

ERREICHBARE MESSGENAUIGKEIT PHOTOGRAPHIERTER ISOCHROMATENBILDER

Von

F. THAMM

Lehrstuhl für Technische Mechanik, Fakultät für Maschineningenieurwesen, Technische
Universität Budapest

(Eingegangen am 8. März, 1972)

Vorgelegt von Prof. Dr. Gy. BÉDA

In den letzten zwei Jahrzehnten hat die Spannungsoptik eine bemerkenswerte Verbreitung gefunden und kann bereits als bewährtes Hilfsmittel der ingenieurmäßigen Konstruktionsarbeit angesehen werden. Ihrer Verbreitung gemäß erscheinen laufend viele Veröffentlichungen, die über die Anwendung der Spannungsoptik bei der Lösung technischer Probleme berichten. Auch die Weiterentwicklung des Verfahrens wird in einer großen Anzahl von Arbeiten behandelt. Im Gegensatz dazu sind Veröffentlichungen selten, die sich mit der erreichbaren Meßgenauigkeit der Spannungsoptik beschäftigen. Der Grund hierfür dürfte hauptsächlich darin zu suchen sein, daß

a) die bei der Anwendung der Spannungsoptik auftretenden Meßfehler recht unterschiedlicher Natur sind (Meßtoleranzen des untersuchten Bauteiles, Maßstabfehler durch die Abweichung von der strengen Ähnlichkeit zwischen Modell und Hauptausführung, Bildfehler bei der Aufnahme des spannungsoptischen Bildes) und

b) die Meßgenauigkeit von der technischen Praxis im allgemeinen als ausreichend empfunden wird.

Durch die ungenügende Kenntnis der Meßfehler wird in Fällen, wo besonders hohe Ansprüche an die Meßgenauigkeit gestellt werden, der punktweisen Ermittlung der Isochromaten- und Isoklinenwerte mittels Kompensation gegenüber der direkten Auswertung von photographierten Isochromaten- und Isoklinenbildern der Vorzug gegeben. Da letztere wesentlich einfacher und müheloser durchgeführt werden kann als die punktweise Kompensation, sollte die Kompensation nur dann angewendet werden, wenn dadurch wesentliche Vorteile in der Meßgenauigkeit erreicht werden. Aus diesem Grunde soll nun untersucht werden, welche Meßfehler bei der direkten Auswertung gegenüber der Kompensation zu erwarten sind.

Im Falle der Durchleuchtung eines randeffekt- und fehlerfreien Modells, in dem der (verallgemeinerte) ebene Spannungszustand exakt verwirklicht werden konnte, ergibt die Kompensation bei genau senkrechter Durchleuchtung den unverzerrten Isochromaten- und Isoklinenwert; den Isochromatenwert

mit einer Genauigkeit von wenigstens $\pm 0,02$ Ordnungen und die Richtung der Hauptspannungen mit einer Genauigkeit von $\pm 2^\circ$. Werden vom gleichen Modell Lichtbilder angefertigt, dann erscheinen auf diesen Isochromaten und Isoklinen als Streifen endlicher Breite. Bei der Auswertung der Lichtbilder werden die den ganzzahligen Isochromatenordnungen entsprechenden »idealen« Isochromatenlinien als die »Mittellinien« der Isochromatenstreifen mehr oder weniger nach Augenmaß bestimmt.

Bei der Bestimmung des Verlaufes der »idealen« Isokline wird gleichermaßen verfahren. Die Genauigkeit der Spannungsoptik als schnell auswertbare Routineuntersuchung hängt demnach von der Genauigkeit dieser Prozedur ab. Da sowohl im Falle der Isoklinen wie der Isochromaten prinzipiell gleichermaßen verfahren wird, soll im folgenden nur das Auswertverfahren der Isochromaten untersucht werden.

Die Stellung der Mittellinie der Isochromaten

Die Breite der Isoklinen auf dem Lichtbild hängt von der Schwärzungsverteilung des Negativs bzw. des Positivs ab. Die Schwärzungsverteilung hängt von der Leuchtdichteverteilung des spannungsoptischen Bildes und der Schwärzungskurve der verwendeten Fotomaterialien ab [1]. Die Schwärzungsverteilung des spannungsoptischen Bildes ist eine stetige Funktion des Ortes, somit kann die »Breite« der Isochromate nur willkürlich definiert werden [2]. Da jedoch, besonders bei Benützung von hartarbeitenden Fotomaterialien, die Schwärzungsverteilung am »Rande« des Isochromatenstreifens steil abfällt, erscheint die Annahme eines gleichmäßig dunklen Isochromatenstreifens endlicher Breite als Grundlage für die nun folgenden Berechnungen gerechtfertigt zu sein. Da die Verteilung der Leuchtdichte des Isochromatenbildes bei Durchleuchtung im monochromatischen Licht im Falle gegebener Filter bekannter Lichtdurchlässigkeit nur von der, von der Doppelbrechung des Modells herührenden Phasenverschiebung abhängt, ist es sinnvoll, auch die Breite des Isochromatenstreifens als Funktion der Phasenverschiebung anzugeben. Wird die der idealen Isochromatenlinie zugeordnete (bei gekreuzter Polarisatorstellung ganzzahlige) Phasenverschiebung mit m_0 bezeichnet, dann bestreicht der photographierte Isochromatenstreifen alle Stellen, an denen die Phasenverschiebung m zwischen die Werte $m_0 - \Delta m$ und $m_0 + \Delta m$ fällt. Auf Grund der Analyse der Leuchtdichteverteilung des spannungsoptischen Bildes und der Schwärzungskurve der üblicherweise verwendeten Photomaterialien kann $\Delta m = 0,1$ angenommen werden [2].

Die Isochromate erscheint demnach auf dem Lichtbild als Streifen der Bandbreite $2\Delta m$. Die zu m_0 gehörende »ideale« Isochromate wird, wenn die Auswertung möglichst einfach durchgeführt werden soll, als die Mittellinie

dieses Streifens bestimmt. Es soll nun untersucht werden, welche Auswertfehler diese Prozedur bedeutet.

Im Verlauf der Auswertung des Spannungszustandes wird die Verteilung von m bzw. der Hauptspannungsdifferenz $\sigma_1 - \sigma_2$ üblicherweise längs gewisser in der Modellebene liegender Geraden aufgezeichnet. Zu diesem Zweck werden über die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Mittellinien der einzelnen Isochromatenstreifen die m_0 -Werte der betreffenden idealen Isochromatenlinien als Ordinate aufgetragen. Diese Konstruktion wird in der Abb. 1 für die x -

