}}_b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{\mathbf{a}}_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{a}} , \qquad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_a \\ \tilde{\mathbf{f}}_b \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{\mathbf{f}}_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}} . \tag{15}$$

Die Knotenpunkte der Zahl N werden durch Großbuchstaben bezeichnet. (N, n, n_a, . . . , n_n sind voneinander unabhängige Zahlen.)

Aus den im gemeinsamen Koordinatensystem ausgedrückten Koordinaten der Amplitudenvektoren der äußeren, sinusförmigen Kraftwirkungen im Knotenpunkt K wird in analoger Weise wie (7) die Spaltenmatrix

$$\tilde{\mathbf{f}}_K$$

gebildet. Aus den Matrizen $\tilde{\mathbf{f}}_K$ aller Knotenpunkte bildet man dann die Spalten-Hypermatrix

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_A \\ \tilde{\mathbf{f}}_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{\mathbf{f}}_N \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}}_0. \tag{16}$$

Aus den im gemeinsamen Koordinatensystem ausgedrückten Koordinaten der Amplitudenvektoren der sinusförmigen Verschiebung und Winkelverdrehung des Knotenpunktes K wird in ähnlicher Weise wie (7) die Spaltenmatrix

$$\mathbf{a}_K$$

gebildet. Aus den Matrizen $\tilde{\mathbf{a}}_K$ sämtlicher Knotenpunkte gewinnt man die Spalten-Hypermatrix

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_A \\ \tilde{\mathbf{a}}_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{\mathbf{a}}_N \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{a}}_0. \tag{17}$$

Unter Berücksichtigung der Definitionen in (15) und unter Anwendung von (14), erhält man die in Hypermatrixform angeschriebene Beziehung zwischen $\tilde{\mathbf{f}}$ und $\tilde{\mathbf{a}}$:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{R}^{-1}\,\tilde{\mathbf{a}}, \tag{18}$$

mit

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_a\mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{T}_a^* & & & \\ & \mathbf{T}_b\mathbf{R}_b^{-1}\mathbf{T}_b^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{T}_n^* \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_a & & & \\ & \mathbf{T}_b & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a^{-1} & & & \\ & \mathbf{R}_b^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_a^* & & & \\ & \mathbf{T}_b^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n^* \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Die Ordnungszahl von $\mathbf{R}^{-1}$ ist das 6fache der Zahl sämtlicher Verbindungspunkte der Teilsysteme, d. h. von $(n_a + n_b + \ldots + n_n)$.

Nach dieser Vorbereitung lassen sich die Gleichgewichtsgleichungen der Knotenpunkte im gemeinsamen Koordinatensystem anschreiben. Mit einer geeigneten, rechteckigen Matrix $\mathbf{D}$, die nur Einer und Nullen enthält, und die dafür kennzeichnend ist, aus welchen Verbindungspunkten welches Teils in je einen Knotenpunkt Anschlüsse einlaufen, lautet die *zusammengefaßte* Gleichgewichtsgleichung sämtlicher Knotenpunkte:

$$\tilde{\mathbf{f}}_0 - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}\,. \tag{20}$$

Die Matrix $\mathbf{D}$ läßt sich aus der Prinzipskizze des Gesamtsystems mit der Darstellung der Knotenpunkte und Anschlüsse ableiten. Auch die Ableitung von $\mathbf{D}$ aus dem dem System zugeordneten Graphen ist möglich. Bei der Anwendung dieses Verfahrens wird durch die Zuordnung des Graphen zum System die Überlegung gefordert, die bei der direkten Bestimmung von $\mathbf{D}$ anzuwenden ist; dann läßt sich $\mathbf{D}$ aus dem Graphen bereits mechanisch ermitteln.

Die Zahl der Spalten von $\mathbf{D}$ beträgt $6(n_a + n_b + \ldots + n_n)$; die Zahl der Zeilen ist das 6fache der Knotenpunktenzahl, d. h. 6N. Da $N < (n_a + n_b + \ldots + n_n)$, hat $\mathbf{D}$ die Form eines »liegenden« Rechtecks.

