

## **EINIGE TRAGFÄHIGKEITS- UND FORMÄNDERUNGS- FRAGEN DER SPANNBETONSTÜTZE**

Von

**J. ALMÁSI**

Lehrstuhl für Stahlbetonkonstruktionen. Fakultät für Bauwesen,  
Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 15. April 1971.)

Vorgelegt von Prof. Dr. E. BÖLCSKEI

### **I. Einleitung**

Das Erscheinen des Spannbetons brachte eine Umwälzung in Theorie und Praxis der Stahlbetonkonstruktionen mit sich. Durch das Spannverfahren wurden zahlreiche Mängel des gewöhnlichen Stahlbetons beseitigt und eine Möglichkeit geschaffen, das Kräftespiel, den Deformationszustand und die Rißbildung günstig zu beeinflussen.

Das Spannverfahren bürgerte sich in den 30er bis 50er Jahren vor allem bei den auf Biegung beanspruchten Bauteilen (Balken, Platten) ein. Die ersten bedeutsamen Versuche wurden mit Spannbetonstützen Anfang der 1950er Jahre unternommen und sind seitdem in der ganzen Welt im Gange. Die vorhandenen Kenntnisse reichen jedoch bis jetzt nicht aus, um das Kräftespiel derartiger Bauteile mit hinreichender Sicherheit zu beurteilen.

Die stürmische Entwicklung der Bauindustrie, die Entstehung neuer Bauweisen erfordern jedoch mit zunehmender Dringlichkeit die Ausweitung der Kenntnisse hinsichtlich des Kräftespiels in Spannbetonstützen.

Dieses Problem stellt sich auch in provisorischen Belastungszuständen von Fertigteilen, wie sie beim Transport und bei der Montage auftreten, die von den Beanspruchungen im Betriebszustand ganz verschieden sind. Der Einsatz des Spannverfahrens ist dann gerechtfertigt, jedoch beeinflusst die auch im Betriebszustand wirksame Spannkraft auch die Tragfähigkeit der Druckstütze, z. B. bei den Stützen der nach dem Lift-slab-Verfahren montierten Bauten.

In der vorliegenden Arbeit möchten wir von den zahlreichen theoretischen und praktischen Fragen der Spannbetonstützen — wie die Wirkung von Vor- und Nachspannung, optimale Spannungsgröße, zweckmäßiger Zeitpunkt der Spannkrafteintragung, Bewehrungsanordnung, Kriechen usw. — vor

allem jene beantworten, wie die Tragfähigkeit bzw. die Formänderung der Stütze durch die Vorspannung beeinflusst wird.

## 2. Kurze Übersicht der Versuche mit Spannbetonstützen

Bei im Betriebszustand achsig belasteten Stahlbetonkonstruktionen wurde die Vorspannung zuerst (1953) von R. A. BRECKENRIDGE [1] eingesetzt. Seiner Feststellung gemäß werden die mittig angeordneten Spanndrähte, die in ihrer Gesamtlänge mit dem Beton in Berührung, jedoch mit diesem nicht verbunden sind, solange die überlagerte kritische Belastung nicht beeinflussen, bis der aus der Vorspannung auf den Beton fallende Druck ( $\sigma_{bf}$ ) die Differenz zwischen Betonbruchfestigkeit und kritischer Spannung nicht übersteigt.

P. CSONKA [2] untersuchte in einer 1955 erschienenen Arbeit »Heterogén anyagú feszített rudak kihajlása« (Knickung der Spannstäbe aus heterogenem Material) die Tragfähigkeit von mittig gespannten und belasteten Prüfkörpern, mit Hilfe der verallgemeinerten Engesser-Shanley-Formel. Nach seiner Feststellung wird durch die Vorspannung die Tragfähigkeit der Stützen vermindert.

P. Z. ZIA [3] und T. Y. LIN [4] sowie R. C. ITAYA veröffentlichten ihre Untersuchungsergebnisse 1957. P. Z. ZIA stellte auf rechnerischem Wege fest, daß durch die Vorspannung die Bruchlast der Stütze erhöht wird, wenn deren Biegsamkeit  $1/h > 25$ .