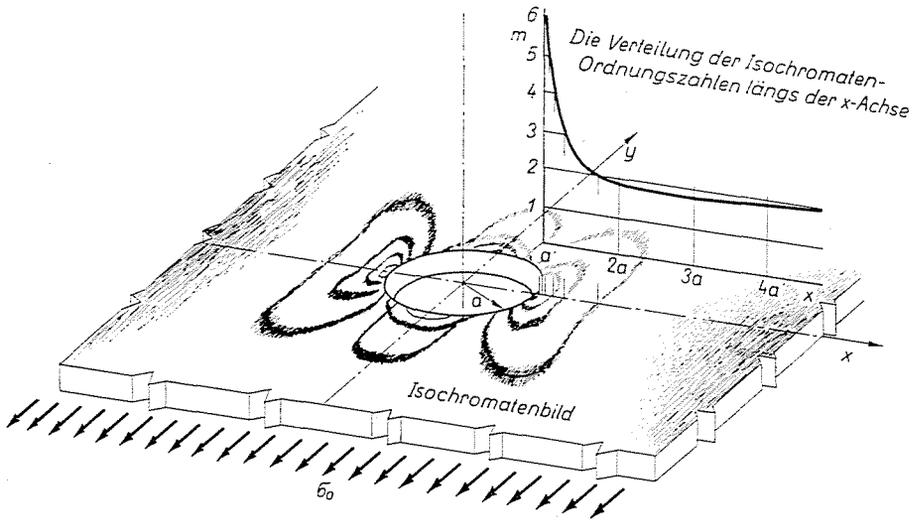


Abb. 1. Die Ermittlung der $m(x)$ -Verteilung aus dem Isochromatenbild im Falle der auf reinen Zug beanspruchten, durch einen kreisförmigen Ausschnitt geschwächten unendlichen Scheibe

Achse einer auf einachsigen Zug beanspruchten und durch eine Bohrung geschwächten Scheibe gezeigt.

Wären die Isochromaten Linien im mathematischen Sinne, dann würde dieses Verfahren den exakten Verlauf von $m = m(x)$ ergeben, soweit eine genügende Anzahl von Meßpunkten zur Verfügung stünde. Diese tatsächliche Verteilung von $m(x)$ verläuft in Abb. 2 über die Punkte A , D , C . Die zu der Ordnungszahl m_0 gehörende Isochromate füllt den Streifen zwischen den zu $m + \Delta m$ und $m - \Delta m$ gehörenden Werten $x_{m_0 + \Delta m}$ und $x_{m_0 - \Delta m}$ aus. Die Mittellinie dieses Streifens befindet sich an der Stelle

$$x_{m_0}^* = \frac{1}{2} [x_{m_0 + \Delta m} + x_{m_0 - \Delta m}], \quad (1)$$

somit in Punkt B der Abszisse $m = m_0$. Die Abweichung des Punktes B von dem auf der Sollkurve liegenden Punkt D beträgt

$$\overline{DB} = \Delta x = x_{m_0} - x_{m_0}^* = \frac{1}{2} [x_{m_0+\Delta m} - 2x_{m_0} + x_{m_0-\Delta m}]. \quad (2)$$

Die Umkehrfunktion $m(x)$ von $x(m)$ an der Stelle m_0 durch ihre Taylorsche Reihe ersetzt

$$x(m) = x_{m_0} + \frac{m - m_0}{1!} x'_{m_0} + \frac{(m - m_0)^2}{2!} x''_{m_0} + \frac{(m - m_0)^3}{3!} x'''_{m_0} + \dots \quad (3)$$

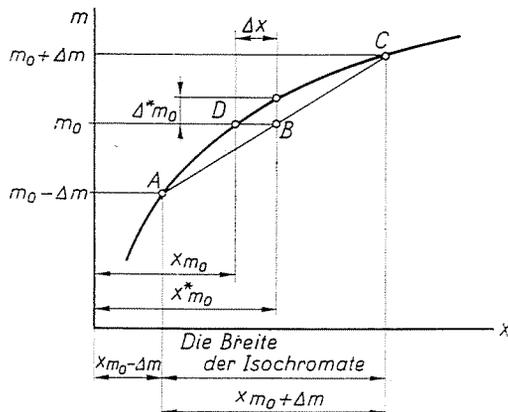


Abb. 2. Der bei der Festsetzung des Verlaufs der idealen Isochromate auf Grund der realen Isochromate endlicher Breite begangene Fehler Δx bzw. $\Delta^* m_0$

ergibt den Funktionswerte an den Stellen $m_0 + \Delta m$ und $m_0 - \Delta m$

$$x_{m_0+\Delta m} = x_{m_0} + \frac{\Delta m}{1!} x'_{m_0} + \frac{\Delta m^2}{2!} x''_{m_0} + \frac{\Delta m^3}{3!} x'''_{m_0} + \dots \quad (4a)$$

$$x_{m_0-\Delta m} = x_{m_0} - \frac{\Delta m}{1!} x'_{m_0} + \frac{\Delta m^2}{2!} x''_{m_0} - \frac{\Delta m^3}{3!} x'''_{m_0} + \dots \quad (4b)$$

Diese in Gl. (1) eingesetzt, ergibt

$$\Delta x = \frac{\Delta m^2}{2!} x''_{m_0} + \frac{\Delta m^4}{4!} x^{IV}_{m_0} + \dots \quad (5)$$

bzw. die Ableitungen ab der vierten Ordnung vernachlässigt, näherungsweise

$$\Delta x \approx \frac{\Delta m^2}{2!} x''_{m_0}. \quad (6)$$

Die zweite Ableitung einer Funktion $\varrho(q)$ kann, wie bekannt [3], durch ihre Umkehrfunktion $q(\varrho)$ folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\varrho''(q) = - \frac{\varphi''(\varrho)}{[\varphi'(\varrho)]^3}. \quad (7a)$$

Gl. (7a) auf die Funktion $x(m)$ angewendet und in (6) eingesetzt, ergibt

$$\Delta x \approx - \frac{\Delta m^2}{2!} \frac{\Delta m''(x)}{[m'(x)]^3}. \quad (7)$$

Der Fehler $\Delta^* m_0$ bei der Ablesung von m_0 an der Stelle x_{m_0} beträgt angenähert

$$\Delta^* m_0 \approx - \Delta x m'_0(x) \approx \frac{\Delta m^2}{2!} \frac{m''_0(x)}{[m'_0(x)]^2} \quad (8)$$

und der auf den Isochromatenwert m bezogene Fehler

$$\frac{\Delta^* m_0}{m_0} \approx \frac{\Delta m^2}{2!} \frac{m''_0(x)}{m_0 [m'_0(x)]^2}. \quad (9)$$

Wie bereits erwähnt, ist m_0 der Isochromatenwert entlang einer idealen Isochromatenlinie, ist also bei gekreuzter Polarisatorstellung eine ganze Zahl, hat bzw. bei paralleler Polarisatorstellung den Wert $\frac{2n+1}{2}$ (n : ganze Zahl). Da durch die Änderung der Belastungshöhe auf jeden Punkt der Modellfläche ein ganzzahliger Isochromatenwert eingestellt werden kann, soll in folgendem $m_0(x)$ einstweilen als eine stetige Funktion angesehen werden, die mit $m(x)$ gleichgesetzt werden kann.