Der Umstand, daß sich die Anschlüsse in den Knotenpunkten auch hinsichtlich der Verschiebung und Winkelverdrehung lückenlos an den Knotenpunkt anschließen, läßt sich am günstigsten mit der Gleichung

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{a}}_0 \tag{21}$$

ausdrücken. Die Rechteckmatrix $\mathbf{C}$ wird nach denselben beiden Verfahren abgeleitet wie $\mathbf{D}$.

Mit der nun folgenden Überlegung wird nachgewiesen, daß $\mathbf{D}$ und $\mathbf{C}$ nicht voneinander unabhängig, sondern die Transponierten voneinander sind.

Die Überlegung geht davon aus, daß die für starr und massenlos betrachteten Elemente (bzw. Stabsystem), die die Verbindungen zustande bringen, als von den durch sie verbundenen Teilen abgetrennt aufgefaßt werden.

Im weiteren wird die Bilanzgleichung der mechanischen Energie für das Stabsystem aufgeschrieben. Nach dieser ist die Derivierte nach der Zeit der kinetischen Energie des Stabsystems (wegen der Massenlosigkeit gleich Null) gleich der Leistung der das System angreifenden inneren und äußeren Kraftwirkungen. Zufolge der Starrheit des Stabsystems kann die Gesamtleistung der inneren Kraftwirkungen nur Null sein. Die äußeren Kraftwirkungen sind einerseits auf die Knotenpunkte von außen wirkende Kräfte und Momente; ihre Amplituden sind in der Spalten-Hypermatrix $-\tilde{\mathbf{f}}_0$ enthalten; andererseits die Kräfte und Momente, die von den Teilsystemen auf das starre Stabsystem ausgeübt werden, diese werden mit der Spalten-Hypermatrix $-\mathbf{f}$ ausgedrückt. Zur Leistungsberechnung bedarf man auch der Geschwindigkeits- bzw. Winkelgeschwindigkeitsamplituden der entsprechenden Stabwerkpunkte; diese werden durch $\omega\tilde{\mathbf{a}}_0$ und $\omega\mathbf{a}$ geordnet zusammengefaßt. Die Berechnung erfordert die skalare Multiplikation der zusammengehörenden Größen, die mit dem Matrizenkalkül leicht durchzuführen ist.

Die gesuchte Energiebilanzgleichung lautet schließlich:

$$-\omega\tilde{\mathbf{f}}^*\tilde{\mathbf{a}} \sin \omega t \cos \omega t + \omega\tilde{\mathbf{f}}_0^*\tilde{\mathbf{a}}_0 \sin \omega t \cos \omega t = 0. \tag{22}$$

(22) gilt nur dann in einem beliebigen Augenblick, wenn

$$\tilde{\mathbf{f}}^*\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{f}}_0^*\tilde{\mathbf{a}}_0. \tag{22a}$$

(20) und (21) in (22a) eingesetzt, unter Anwendung der Berechnungsregel der Transponierten des Matrizenproduktes, erhält man

$$\tilde{\mathbf{f}}^*\mathbf{C}\tilde{\mathbf{a}}_0 = \tilde{\mathbf{f}}^*\,\mathbf{D}\tilde{\mathbf{a}}_0\,. \tag{23}$$

Aus (23) ist direkt zu erkennen, daß

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^* \tag{24}$$

gilt, was nachgewiesen werden sollte. In Kenntnis von (24) lassen sich die Eigenschaften von $\mathbf{C}$ in ähnlicher Weise kennzeichnen wie im Falle von $\mathbf{D}$, es wird lediglich anstelle der dort angegebenen »Zeile« »Spalte« gesetzt, und umgekehrt.

Durch die bisherige Beweisführung werden zwei hauptsächliche Ergebnisse geliefert. Das eine ist die Frequenzgleichung des Systems, das zweite die Berechnung der »Antwort« des Systems in stationärem Zustand. Diese Fragen werden in den Abschnitten 6 und 7 behandelt.