Die nach dem von T. Y. LIN und R. C. ITAYA vorgeschlagenen Berechnungsverfahren erhaltenen Bruchkraftwerte stimmen praktisch mit den experimentellen Werten gut überein.

K. J. BROWN [5] führte seine Versuche 1961 an einer großen Anzahl von Prüfkörpern durch. Die Versuchsstücke wurden mit Kräften verschiedener Größe und Außenmittigkeit gespannt. Brown stellte bei seinen Untersuchungen fest, daß im Falle von mittig belasteten und gespannten Stützen die Vorspannkraft als superponierte Kraft wirkte. Bei mit einer Außenmittigkeit  $e$  belasteten und mittig gespannten Bauteilen machten sich die Vorteile der Vorspannung bei einem Verhältnis  $\frac{e}{h} = \bar{e} \geq \frac{3}{7}$  geltend, ohne die Tragfähigkeit zu vermindern (dabei bedeuten  $e$  die Außenmittigkeit des Kraftangriffs,  $h$  die Querschnittsgröße in der Exzentrizitätsrichtung). Bei außenmittig vorgespannten Baugliedern nahm mit vergrößerter Vorspannung die Bruchkraft zu, die Wirksamkeit war bei schlanken Stützen höher.

A. S. HALL [6] führte in Australien Versuche mit Spannbetonstützen mit einer Biegsamkeit  $1/h = 33$  durch. Die Bauteile wurde in 5 Gruppen unterteilt, wobei der durch die Vorspannung im Beton erzeugte Druck  $\sigma_{bf} = 0, 50, 100, 150, 200 \text{ kg/cm}^2$  betrug. Die 28tägige Zylinderfestigkeit des Betons betrug  $\sigma_h = 330 \text{ kg/cm}^2$ . Innerhalb der einzelnen Gruppen hatte die

Lastexzentrizität Werte von: 0,0; 2,5; 6,3; 12,5; 37,5; 100 mm, was 0, 1/20, 1/8, 1/4, 3/4, 2  $\frac{e}{h} = \bar{e}$  entspricht.

Die Ergebnisse wurden in Abhängigkeit von der relativen Außenmittigkeit  $\frac{e}{h}$  mit den Parametern: bezogene Bruchkraft ( $P/bh \sigma_h$ ) und Eigenspannungsmaß ( $\sigma_{bf}/\sigma_h$ ) dargestellt (Abb. 1).

In der Sowjetunion wurde von W. W. MICHAJLOW [7] eine theoretische Forschungsarbeit im Bereich der Spannbetonstützen unternommen. Seiner Meinung nach läßt sich unter den Spannungszuständen während der Belastung — bei einiger Idealisierung — ein für den Augenblick der Rißbildung kennzeichnender Spannungszustand (Abb. 2) finden.

Die die Rißbildung herbeiführende Druckkraft ist in der Regel noch nicht für den Beginn der Zerstörung des Druckgliedes kennzeichnend. Die Zerstörung erfolgt erst bei weiterer Lasterhöhung bzw. Formänderung. Daher erachtet es Michailow für zweckmäßig, als Grenzstand für Spannbeton-Druckglieder den Spannungszustand bei der Rißbildung anzusetzen.

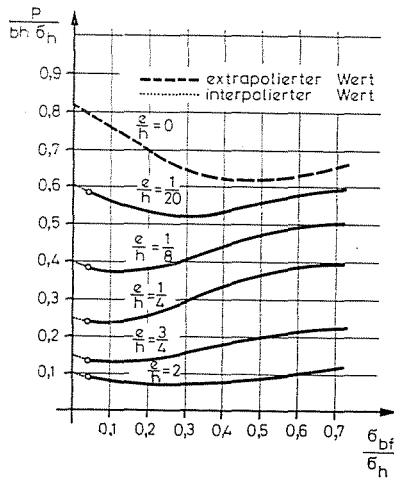


Abb. 1

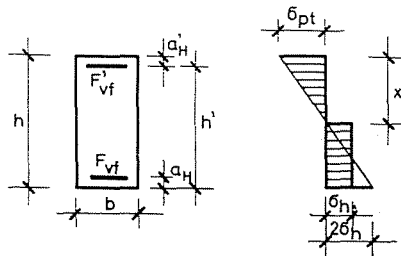


Abb. 2

In den Jahren 1963/65 wurden von T. PEZOLD [8] und A. A. SWETOW [9] unabhängig voneinander Versuche durchgeführt. Ersterer stellte fest, daß eine Tragfähigkeitszunahme lediglich bei Stützen mit einem Biegsamkeitsgrad  $l/h > 20$  zu verzeichnen sei.