Gl. (9) ergibt an Stellen des Extremwertes von m_0 wegen $m'_0(x) = 0$ einen unendlich großen Wert. Dieser Wert hat keinen physikalischen Sinn, da an dieser Stelle auch Gl. (1) ihren physikalischen Sinn verliert. Für $m''_0(x) > 0$ hat nämlich $m_0 - \Delta m$ (Abb. 3), für $m''_0(x) < 0$ $m_0 + \Delta m$ keinen reellen Wert, und so kann auch $x_{m_0 + \Delta m}$ bzw. $x_{m_0 - \Delta m}$ nicht angegeben werden. Wenn für den Extremwert an der Stelle $x = x_e$ im Falle $m''_0(x_e) > 0$ die Bezeichnung $m_e = m_0(x_e) = m_{0 \min}$, im Falle $m''_0(x_e) < 0$ die Bezeichnung $m_e = m_0(x_e) = m_{0 \max}$ eingeführt wird, kann der Gültigkeitsbereich für die »abgelesene« Funktion $m_0^*(x)$ durch die Abszissen $m_{0 \min} + \Delta m$ bzw. $m_{0 \max} - \Delta m$ begrenzt werden. Diese sind in die Abb. 3 eingezeichnet worden. Schwierigkeiten bei der Festsetzung des Gültigkeitsbereiches von $m_0^*(x)$ können wohl nur dann auftreten, wenn $m_0(x)$ dicht beieinander zwei Extremwerte mit entgegengesetztem Sinn ($m_{0 \max}$ und $m_{0 \min}$) besitzt, und wenn $m_{0 \max} - m_{0 \min} < \Delta m$ ist. In

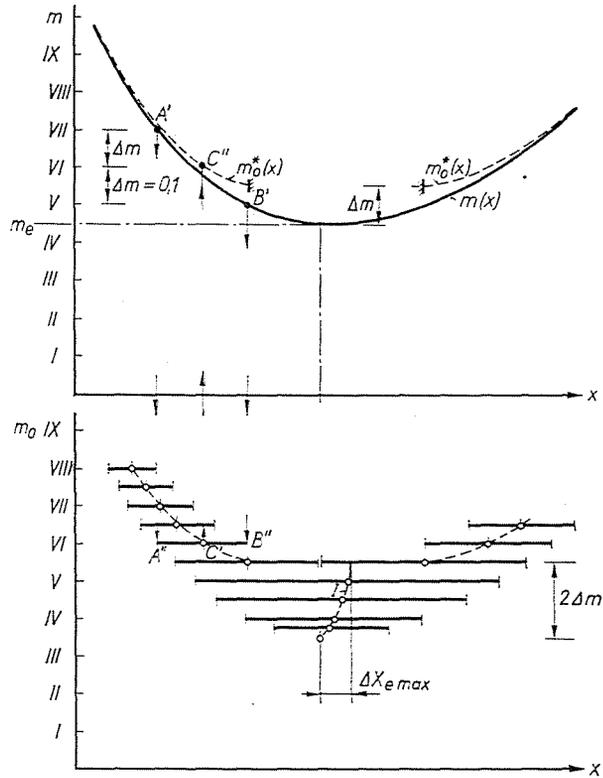


Abb. 3. Oben: Voll ausgezogen: $m(x)$ -Verteilung (tatsächliche Isochromatenverteilung) und die daraus für $\Delta m = 0,1$ ermittelte scheinbare Isochromatenverteilung $m_0^*(x)$, die sich im Falle der Auswertung auf Grund des realen Isochromatenbildes ergeben würde. In der Umgebung des Minimums von $m(x)$ ist $m_0^*(x)$ nicht definierbar. Unten: Die Isochromatenbreite für verschiedene m_0 -Werte. In der Umgebung $m_e + \Delta m$ des Minimums von $m(x)$ liegt die Mittellinie der Isochromate nicht auf der Kurve $m_0^*(x)$, sondern auf der davon unabhängigen Kurve I

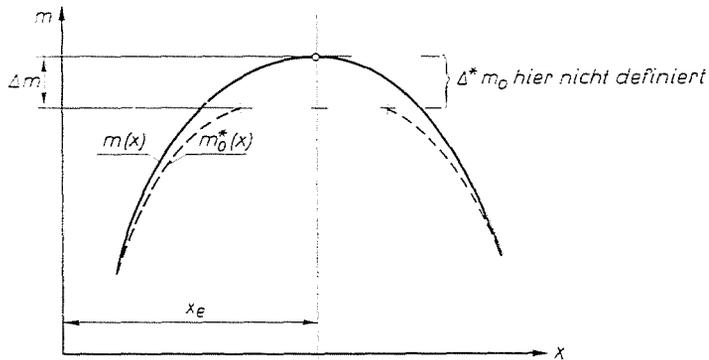


Abb. 4. Der nicht definierbare Bereich der Verteilung $m_0^*(x)$ in der Umgebung des Maximums der Verteilung $m(x)$

diesem Falle hängen die zu den beiden Extremwerten gehörenden nicht definierbaren Bereiche der Funktion $m_0^*(x)$ zusammen, wie dies aus Abb. 5 ersichtlich ist.

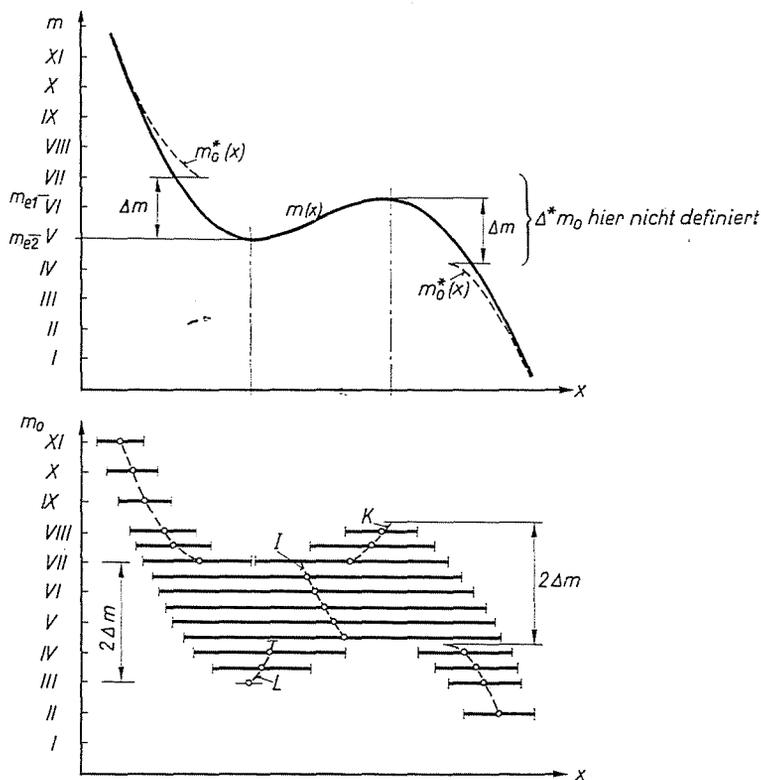


Abb. 5. Der Einfluß zweier benachbarter Extremwerte der $m(x)$ -Verteilung auf den Gültigkeitsbereich von $m_0^*(x)$ und die auftretenden Isochromatenbreiten. Außerhalb des Gültigkeitsbereiches von $m_0^*(x)$ liegen die Mittelpunkte der Isochromatenbreiten auf drei voneinander unabhängigen Kurven (J, K, L)

Die bei der Auswertung des Isochromatenbildes auftretende Funktion $m_0^*(x)$ der Verteilung der Isochromatenwerte kann in ihrem Gültigkeitsbereich auf Grund der Gl. (8) und (9) folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 m_0^*(x) &= m_0(x) + \Delta^* m_0(x) = m_0(x) \left[1 + \frac{\Delta^* m_0}{m_0} \right] \\
 &= m_0(x) \left[1 + \frac{\Delta m^2}{2!} \frac{m''_{m_0}(x)}{m_0 [m'_0(x)]^2} \right].
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Diese Verteilung kann im Falle von bekanntem $m_0(x)$ und Δm bei Benützung der in Abb. 2 gezeigten geometrischen Zusammenhänge punktweise konstruiert werden. Ihr Verlauf ist in die Abb. 3, 4 und 5 gestrichelt eingezeichnet worden.