6. Die Frequenzgleichung des Systems

Um diese abzuleiten, ist zwischen der die Bewegungsamplituden der Knotenpunkte kennzeichnenden Spaltenmatrix $\tilde{\mathbf{a}}_0$ und der Amplitudenmatrix $\tilde{\mathbf{f}}_0$ der auf die Knotenpunkte wirkenden äußeren Kräfte eine Beziehung zu suchen. Für die Frequenzen der freien Schwingungen ist nämlich kennzeichnend, daß auch bei $\tilde{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{0}$ $\tilde{\mathbf{a}}_0 \neq \mathbf{0}$ möglich ist.

Man erhält die gesuchte Beziehung aus (18), indem man diese von links mit $\mathbf{D} = \mathbf{C}^*$ multipliziert und anstelle von $\tilde{\mathbf{a}}$ mit Hilfe von (21) $\tilde{\mathbf{a}}_0$ einführt. Damit ergibt sich die Formel:

$$\mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{a}}_0 = \tilde{\mathbf{f}}_0 . \tag{25}$$

Es ist sogleich zu erkennen, daß bei $\tilde{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{0}$ $\tilde{\mathbf{a}}_0$ lediglich dann einen von Null unterschiedlichen Wert haben kann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix des zufolge von $\tilde{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{0}$ homogen gewordenen Gleichungssystems Null ist, d. h.

$$\det \mathbf{C}^* \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} = 0. \tag{26}$$

Das ist die gesuchte — in der Regel transzendente —Frequenzgleichung.

Die Matrix $\mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}$ ist quadratisch, mit der Ordnungszahl 6N.

Es besteht die Möglichkeit, daß sich aus (26) nicht alle Eigenkreisfrequenzen ergeben. Das ist der Fall, wenn das System mindestens eine solche Eigenschwingungsform hat, bei der alle Knotenpunktverschiebungen und -Winkelverdrehungen Null bleiben, also wenn

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{0}.$$

Mit (21) folgt daraus, daß dann

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

und mit (15), daß

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{a}_b = \boldsymbol{0}, \ldots, \quad \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \text{ ist.}$$

Da gleichzeitig $\boldsymbol{f}_a, \ldots, \boldsymbol{f}_n \neq \boldsymbol{0}$, muß (6a) entsprechend det $\boldsymbol{R}_a = 0$, det $\boldsymbol{R}_b = 0, \ldots$, det $\boldsymbol{R}_n = 0, \ldots$ (26a) bei derselben ω sein.

Bestehen also Gleichungen (26a) für einen ω Wert, dann ist diese Kreisfrequenz eine Eigenkreisfrequenz des Systems, die aus (26) nicht berechenbar ist.

7. Die Antwort der Knotenpunkte des Systems in stationärem Zustand

Mit den bisher benutzten Bezeichnungen lautet die Aufgabe wie folgt: bei vorgegebenen ω und $\tilde{\mathbf{f}}_0$ wird $\tilde{\mathbf{a}}_0$ gesucht. Diese Berechnung läßt sich mit Hilfe der Gleichung (25) durchführen, und besteht *grundsätzlich* in der Inversion

der quadratischen Matrix $\mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}$. Die Inversion ist möglich, wenn $\det \mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} \neq 0$, d. h. wenn das vorgegebene ω keine Eigenkreisfrequenz des Systems ist.

Dazu ist zu bemerken, daß der Auflösung des Gleichungssystems (25) vorangehend die durch den Ausdruck $\mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}$ vorgeschriebene Multiplikation vorgenommen werden muß. Will man z. B. (25) durch die Inversion von $\mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}$ lösen, läßt sich die Inversion am Dreiermatrixprodukt in der Form $\mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}$ nicht durchführen, da $\mathbf{C}$ und $\mathbf{C}^*$ im allgemeinen nichtquadratisch sind.