Swetows Versuche zeigten, daß die frühzeitige Belastung (5 Tage nach der Einbringung des Betons) eine Zunahme von etwa 10% der Betonfestigkeit zur Folge habe. Bei gedrungenen Stützen nahm die Tragfähigkeit nicht zu, im Falle von schlanken Stützen war jedoch eine Zunahme zu verzeichnen.

S. ARONI [10] führte 1967 Untersuchungen über das Verhalten von Spannbetonstützen durch. Die untersuchten 36 Prüfkörper waren von Modellmaßstab und mittig gespannt. Die Anfangsaußenmittigkeit der Belastung war veränderlich.

Die auf die bisherigen Untersuchungen gegründeten Entwurfsvorschläge wurden in den USA veröffentlicht [11].

### 3. Versuchsergebnisse des Verfassers an Spannbetonstützen

Zweck der Untersuchungen war, die Kennwerte unter Belastung und die Tragfähigkeit der Spannbetonstütze zu ermitteln. Die Bauglieder waren gelenkig gelagert, Vorspannung und Belastung erfolgten mittig. Insgesamt wurden 24 Bauteile geprüft, darunter 6 schläffbewehrte. Die Schlankheit der Prüfkörper sowie der Vorspanngrad waren veränderlich. Die Spannkraft wurde im Alter von 4 Tagen aufgebracht, der Bruch erfolgte im Alter von 100 bis 120 Tagen.

Die Querschnittsabmessungen der Bauglieder betragen  $12 \times 12 \text{ cm} \pm \pm 2 \text{ mm}$ , bei Längen von 120, 240, 360 cm.

Für die Vorspannung wurden je 5 hochfeste Bewehrungsstähle  $\Delta 100 \text{ A } \varnothing 5 \text{ mm}$  bzw. je 13  $\varnothing 5 \text{ mm}$  benutzt. Als Anfangsspannkraft ( $P_f$ ) waren 11,5 Mp bzw. 28,8 Mp vorgesehen. Die Stützen mit schlaffer Bewehrung enthielten je 4 Bewehrungsstähle  $\varnothing 8 \text{ mm}$  aus Torstahl.

Die Nennwerte des Druckanteils auf den Beton aus der Vorspannung betragen 0, 80, 100 kg/cm<sup>2</sup>. Das Verhalten der Spanndrähte unter Belastung wurde mit Hilfe von auf diese aufgeklebten Dehnungsmeßstreifen mit 20 mm Bezugslänge verfolgt.

Es wurde ein Beton B 600 verwendet. Als Zuschlagstoff diente Donaukies sortierter Körnung. Als Bindemittel wurde Vácer Portlandzement C.600 verwendet, bei einem Wasser-Zement-Faktor 0,38.

Aus den Prüfungen wurden folgende Schlüsse gezogen:

— durch die Vorbelastung werden die mechanischen Eigenschaften des Betons in geringem Maße erhöht, nach den Versuchsergebnissen wird jedoch

dadurch die Tragkraft der schlanken Spannbetonstütze nicht wesentlich beeinflußt:

— die Vorspannung wirkt günstig auf die Tragkraft von mittig gespannten und belasteten Baugliedern im Falle von Stützen mit einer Biegsamkeit  $l/h > 26$  (Abb. 3). Eine ungünstigere Tragkraft ergibt sich bei mittiger Vorbelastung von Stützen mit einer geringeren Biegsamkeit;

— eine optimale zusätzliche Tragfähigkeit erhält man, wenn der Spannbewehrungsanteil zwischen 0,5 und 1,0% gewählt wird;

— bei mittiger Vorspannung hat das Stabilisierungsmoment einen verhältnismäßig geringen Wert, daher scheint es zweckmäßiger — wo es möglich ist — außenmittige Vorspannung anzuwenden. Die Spannkraftverlagerung zufolge der Querschnitts-Formänderungen und das daraus herrührende Stabilisierungsmoment spielen bei schlankeren Stützen eine größere Rolle.