In dem Gültigkeitsbereich der Gl. (7)–(10) konnte $m_0(x)$ als stetige Funktion definiert werden, da zwischen $m_0^*(x)$ und $m_0(x)$ für beliebige Werte von m_0 ein eindeutiger Zusammenhang besteht. Außerhalb des Gültigkeitsbereiches, also in der Umgebung der Extremwerte, ist dieser Zusammenhang nicht mehr eindeutig, indem die Abweichung der durch die Auswertung des

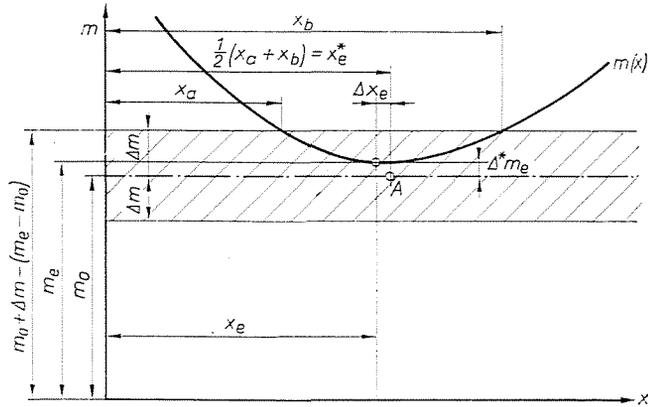


Abb. 6. Der scheinbare Ort $A[x_e^*; m_e]$ des Extremwertes $m = m_e$ der Isochromatenverteilung bei der Auswertung des realen Isochromatenbildes, wenn $m_e \neq m_0$ ist

Isochromatenbildes erhaltenen Meßwerte $m_0^*(x)$ von der wirklichen Verteilung $m(x)$ von der zufälligen Lage des dem Extremwert benachbarten ganz- bzw. halbzahligen Isochromatenwertes m_0 gegenüber dem Isochromatenwert m_e an der Stelle des Extremwertes abhängt.

Die Verhältnisse werden in Abb. 6 veranschaulicht. Dem w. o. Dargelegten entsprechend, wird die Strecke $x_b - x_a$ der x -Achse von einer dunklen Isochromatenlinie bedeckt. Die dazugehörigen Isochromatenwerte fallen in den zwischen $m_0 + \Delta m$ und $m_0 - \Delta m$ liegenden, in der Abb. 6 durch Schraffur hervorgehobenen Bereich $m_0 + \Delta m$ und $m_0 - \Delta m$. Die Mittellinie der Isochromate trifft die x -Achse in $\frac{1}{2}(x_a - x_b)$. Da diesem Punkt sinngemäß der Isochromatenwert m_0 zugeordnet wird, erscheint als Meßwert Punkt A . Dieser Punkt weicht von dem durch die Koordinaten $[x_e, m_e]$ festgelegten Ort des Extremwertes von $m(x)$ in Richtung der Abszisse um Δx_e , in Richtung der Ordinate m um $\Delta^* m_e = m_e - m_0$ ab. Wäre die Funktion $m(x)$ bekannt, würde sich, bei bekanntem m_0 , $\Delta^* m_e$ unmittelbar ergeben, die Werte von x_a und x_b

könnten aus der Bedingung

$$m(x_a) = m(x_b) = m_e + \Delta m - \Delta^* m_e \quad (11)$$

bestimmt werden. Aus der Umkehrfunktion $m(x)$ der Funktion $x(m)$ könnten x_a und x_b auf Grund der Gl. (11) berechnet werden, woraus sich auf Grund des Vorigen

$$\Delta x_e = x_e - \frac{x_a - x_b}{2} \quad (12)$$

ergäbe. Die Isochromatenbreite wurde im unteren Teil der Abb. 3 und 5 für verschiedene diskrete Werte von m_0 in Form gerader Strecken aufgezeichnet und deren Mittelpunkt markiert. Wie aus den Abbildungen ersichtlich, liegen diese Mittelpunkte im Gültigkeitsbereich der Gl. (7)–(10) auf der stetigen Kurve $m^*(x)$. In der Umgebung der Extremwerte können die Mittelpunkte der die Isochromatenbreite darstellenden Geradenstrecken ebenfalls durch eine bzw. im Falle der Abb. 5 durch mehrere getrennte Kurvenstrecken (J, K, L) verbunden werden, die sich jedoch nicht an die Kurve $m^*(x)$ anschließen.

Abb. 3 und 5 zeigen den Einfluß der endlichen Isochromatenbreite stark übertrieben. Die Konstruktion der Kurve $m^*(x)$ aus $m(x)$ entsprechend der Abb. 3 durch Projektion der Isochromatenbreite in die untere Abbildungshälfte $A'A''$ bzw. $B'B''$ und Rückprojektion des Mittelpunktes der Breite zum entsprechenden m -Wert (Linie $C'C''$) ist in der Praxis nur in besonders ungünstigen Fällen durchführbar. Aus diesem Grunde sind die an die Ordinaten der Abb. 3 und 5 angeschriebenen Zahlen keine wirklichen m_0 -Werte, sondern dienen nur zur Identifizierung zusammengehörender Ordinatenwerte des oberen und unteren Teils der Abbildung. Aus diesem Grunde wurden zu ihrer Bezeichnung römische Zahlen verwendet.

Im Falle tatsächlich ausgeführter Messungen tritt als Meßwert höchstens ein Punkt der Kurvenstrecken J, K, L der Abb. 3 und 5 auf.

Der Verlauf der Kurve $m(x)$ ist nicht bekannt, da sie ja erst durch die Messung bestimmt werden soll. So kann die Stelle A des Extremwertes (Abb. 6) in Ordinatenrichtung nur mit einer Unsicherheit von $\pm \Delta m$ angegeben werden. Es kann auch vorkommen, daß der Isochromatenwert m_e des Extremwertes außerhalb des Bereiches $m_0 + \Delta m$ des Isochromatenstreifens fällt. In diesem Fall kann der Ort des Extremwertes nur durch Extrapolation aus auf der Kurve $m(x)$ liegenden anderen Meßpunkten erhalten werden. Da jedoch durch eine geringfügige Änderung der Belastung des Modells m_e stets in den Bereich $m_0 + \Delta m$ gebracht werden kann, soll in folgendem zum Zweck einheitlicher Bewertung an den Stellen des Extremwertes stets mit einer Meßunsicherheit von $\pm \Delta m$ gerechnet werden.