8. Umriß eines Anwendungsbeispieles

Als stark idealisierte Anwendung soll eine Variante des Beispiels in Abb. 1 erörtert werden, die dadurch gekennzeichnet ist, daß sich die betriebsmäßig rotierenden Maschinenteile nicht drehen. Im ersten Schritt wird die Aufgabe in folgender, schematischer Form angesetzt: aus Schwingungsversuchen sind die dynamischen Eigenschaften des auf einem Versuchsmaschinenfundament ruhenden Generatorrotors sowie der auf einem anderen Versuchsmaschinenfundament ruhenden Turbine, des Betriebsmaschinenfundaments und der Achsenkupplung bekannt; es werden die dynamischen Eigenschaften in gewissen Knotenpunkten des auf Betriebsmaschinenfundament gelagerten und mit der Kupplung gekoppelten Maschinensatzes in Ruhestand gesucht. Bei der Untersuchung bleiben die thermischen Einflüsse unberücksichtigt bzw. wird vorausgesetzt, daß in sämtlichen obengenannten Fällen der thermische Zustand der einzelnen Läufer derselbe ist.

Die Aufgabe weicht in gewisser Beziehung von der in Abschnitt 3 behandelten Aufgabestellung ab; es handelt sich nämlich nicht einfach darum, aus den Eigenschaften gewisser Teile auf das Ganze zu schließen. Das »volle System« wird jetzt nämlich durch das auf betriebsmäßige Maschinenfundamenten gelagert und mit der Achsenkupplung verbundene System dargestellt. Die beiden Versuchsmaschinenfundamente sind keine Teile des »vollen« Systems, ferner sind die dynamischen Eigenschaften der Läufer allein unbekannt, man kennt diese lediglich zusammen mit ihren eigenen Versuchsfundamenten. Trotz dieser Abweichungen läßt sich die Lösung mit einer geringfügigen Ergänzung als eine Anwendung der Theorie in Abschnitt 3 auffassen.

Abb. 4 zeigt schematisch die Maschinenteile, um die es sich in der Aufgabe handelt. Dabei bedeuten: a das betriebsmäßige Maschinenfundament, b den Generatorrotor, c den Turboläufer, d das gesonderte Versuchsmaschinenfundament für den Generator, e das gesonderte Versuchsmaschinenfundament für den Turboläufer, f die Achsenkupplung.

Von der bei der Lösung der allgemeinen Aufgabe angewandten Methode abweichend, ist es für die konkrete Aufgabe zweckmäßig, die Verbindungs-