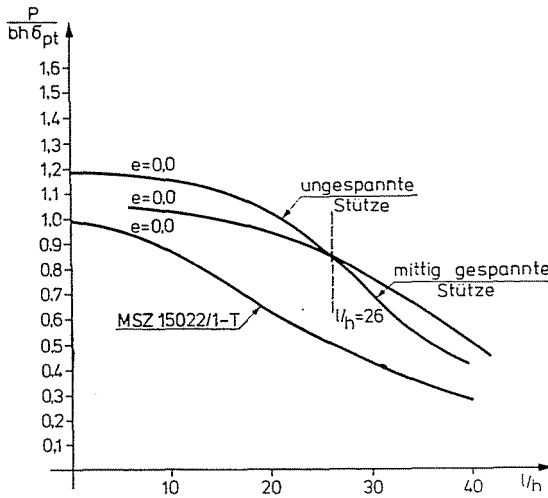


Abb. 3

#### 4. Theoretische Untersuchung der Tragfähigkeit von Spannbetonstützen

##### 4.1 Einleitung

Anhand der in der Fachliteratur vorliegenden theoretischen und experimentellen Angaben sowie der eigenen Versuchsergebnisse des Verfassers wurde die Tragfähigkeit der Spannbetonstütze auch theoretisch untersucht. Für die Ermittlung der Tragfähigkeit wurden benützt:

- der *Projektions-* und der *Momentensatz* des Querschnitts,
- die *Verschiebungsgleichung* der Stütze.

Durch die Auflösung dieser drei Gleichungen erhält man die Tragfähigkeit bzw. die Bruchlast der Stütze.

Die *Gleichgewichtsgleichungen* lassen sich in derselben Weise wie bei der Querschnittsprüfung der Stützen — die Spannkkräfte als innere Kräfte betrachtet — anschreiben.

Die *Verschiebungsfunktion* wird in der Regel in zweifacher Weise angegeben:

- der Rechenaufwand wird sehr vereinfacht, wenn die Verschiebung senkrecht zur Stützenachse als Cosinus- oder Sinuskurve angesetzt wird;
- anderenfalls wird für die höhere Genauigkeit die Verschiebungsform der Stütze durch stufenweise Näherung ermittelt.

Wir beschäftigen uns eingehender mit der Annahme der Verschiebungscosinusfunktion und mit dem Verfahren zur Bestimmung der Bruchlast auf dieser Grundlage. Die Methode wird auch in konkreten Fällen dargestellt. Aus dem Ergebnis ließen sich über den Wert des Außenmittigkeitszuwachses bei Spannbetonstützen sowie über die Wirkung der Vorspannung auf die Tragfähigkeit allgemeine Schlüsse ziehen.

#### 4.2 Ausgangsannahmen der Theorie

1. Während der Belastung gilt das Prinzip der ebenen Querschnitte (Bernoulli-Satz, Abb. 4).
2. Beton und schlaffe Bewehrung verhalten sich als ideal elastoplastische Stoffe (Abb. 5).
3. Die Bruchzusammendrückung des Betons wurde mit  $\varepsilon_{bt} = 2,1\%$  angesetzt.
4. Die Betonzugfestigkeit bleibt unberücksichtigt.
5. Spannbewehrungen werden nur bis zur Elastizitätsgrenze ausgenutzt.
6. Die senkrechte Achsialverschiebung des Stabes kann
  - a) mit der Cosinusfunktion oder

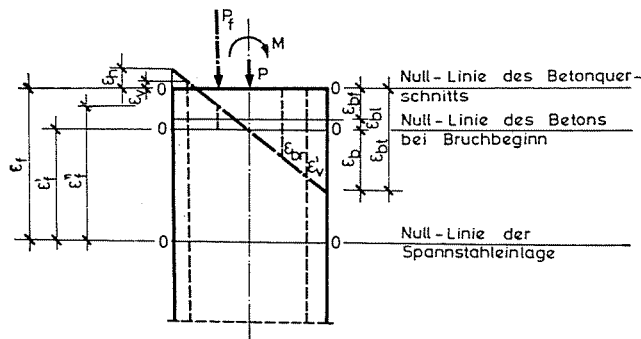


Abb. 4

b) mit stufenweiser Näherung angegeben werden.