Zahlenmäßige Auswertung der abgeleiteten Zusammenhänge

Im folgenden sollen der Wert der Abweichung Δ^*m_0 im Gültigkeitsbereich der Gl. (7)–(10) sowie die scheinbare Verschiebung Δx_e auch zahlenmäßig für Spannungszustände bestimmt werden, deren analytische Lösung bekannt ist. Die Berechnung ist für folgende Spannungszustände durchgeführt worden:

1. Unendliche, auf Zug beanspruchte Scheibe mit einem kreisförmigen Ausschnitt;
2. gekrümmter Träger konstanter Dicke, durch ein Biegemoment belastet;
3. gekrümmter Träger konstanter Dicke, längs eines Durchmessers durch die Kraft F belastet.

Die Zusammenhänge für die Spannungskomponenten sind in der Tabelle I zusammengefaßt. Tabelle II enthält die Differenz der Hauptspannungen σ_r und σ_θ längs der x -Achse, die mit d/S multipliziert (d : Modelldicke, S : spannungsoptische Konstante) die Verteilung der Isochromatenwerte ergibt. In der Tabelle II sind außerdem noch die Ableitung der Hauptspannungsdifferenz nach x und der Wert von Δ^*m_0 (gemäß Gl. (8)) angegeben. Zur Erleichterung

Tabelle I

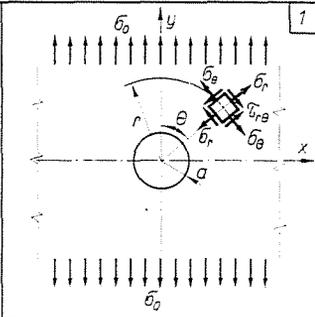
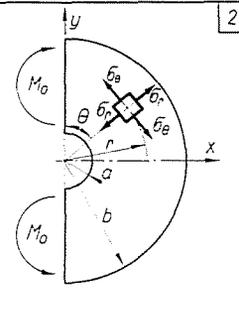
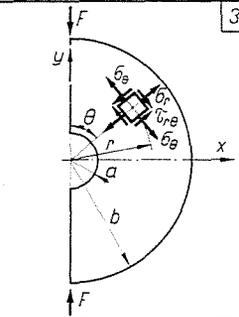
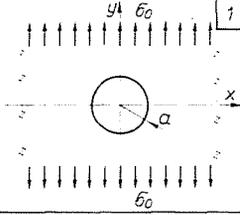
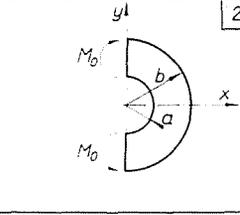
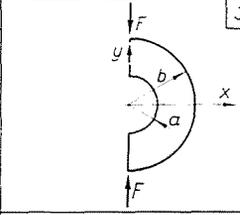
			
σ_θ	$\sigma_0 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta \right\}$	$\frac{4M}{N} \left[\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right]$	$\frac{F}{k} \left[3r - \frac{a^2 + b^2}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^3} \right] \sin \theta$
σ_r	$\sigma_0 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[1 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta \right\}$	$-\frac{4M}{N} \left[\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right]$	$\frac{F}{k} \left[r - \frac{a^2 + b^2}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^3} \right] \sin \theta$
τ_{re}	$\frac{\sigma_0}{2} \left[-1 - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] \sin 2\theta$	0	$-\frac{F}{k} \left[r - \frac{a^2 + b^2}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^3} \right] \cos \theta$
Die Konstante		$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2$	$k = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a}$
Nach	[4]	[5]	[5]

Tabelle II

				
$m_r(x) = \frac{d}{S}(\sigma_r - \sigma_\theta)$ $m(x) = m_r(x) $	$-\frac{d}{S} \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2 + 3 \left(\frac{a}{x}\right)^4 \right]$	$-\frac{d}{S} \frac{4M}{N} \left[2 \frac{a^2 b^2}{x^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2 \right]$ $N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}$	$\frac{d}{S} \frac{2F}{k} \left[\frac{a^2 b^2}{x^3} - x \right]$ $k = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a}$	
$m_r'(x)$	$-\frac{d}{S} \sigma_0 \left[2 \frac{a^2}{x^3} - 12 \frac{a^4}{x^5} \right]$	$\frac{d}{S} \frac{4M}{N} \frac{4a^2 b^2}{x^3} \ln \frac{b}{a}$	$\frac{d}{S} \frac{2F}{k} \left[-3 \frac{a^2 b^2}{x^4} - 1 \right]$	
$m_r''(x)$	$-\frac{d}{S} \sigma_0 \left[-6 \frac{a^2}{x^4} + 60 \frac{a^4}{x^6} \right]$	$-\frac{d}{S} \frac{4M}{N} \frac{12a^2 b^2}{x^4} \ln \frac{b}{a}$	$\frac{d}{S} \frac{2F}{k} \cdot 12 \frac{a^2 b^2}{x^5}$	
$\Delta^* m_0 = \frac{(\Delta m)^2}{2} \frac{m_r''(x)}{[m_r'(x)]^2}$	$+ \frac{3}{4} \frac{(\Delta m)^2}{S \sigma_0} \frac{x^4 [x^2 - 10a^2]}{a^2 [x^2 - 6a^2]^2}$	$-\frac{(\Delta m)^2}{2} \frac{3}{\frac{d}{S} \frac{4M}{N} \frac{4a^2 b^2}{x^2} \ln \frac{b}{a}}$	$\frac{(\Delta m)^2}{2} \frac{12 \frac{a^2 b^2}{x^5}}{2 \frac{d}{S} \frac{2F}{k} \frac{9a^4 b^4}{x^8} + 6 \frac{a^2 b^2}{x^4} + 1}$	
Mit den Bezeichnungen $\beta = \frac{b}{a}$ $f = \frac{x}{a}$	$\frac{m_r(x)}{m(a)}$	$-\frac{1}{3} \left[1 - f^{-2} + 3f^{-4} \right]$	$\frac{\frac{2}{f^2} (\ln \beta - 1) + \frac{1}{\beta^2}}{2 \ln \beta - 1 + \frac{1}{\beta^2}}$	$\frac{\beta^2 - f^4}{f^3 (\beta^2 - 1)}$
	$ \Delta^* m_0 $	$+ \frac{9}{4} \frac{(\Delta m)^2}{m(a)} \frac{f^4}{(f^2 - 6)^2}$	$\frac{(\Delta m)^2}{m(a)} \frac{3}{8} \frac{\left[2 \ln \beta - 1 + \frac{1}{\beta^2} \right]}{\ln \beta} \cdot f^2$	$\frac{(\Delta m)^2}{m(a)} \frac{6\beta^2 (\beta^2 - 1) f^3}{(3\beta^2 + f^4)^2}$

des Vergleiches sind in der Tabelle II noch die auf den Isochromatenwert an der Spannungsspitze bei $x = a$ bezogene Isochromatenverteilung und $\Delta^* m_0$ als Funktion der dimensionslosen Größen $\frac{x}{a} = \xi$ und $\frac{b}{a} = \beta$ eingetragen.