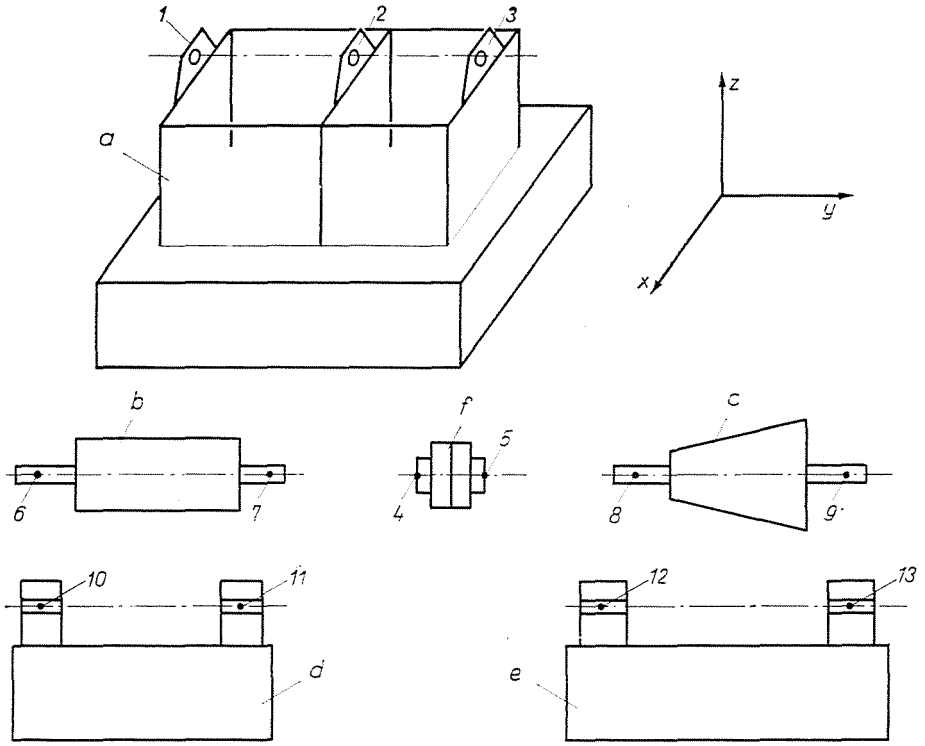

Abb. 4. Schematische Darstellung der Teile eines aus Teilen zusammengesetzt vorgestellten Turbogenerator-Maschinensatzes

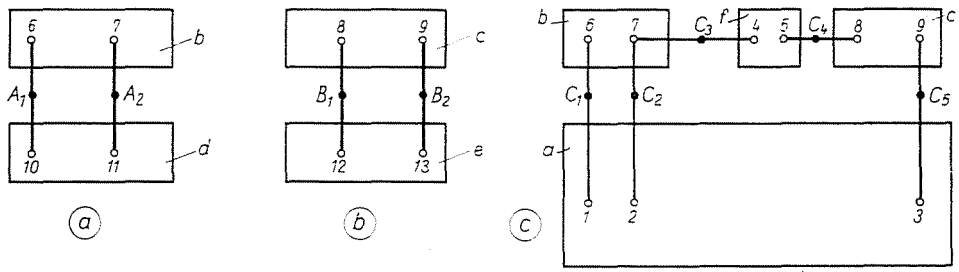

Abb. 5. a) Schematische Darstellung des ersten Schwingungsversuchs. b) Schematische Darstellung des zweiten Schwingungsversuchs. c) Schematische Darstellung der betriebsmäßigen Anordnung

punkte der einzelnen Teile kontinuierlich zu berechnen. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, wird mit insgesamt 13 Verbindungspunkten gerechnet.

In Abb. 5 ist das schematische Bild dreier verschiedener Verbindungen gezeigt; die Knotenpunkte sind durch Großbuchstaben bezeichnet.

Der Einfachheit halber wird angenommen, daß derselbe Punkt 7 des Generatorrotors in Abb. 5a mit Punkt 11 und in Abb. 5c mit Punkt 4 verbunden ist. Auch von Punkt 8 des Generatorrotors wird angenommen, daß er

sowohl in der Verbindung mit Punkt 12 in Abb. 5b wie auch in Verbindung mit Punkt 5 in Abb. 5c vorkommt.

Im vorliegenden Falle sind die Achsen der eigenen Koordinatensysteme der einzelnen Teile paarweise zueinander und zur mit den Achsen des gemeinsamen Koordinatensystems übereinstimmenden, positiven Richtung parallel, damit sind sämtliche Richtungskosinusmatrizen Einheitsmatrizen und können bei den Berechnungen vernachlässigt werden.

Es sind im vorliegenden Falle Knotenpunkte vorhanden, die es nicht zwingend erfordern, daß sämtliche Verschiebungskennwerte der dort zusammentreffenden Kopplungspunkte gleich seien. Das ist der in Abschnitt 3 genannte Fall der lockereren Verbindung. Z. B. wird durch die Kopplungen bei keiner der Lagerungen ein gleicher Winkel ψ vorgeschrieben; ferner wird bei der Anwendung von zwei oder mehreren Lagern lediglich einer als axial betrachtet; die y-Verschiebungen werden also durch die anderen nicht als identisch gezwungen. Der Einfachheit halber wird bei der Kopplung der Teile c und e keines der Lager als axial angenommen.