7. Die Bruchbedingung der Stütze wird mit dem Kraft-Verschiebungsdiagramm angegeben wie folgt:

a) tritt während der Belastung im ansteigenden Zweig der Kraft-Verschiebungskurve in der Randfaser an der Druckseite die Bruchzusammendrückung ( $\epsilon_{bt}$ ) des Betons auf, so erfolgt der Bruch nach Abb. 6;

b) ist die Kraft-Verschiebungskurve vollkommen (Abb. 7) — es entstehen sowohl der stabile wie auch der instabile Abschnitt — so wird der indifferente Zustand als Bruch betrachtet, d. h.

$$\frac{dP}{dy} = 0.$$

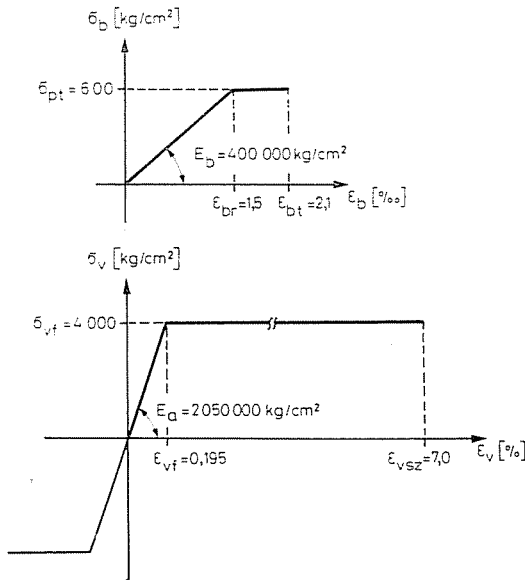


Abb. 5

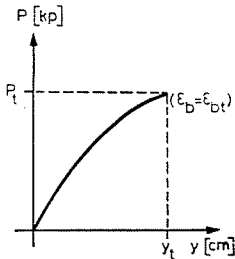


Abb. 6

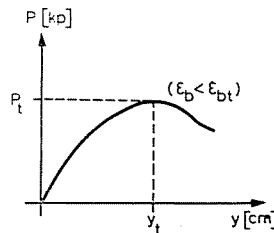


Abb. 7

### 4.3 Gleichgewichtsgleichungen

In Kenntnis der Formänderungs- und Festigkeitskennwerte des Querschnitts können die Gleichgewichtsgleichungen angeschrieben werden, u. zw.:  
 die Projektionsgleichung,  
 die Momentengleichung.

Dabei sind zu berücksichtigen:

- die Lage der Neutralachse:  $x > h$  ( $\xi > 1$ ) bzw.  $x < h$  ( $\xi < 1$ )
- die Spannungen in den Bewehrungsstählen der Zug- bzw. Druckseite:  $\sigma_v = \sigma_{vf}$  bzw.  $\sigma'_v = \sigma_{vf}$
- die Formänderung der Randfaser auf der Druckseite:  $0 < \varepsilon_b \leq \varepsilon_{br}$  oder  $\varepsilon_{br} < \varepsilon_b \leq \varepsilon_{bt}$ .

Anhand dieser Annahmen wird Abb. 8 gezeichnet, die die Formänderungs- und Spannungsdiagramme des Querschnitts enthält. Als Beispiel wurden die Gleichgewichtsgleichungen für den Fall in Abb. 8c angeschrieben, wo  $\varepsilon_v < \varepsilon_{vf}$  und  $\varepsilon'_v < \varepsilon_{vf}$  gelten. Die  $\varepsilon_v$ -Werte lassen sich aus dem Formänderungsdiagramm des Querschnitts ermitteln:

$$\varepsilon_v = \frac{\xi - 1 + \frac{u}{h}}{\beta\xi} \varepsilon_{br} \quad \varepsilon'_v = \frac{\xi - \frac{u'}{h}}{\beta\xi} \varepsilon_{br}.$$