Zu 1. Die Isochromatenverteilung längs der die Spannungsspitze enthaltenden Achse x ist in der Abb. 7 aufgezichnet. Auf die Ordinate ist neben einer Skale $\frac{m}{m(a)}$ auch der auf $m_\infty = \frac{d}{S} \sigma_0$ bezogene Wert eingetragen. Hierbei ist m_∞ die Isochromatenordnung, die in einer unendlichen Scheibe ohne Bohrung unter der Einwirkung der Zugspannung σ_0 auftreten würde. Die Isochromatenverteilung hat bei $\xi = \xi_e = 2,44950$ einen Extremwert (Minimum) und strebt für große ξ -Werte asymptotisch dem Wert $m/m_\infty = 1$ zu. Der Isochromatenwert beträgt an der Stelle $\xi_e : m(\xi_e) = \frac{11}{12} m_\infty =$

$= \frac{11}{36} m(a)$. Die Grenze ξ_{h1} des Gültigkeitsbereiches der Gl. (7)–(9) ergibt sich auf Grund der Formel in Spalte 1 Zeile 5 der Tabelle II aus der Gleichung

$$m(\xi_{h1}) = \frac{m(a)}{3} [1 - \xi_{h1}^{-2} + 3 \xi_{h1}^{-4}] = \frac{11}{36} m(a) + \Delta m. \quad (13)$$

Diese Gleichung nach ξ_{h1}^2 aufgelöst, ergibt

$$[\xi_{h1}^2]_{1,2} = 6 \frac{1 \pm 6 \sqrt{\frac{\Delta m}{m(a)}}}{1 - 36 \frac{\Delta m}{m(a)}}. \quad (14)$$

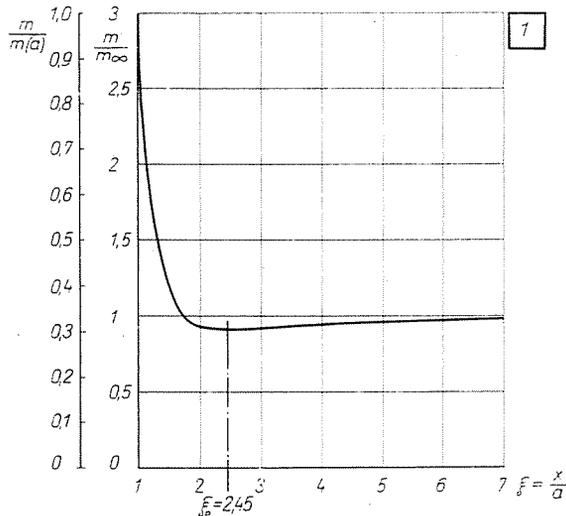


Abb. 7. Die Verteilung der Isochromatenwerte in einer auf reinen Zug beanspruchten Sechibe mit einer Bohrung mit dem Radius a , in der Symmetrieebene senkrecht auf die Zugrichtung

Durch die Asymptote bei steigenden ξ -Werten wird der Gültigkeitsbereich der Gl. (7)–(9) ebenfalls begrenzt. Die Begrenzung ξ_{h2} kann auf Grund der Gl. (15) berechnet werden.

$$m[\xi_{h2}] = \frac{m(a)}{3} [1 - \xi_{h2}^{-2} + 3 \xi_{h2}^{-4}] = \frac{1}{3} m(a) - \Delta m, \quad (15)$$

woraus sich

$$[\xi_{h2}]_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 36 \frac{\Delta m}{m(a)}}}{6 \frac{\Delta m}{m(a)}} \quad (16)$$

ergibt. Das negative Vorzeichen vor der Quadratwurzel hat keinen physikalischen Sinn, da sich daraus $\xi_{h_2} < \xi_e$ ergibt. Die Grenzen des Gültigkeitsbereiches, aus den Gl. (14) und (16) berechnet, sind in der Abb. 8 als Funktion von $\Delta m/m(a)$ bzw. $\Delta m/m_\infty$ aufgezeichnet worden.

Der Schnittpunkt *A* der Kurven für $[\xi_{h_1}]_1$ und $[\xi_{h_2}]_1$ ergibt jenen Wert von $\Delta m/m_\infty$, bei dem die zu ξ_e und $\xi = \infty$ gehörenden Grenzen des Gültigkeitsbereiches der Gl. (7) und (9) zusammentreffen. Der Verlauf von Δ^*m_0 gemäß

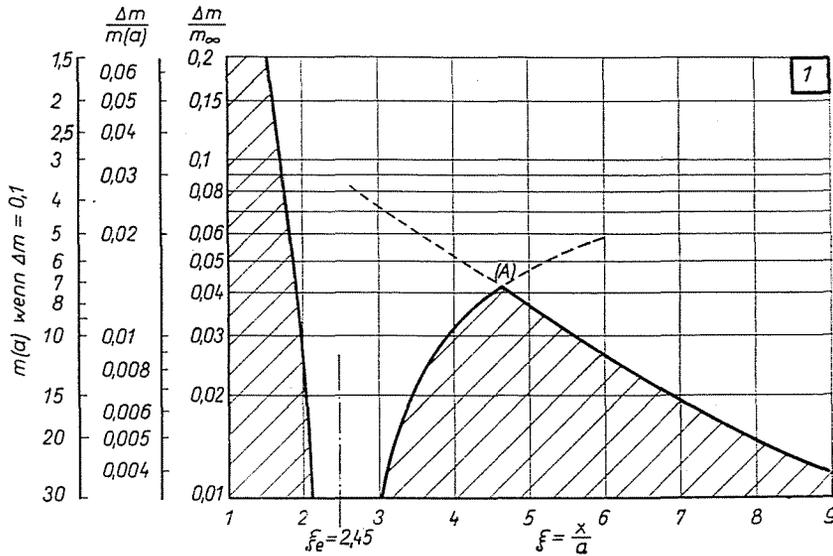


Abb. 8. Gültigkeitsbereich von $m_0^*(x)$ (gestrichelt) als Funktion von $\Delta m/m_\infty$, im Falle der Isochromatenverteilung in Abb. 7

Gl. (8) für $\Delta m = 0,1$ und $m(a) = 6, 10, 15$ wurde in Abb. 9 aufgezeichnet. In der Abbildung ist die durch Kompensation erreichbare Meßempfindlichkeit mit Δm_k bezeichnet.

Die Umkehrfunktion von $m = m(\xi)$ kann folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\xi^2 = \frac{6}{1 \pm \sqrt{\frac{m}{m(a)} - \frac{11}{36}}} \tag{17}$$

Die scheinbare Verschiebung des Ortes des Extremwertes in der x - (bzw. ξ -) Richtung kann mit Hilfe der Gl. (12) berechnet werden. Die Verschiebung erreicht ihren Größtwert, wenn gemäß der Gl. (11) $\Delta^*m_e = -\Delta m$ ist.