Im Sinne der vorigen Ausführungen sind die Verschiebungsamplitudenmatrizen der einzelnen Teile im gemeinsamen Koordinatensystem wie folgt:

$$\tilde{\mathbf{a}}_a = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \varphi_1 \\ \chi_1 \\ x_2 \\ z_2 \\ \varphi_2 \\ \chi_2 \\ x_3 \\ z_3 \\ \varphi_3 \\ \chi_3 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{a}}_b = \begin{bmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \\ \varphi_6 \\ \chi_6 \\ x_7 \\ z_7 \\ \varphi_7 \\ \chi_7 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{a}}_c = \begin{bmatrix} x_8 \\ z_8 \\ \varphi_8 \\ \chi_8 \\ x_9 \\ z_9 \\ \varphi_9 \\ \chi_9 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_d = \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \\ \varphi_{10} \\ \chi_{10} \\ x_{11} \\ z_{11} \\ \varphi_{11} \\ \chi_{11} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{a}}_e = \begin{bmatrix} x_{12} \\ z_{12} \\ \varphi_{12} \\ \chi_{12} \\ x_{13} \\ z_{13} \\ \varphi_{13} \\ \chi_{13} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{a}}_f = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ \varphi_4 \\ \chi_4 \\ x_5 \\ y_5 \\ z_5 \\ \varphi_5 \\ \chi_5 \end{bmatrix}.$$

Werden nach Abb. 5a die Teile b und d verbunden, so lauten die Spaltenmatrix $\tilde{\mathbf{a}}_{obd}$ der Knotenpunktverschiebungskennwerte:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{obd} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_{A1} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{A1} \\ y_{A1} \\ z_{A1} \\ \varphi_{A1} \\ \chi_{A1} \\ x_{A2} \\ z_{A2} \\ \varphi_{A2} \\ \chi_{A2} \end{bmatrix},$$

und die aus den Verschiebungsmatrizen der Teile b und d gebildete Spaltenmatrix $\tilde{\mathbf{a}}_{bd}$:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{bd} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_{b} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{d} \end{bmatrix}.$$

Die für die Verbindung der Teile b und d kennzeichnende Matrix $\mathbf{C}_{bd}$ in der Beziehung

$$\tilde{\mathbf{a}}_{bd} = \mathbf{C}_{bd}\,\tilde{\mathbf{a}}_{obd}$$

nimmt z. B. die Form an:

$$\mathbf{C}_{bd} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Bei der Verbindung der Teile c und e nach Abb. 5b lauten die analogen Matrizen:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{oce}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_{ce}, \quad \mathbf{C}_{ce}:$$

und bei der Verbindung nach Abb. 5c der Teile a, b, f und c:

$$\tilde{\mathbf{a}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_{C1} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{C2} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{C3} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{C4} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{C5} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_a \\ \tilde{\mathbf{a}}_b \\ \tilde{\mathbf{a}}_f \\ \tilde{\mathbf{a}}_c \end{bmatrix}, \text{ ferner } \mathbf{C}.$$

Ferner seien die Amplitudenmatrix der versuchsmäßigen, sinusförmigen Erregung der Knotenpunkte A_1 und A_2 mit

$$\tilde{\mathbf{f}}_{obd},$$

die gleichartige Größe für die Knotenpunkte B_1 und B_2 mit

$$\tilde{\mathbf{f}}_{oce}$$

bezeichnet.