Die Projektionsgleichung lautet:

$$P = N_{b1} + N_{b2} + N_{b3} + H + H' - P_f'',$$

$bh \sigma_{pt}$  ausgeklammert, läßt sich die Gleichung von den Querschnitts- und Festigkeitswerten des Betons unabhängig wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{P}{bh\sigma_{pt}} = & \frac{1}{2} \frac{\xi - 1}{\beta\xi} [1 - \xi(1 - \beta)] + \frac{1}{2} [1 - \xi(1 - \beta)] + \xi(1 - \beta) + \\ & + \frac{\mu}{\sigma_{pt}} \varepsilon_{br} E_v \frac{\xi - 1 + \frac{u}{h}}{\beta\xi} + \frac{\mu'}{\sigma_{pt}} \varepsilon_{br} E_v \frac{\xi - \frac{u'}{h}}{\beta\xi} - \\ & - \frac{\mu_f}{\sigma_{pt}} \left[ \sigma'_{vff} - E_{vf} \varepsilon_{br} \frac{\xi - 1 + \bar{c}}{\beta\xi} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

- wo
- $\sigma'_{vff} = \sigma_{vff} - \Delta\sigma'_{vf}$
  - $\sigma_{vff}$  die Anfangsspannung der Vorspannung,
  - $\Delta\sigma'_{vf}$  den Spannungsverlust bis zum Bruchbeginn bedeuten.
  - $E_{vf} \varepsilon_{br} \frac{\xi - 1 + \bar{c}}{\beta\xi} = \Delta\sigma''_{vf}$  ist die Spannungsänderung im Spanndraht von Beginn der Bruchprüfung bis zum Bruch.



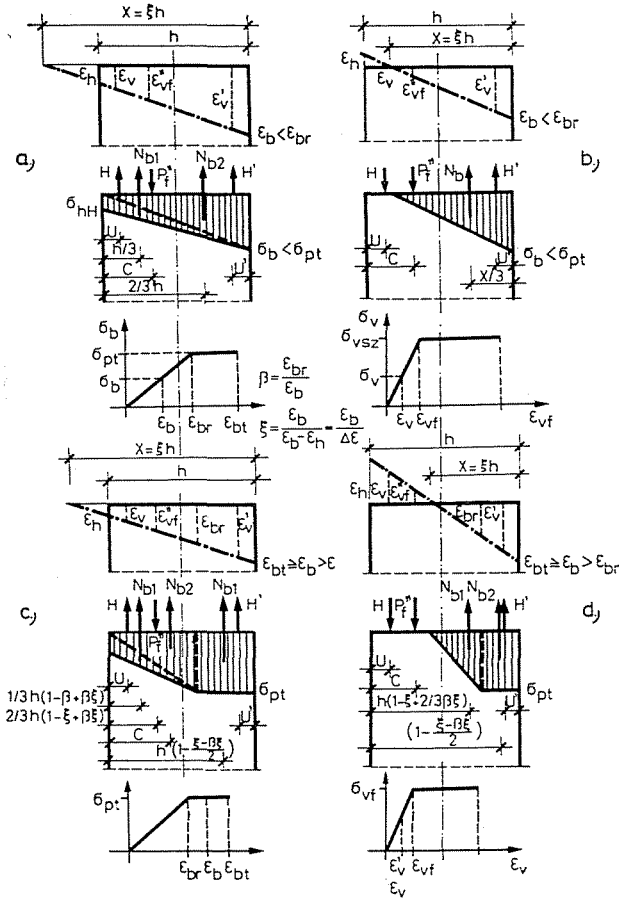


Abb. 8

Die Momentengleichung wird in der Form angeschrieben:

$$M = N_{b3}y_3 + H'y' - N_{b2}y_2 - N_{b1}y_1 - Hy + P_f'h \left( \frac{1}{2} - \bar{c} \right),$$

$bh^2\sigma_{pt}$  ausgeklammert, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{M}{bh^2\sigma_{pt}} &= \xi(1-\beta) \left[ 1 - \frac{\xi-\beta\xi}{2} - \frac{1}{2} \right] + \frac{\mu'}{\sigma_{pt}} \varepsilon_{br} E_v \frac{\xi - \frac{u'}{h}}{\beta\xi} \left( \frac{1}{2} - \frac{u'}{h} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} [1 - \xi(1-\beta)] \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3}(1-\xi+\beta\xi) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\xi-1}{\beta\xi} [1 - \xi(1-\beta)] \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(1-\xi+\beta\xi) \right] - \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\mu}{\sigma_{pt}} \varepsilon_{br} E_r \frac{\xi - 1 + \frac{u}{h}}{\beta \xi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{u}{h} \right] + \\
 & + \frac{\mu_f}{\sigma_{pt}} \left[ \sigma'_{vff} - E_{vf} \varepsilon_{br} \frac{\xi - 1 + \bar{c}}{\beta \xi} \right] \left( \frac{1}{2} - \bar{c} \right).
 \end{aligned}$$