Dann ist nämlich

$$\frac{m}{m(a)} = \frac{m_e}{m(a)} + \frac{2\Delta m}{m(a)} = \frac{11}{36} + \frac{2\Delta m}{m(a)}$$

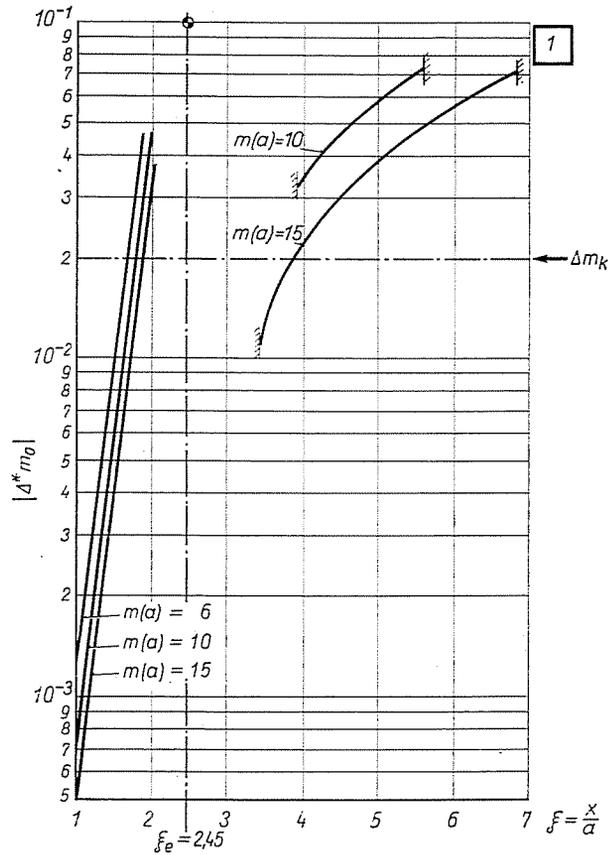


Abb. 9. Der absolute Wert des Auswertfehlers $\Delta^* m_0$ im Falle der Isochromatenverteilung in Abb. 7, Δm_k : die Empfindlichkeit der Kompensation

womit sich aus (17)

$$\xi_{a,b}^2 = \frac{6}{1 \pm \sqrt{\frac{2\Delta m}{m(a)}}} \quad (18)$$

ergibt. Daraus ergibt sich der zu $x_{e \max}$ gehörende Wert $\Delta \xi_{e \max}$ gemäß (12) zu

$$\Delta \xi_{e \max} = \xi_e - \frac{1}{2} [\xi_a + \xi_b] = \sqrt{6} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{2\Delta m}{m(a)}}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{2\Delta m}{m(a)}}}} \right) \right]. \quad (19)$$

Gl. (19) ergibt für $\frac{2\Delta m}{m(a)} = \frac{1}{30}$, was den Werten $\Delta m = 0,1$ und $m(a) = 6$ entspricht, $\Delta \xi_{e \max} = 0,03138$.

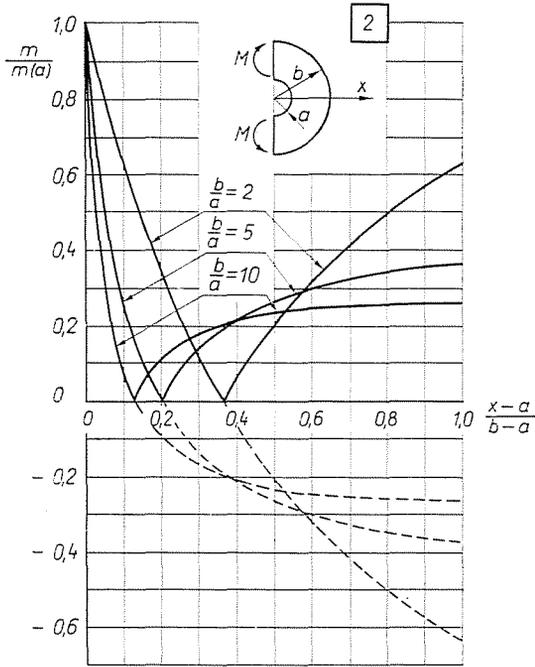


Abb. 10. Die Isochromatenverteilung im Falle eines auf reine Biegung beanspruchten gekrümmten Biegeträgers konstanter Dicke für verschiedene Werte von b/a

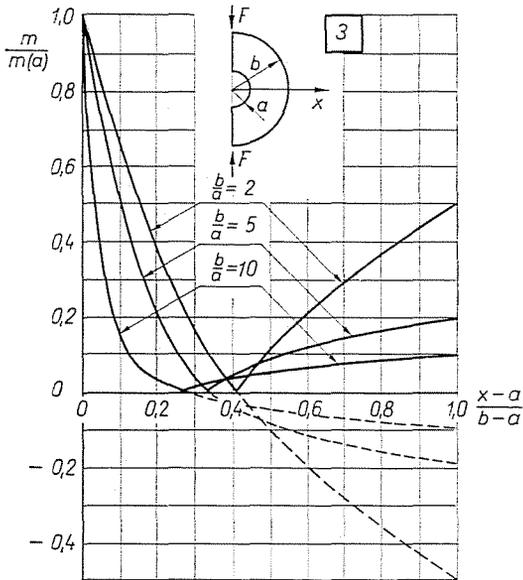


Abb. 11. Die Isochromatenverteilung im Falle eines längs eines Durchmessers durch die Kraft F belasteten gekrümmten Biegeträgers konstanter Dicke, für verschiedene Werte von b/a

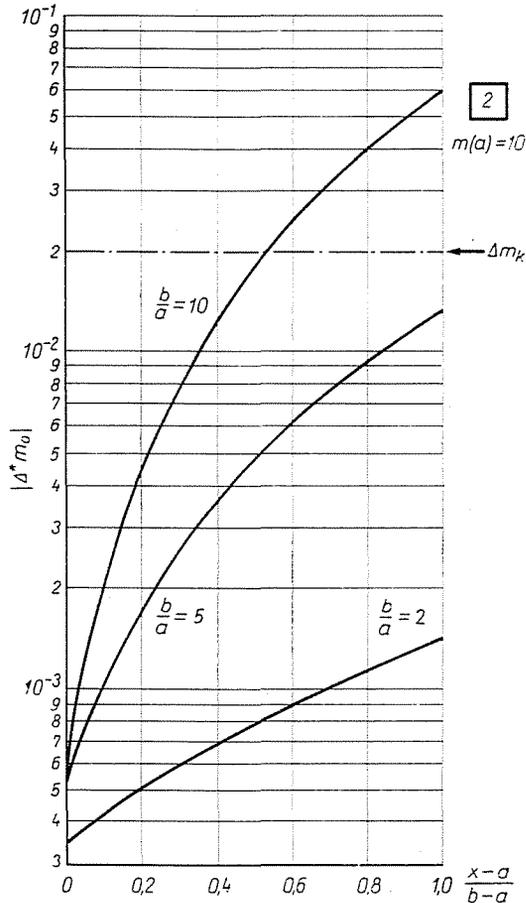


Abb. 12. Der absolute Wert des Auswertfehlers $\Delta^* m_0$ für die Isochromatenverteilung in Abb. 10 Δm_x : die Empfindlichkeit der Kompensation

Da in diesem Fall Gl. (18) $\xi_a = 2,2525$, $\xi_b = 2,7095$ ergibt, und gemäß den Vorigen $\xi_e = 2,4495$ ist, da außerdem, wie bereits eingangs erwähnt, die Isochromatenbreite wegen der sich stetig ändernden Schwärzungsverteilung nur willkürlich festgesetzt werden kann, darf gesagt werden, daß $\Delta \xi_e$ in die Größenordnung der Fehler bei der Messung von ξ_a und ξ_b fällt.