Nach den Ausführungen in Abschnitt 7 und der Gleichung (25) gelten beim Schwingungsversuch gemäß Abb. 5a

$$\mathbf{C}^*_{bd} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^{-1} & \\ & \mathbf{R}_d^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{bd} \tilde{\mathbf{a}}_{obd} = \tilde{\mathbf{f}}_{obd}, \tag{27}$$

und beim Schwingungsversuch gemäß Abb. 5b

$$\mathbf{C}^*_{ce} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^{-1} & \\ & \mathbf{R}_e^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{ce} \tilde{\mathbf{a}}_{oce} = \tilde{\mathbf{f}}_{oce}. \tag{28}$$

Bei der Verbindung gemäß Abb. 5c entspricht dem Schwingungsversuch mit den Knotenpunkten $C_1, \ldots, C_5$ dei Gleichung

$$\mathbf{C}^* \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a^{-1} & & & \\ & \mathbf{R}_b^{-1} & & \\ & & \mathbf{R}_f^{-1} & \\ & & & \mathbf{R}_c^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{a}}_0 = \tilde{\mathbf{f}}_0. \tag{29}$$

Nach den Ausgangsannahmen des Beispiels sind die Matrizen $\mathbf{C}_{bd}$, $\mathbf{C}_{ce}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}_a^{-1}$, $\mathbf{R}_d^{-1}$, $\mathbf{R}_e^{-1}$, $\mathbf{R}_f^{-1}$ von vornherein bekannt, ferner sind aus den durch-

geführten Versuchen auch die Matrizen

$$\mathbf{C}_{bd}^{*} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^{-1} & \\ & \mathbf{R}_d^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{bd} = \mathbf{A}_1 \tag{30}$$

und

$$\mathbf{C}_{ce}^{*} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_c^{-1} & \\ & \mathbf{R}_e^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{ce} = \mathbf{A}_2 \tag{31}$$

bekannt; gesucht werden die Matrizen $\mathbf{R}_b^{-1}$ und $\mathbf{R}_c^{-1}$, um für die Prüfung gewisser dynamischer Eigenschaften des Maschinensystems die Gleichung (29) verwenden zu können.

Im vorliegenden Falle sind $\mathbf{A}_1$ 9ter, $\mathbf{A}_2$ 8ter, $\mathbf{R}_b^{-1}$ 9ter, $\mathbf{R}_c^{-1}$ 8ter Ordnung. Das bedeutet, daß im vorliegenden Falle nach meßtechnischer Ermittlung der Elemente von $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ die Gleichungen gerade in der für die Bestimmung von $\mathbf{R}_b^{-1}$ und $\mathbf{R}_c^{-1}$ erforderlichen Anzahl zur Verfügung stehen.

Die Messungen und Berechnungen sind für die genügende Anzahl von ω-s im für die vorliegende Prüfung wichtigen Intervall ω durchzuführen und die vorstehenden Gleichungen müssen für jedes ω gelöst werden.

Zusammenfassung

Ein Maschinensatz bzw. ein zusammengesetztes dynamisches System im allgemeinen kann immer für aus einfacheren Teilen zusammengesetzt angesehen werden. Im Beitrag werden zwei Methoden dargelegt; nach der einen wird aus den dynamischen Matrix- (oder skalaren) Faktoren der einzelnen Teile auf den Faktor des Gesamtsystems geschlossen; nach der zweiten wird die Frequenzgleichung des Gesamtsystems aus den Frequenzgleichungen der Teile abgeleitet.

Es wird gezeigt, wie man die aus (9) oder (26) fehlenden Eigenkreisfrequenzen — wenn diese existieren — bestimmen kann.

An einem Anwendungsbeispiel wird gezeigt, wie aus den dynamischen Eigenschaften eines auf gesondertem Versuchsfundament geprüften Generatorrotors und eines auf einem anderen Versuchsfundament geprüften Turboläufers auf die dynamischen Eigenschaften eines Maschinensatzes, bestehend aus Turboläufer, Generatorrotor und einem dritten, dem Betriebsfundament, unter gemeinsamer Anwendung von Berechnungen und Messungen geschlossen werden kann.

Literatur

1. Kron, G.: Diakoptics, Macdonald 1963.
2. Hübner, E.: Eigenschwingungszahlen zusammengesetzter Schwingungssysteme, Ingenieur-Archiv **29**, 134—149 (1960).

Prof. Dr. Ádám Bosznay, 1502 Budapest, Postfach 91, Ungarn