4.4 Momenten-Krümmungslinie des Spannbetonquerschnitts und einige kennzeichnende Fälle

Im weiteren wird für die Beziehung zwischen den Gleichgewichts- und Verschiebungsgleichungen der Momenten-Krümmungszusammenhang notwendig sein.

Um die Wertpaare Moment-Krümmung zu ermitteln, müssen die Materialkennwerte, Querschnittskennwerte und die Normalkraft bekannt sein.

Als Ausgang wird eine mittig angreifende äußere Kraft gewählt, aus der sich in Kenntnis der Festigkeiten und geometrischen Daten die Zusammendrückung der Randfaser ermitteln läßt. Wird die Kraft außenmittig verlagert und die Außenmittigkeit verändert, erhält man jeweils eine andere Zusammendrückung der Randfaser. Aus der Formänderung der Randfaser können das innere Moment und die Krümmung errechnet werden. Aus praktischen Rücksichten läßt sich der Vorgang auch umkehren, indem gewisse Zusammendrückungen der Randfaser ( $\varepsilon_{bi}$ ) angesetzt und dazu sowie zur vorgegebenen äußeren Normalkraft die Gleichgewichtslage, die Formänderung an der Zugseite bzw. die Tiefe der Neutralachse gesucht werden (Abb. 9).

Nach den Formänderungs- und Spannungsdiagrammen in Abb. 8 werden die Gleichgewichtsgleichungen aufgeschrieben (Abschn. 4.3). Als Beispiel soll wieder der Fall in Abb. 8c angeführt werden. Dann ist, bei in der Projektions-

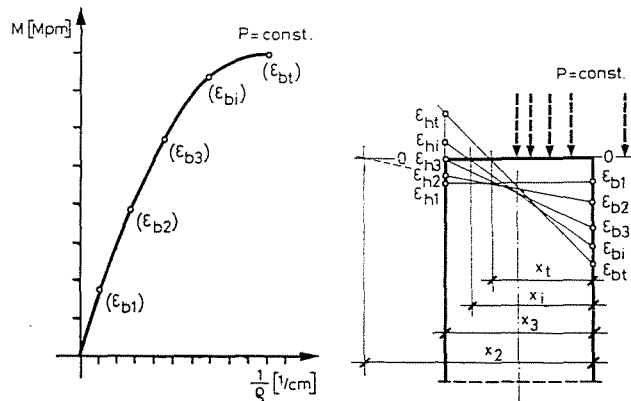


Abb. 9

gleichung (1) angegebenen Werten der äußeren Kraft, der Formänderung der druckseitigen Randfaser und Materialkennwerte,  $\xi$  die Unbekannte. Die Gleichung nach  $\xi$  geordnet, und die nächsten Schritte weggelassen, erhält man:

$$\begin{aligned}
 0 = & \xi^2 \left[ 1 - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2}\beta \right] + \xi \left[ \frac{1}{\beta} + \varepsilon_{br} E_v \frac{1}{\beta} \left( \frac{\mu}{\beta_{pt}} + \frac{\mu'}{\beta_{pt}} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{\mu_f}{\beta_{pt}} \left( \sigma_{vff} - E_{vf} \varepsilon_{br} \frac{1}{\beta} \right) - \frac{P}{bh\sigma_{pt}} \right] + \\
 & + \left[ -\frac{1}{2\beta} - \frac{\mu}{\sigma_{pt}} \varepsilon_{br} E_v \left( \frac{1}{\beta} - \frac{u}{h} \right) - \frac{\mu'}{\sigma_{pt}} \varepsilon_{br} E_v \frac{u'}{h} - \right. \\
 & \left. - \frac{\mu_f}{\sigma_{pt}} E_{vf} \varepsilon_{br} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{\bar{c}}{\beta} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten durch  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  bezeichnet, ergibt sich die Gleichung zweiten Grades