Zu 2., 3. Die Isochromatenverteilung weist in diesem Falle keinen Extremwert auf, so daß $\Delta^* m_0$ längs der ganzen Höhe des Trägers definiert ist. Es muß nur darauf geachtet werden, daß sich an der Stelle $m = 0$ die Reihenfolge der beiden Hauptspannungen umkehrt. Dies hat die Spiegelung von $m(x)$ an der Geraden $m = 0$ zur Folge, ohne daß $m'(x)$ den Wert Null annehmen würde.

Die auf den Isochromatenwert der Spannungsspitze bezogene Isochromatenverteilung längs der x -Achse ist für den Fall 2 in der Abb. 10, für den

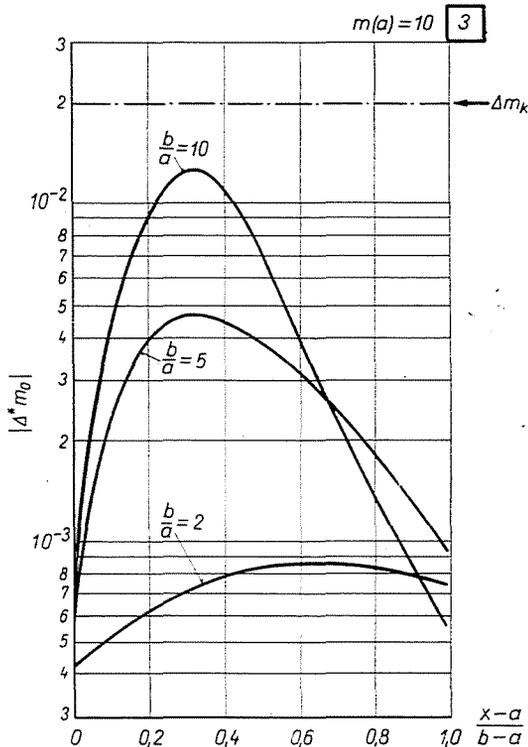


Abb. 13. Der absolute Wert des Auswertefehlers $\Delta^* m_0$ für die Isochromatenverteilung in Abb. 11 Δm_k ; die Empfindlichkeit der Kompensation

Fall 3 in der Abb. 11 aufgezeichnet. Wegen des Knickes von $m(x)$ an der Stelle $m = 0$ kann nur der absolute Wert von $\Delta^* m_0$ angegeben werden, der jedoch für beide Fälle eine stetige Kurve ist, wie sie in der Abb. 12 für den Fall 2, in der Abb. 13 für den Fall 3 gezeigt wird. In beide Abbildungen ist zum Vergleich die bei der Kompensation erreichbare Meßgenauigkeit Δm_k eingetragen.

Folgerungen

Bei der Auswertung von Isochromatenbildern aus ihren Lichtbildern verursacht die endliche Breite der Isochromaten einen systematischen Auswertfehler. Auf Grund der durchgeführten Berechnungen kann von diesem folgendes ausgesagt werden:

1. Die Auswertfehler sind in der Umgebung von an den Modellrändern auftretenden Spannungsspitzen vernachlässigbar klein. Sie sind dort wenigstens um eine Größenordnung kleiner als die Meßempfindlichkeit der Kompensation.
2. An Stellen kleiner Spannungsgefälle können die Auswertfehler die Meßempfindlichkeit der Kompensation übersteigen.

3. Extremwerte der Isochromatenverteilung innerhalb der Modellkonturen sind für die Auswertung »schwache Stellen« des Isochromatenbildes. Läuft eine Isochromate durch die Stelle eines Extremwertes, so kann der Extremwert nur mit einer, der Isochromatenbreite entsprechenden Genauigkeit von $\pm \Delta m$ angegeben werden. Läuft keine Isochromate durch die Stelle des Extremwertes, kann der Extremwert nur extrapoliert werden.

4. Durch geringfügige Änderung der Belastung des Modells oder durch Aufnahme von Isochromatenbildern nicht-ganzzahliger Isochromatenwerte nach der Methode von HUDEC [6] kann die Meßgenauigkeit nicht gesteigert werden, es können nur auf der mit dem gleichen Auswertfehler $\Delta^* m_0$ behafteten Kurve mehrere Meßpunkte erhalten werden. Auch kann die Meßgenauigkeit an den Stellen der Extremwerte der $m(x)$ -Verteilung nicht unter $\pm \Delta m$ gesenkt werden. Die Erhöhung der Meßgenauigkeit ist nur durch Erhöhung des durch die Isochromatenordnung $m(a)$ charakterisierten allgemeinen Isochromatenwertepiegels möglich. Dies kann a) durch starke Erhöhung der Modellbelastung und b) durch Anwendung interferometrischer Isochromatenvervielfachung [7, 8] erreicht werden.

Zusammenfassung

Die Isochromaten im spannungsoptischen Bild erscheinen als Streifen endlicher Breite, wobei die »ideale« Isochromate bei der Auswertung auf der Mittellinie dieses Streifens festgesetzt wird. Es wird untersucht, welche Auswertfehler bei dieser Prozedur entstehen. Auf Grund der geometrischen Zusammenhänge der Isochromatenverteilung konnte eine Formel zur Berechnung des Auswertfehlers abgeleitet werden, die für analytisch bekannte Spannungszustände ausgewertet wurde. Die Auswertung ergab, daß die auftretenden Fehler an Stellen von Spannungsspitzen verschwindend klein sind, in der Umgebung flacher Isochromatenverteilung jedoch die Empfindlichkeit der Kompensation übersteigen können. Die Verminderung der Auswertfehler ist durch Vergrößerung der Isochromatenwerte möglich, die ihrerseits durch Erhöhung der Modellbelastung oder interferometrische Isochromatenvervielfachung erfolgen kann.

Literatur

1. THAMM, F.—ÁGOSTON, GY.: Aufbau, Arbeitsweise und Fehlerquellen des Trajektorienzeichners für spannungsoptische Isoklinenaufnahmen. Z. f. Instrumentenkunde **72**, 63—71 (1964).
2. THAMM, F.: Die »Breite« der Isochromaten photographierter spannungsoptischer Bilder. Periodica Polytechnica (erscheint demnächst).
3. KIEPERT, L.: Differentialrechnung I. Helwingsche Verlagsbuchhandlung Hannover, 1921.
4. KIRSCH, G.: Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. VDI—Z. 1889. S. 797—807.
5. BEZUHOV, N. I.: Bevezetés a rugalmasságtanba és a képlékenységtanba (Einführung in die Elastizitäts- und Plastizitätstheorie). Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
6. HUDEC, M.: Precízno odredivanje fotoelastičnog efekta. Publikacije tehničkog fakulteta v Sarajevu, 1959.
7. MCNICHOLAS, J. B.: A Universal Instrument for Fringe Multiplication. Strain **6**, 48—54 (1970).
8. POST, D.: Isochromatic Fringe sharpening and Fringe Multiplication in Photoelasticity. Proc. S.E.S.A. **XII**, 2 (1955).

Dr. Frigyes THAMM, 1502 Budapest, Postfach 91. Ungarn