$$0 = \xi^2 c_1 + \xi c_2 + c_3.$$

Nach Auflösung der Gleichung läßt sich in Kenntnis von  $\xi$  die Dehnung der Randfaser an der Zugseite ( $\varepsilon_h$ ) berechnen:

$$\varepsilon_h = \frac{\varepsilon_b}{\xi} (\xi - 1).$$

Nun können zur vorgegebenen Kraft und zum vorkommenden Querschnitt (Abb. 8c) das dazugehörige Moment und die Krümmung ermittelt werden. Das Moment wird mit Hilfe der Gleichung (2) bestimmt.

Der vergrößerte Wert der Krümmung ist nach Abb. 10:

$$\frac{h}{\varrho} = \varepsilon_b - \varepsilon_h.$$

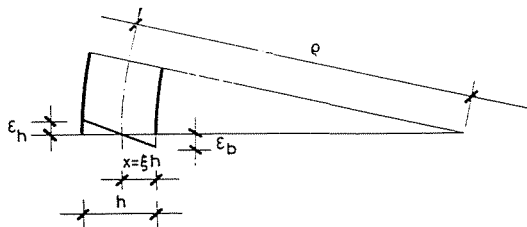


Abb. 10

Wird den vorigen Ausführungen gemäß vorgegangen, erhält man für jeden Fall  $\varepsilon_{bi}$  und  $P = \text{Konst.}$ , unter Berücksichtigung der Bedingungen die Momenten-Krümmungsdiagramme.

Im weiteren wird eines der bei den Materialgüten  $\sigma_{pt} = 600 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{ef} = 4000 \text{ kg/cm}^2$  und  $\sigma_{eff} = 11\,000 \text{ kg/cm}^2$  erhaltenen Diagramme erörtert (Abb. 11).

#### 4.5 Bestimmung der Bruchlast mit Hilfe der erhaltenen Verschiebungsform

Zur Bestimmung der Verschiebungsform werden die anhand von Abb. 8 angeschriebenen Gleichgewichtsgleichungen benutzt. Um die erforderlichen Faktoren zu ermitteln werden die Gleichungen (1) und (2) transformiert und anstatt  $\beta$  und  $\xi$  nach Abb. 8 folgende Werte eingesetzt:

$$\beta = \frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_b}, \quad \xi = \frac{\varepsilon_b}{\Delta\varepsilon}.$$

Von den erhaltenen Gleichgewichtsgleichungen läßt sich feststellen, daß sie vier voneinander unabhängige Veränderliche enthalten:  $P$ ,  $y$ ,  $\varepsilon_b$  und  $\Delta\varepsilon$ . Symbolisch schreibt man:

$$f_1(P, \varepsilon_b, \Delta\varepsilon) = 0,$$

$$f_2(P, y, \varepsilon_b, \Delta\varepsilon) = 0.$$

Unter Angabe zweier Parameter — die die Randbedingungen befriedigen — können die Gleichungen aufgelöst werden. Die Randbedingungen lauten:

— in der Stützenmitte ist die Tangente parallel zur ursprünglichen

Achse: an der Stelle  $x = 0$  gilt  $\frac{dy}{dx} = 0$ ;

— am Stützenende ist die Verschiebung gleich Null (Abb. 12): an der Stelle  $x = \frac{L}{2}$  gelten  $y = 0$  (mittige Belastung) bzw.  $y = e$  (außenmittige Belastung).

Die beiden Parameter werden zweckmäßigerweise durch Probieren angegeben. In Kenntnis der durch die Auflösung der Gleichgewichtsgleichungen erhaltenen Werte läßt sich die Form nach der Verschiebung ermitteln. Es ist zweckmäßig, die Berechnung in folgender Weise vorzunehmen.

Die Stütze wird in Elemente der Größe  $\Delta l$  aufgelöst und es wird angenommen, daß längs eines Abschnitts  $\Delta l$  der Krümmungswert ständig sei (Abb. 13).

Die Berechnung wird beim 1. Knotenpunkt begonnen, indem ein  $y_1$ -Wert (einer der Parameter) angenommen wird. Es verbleiben noch in den

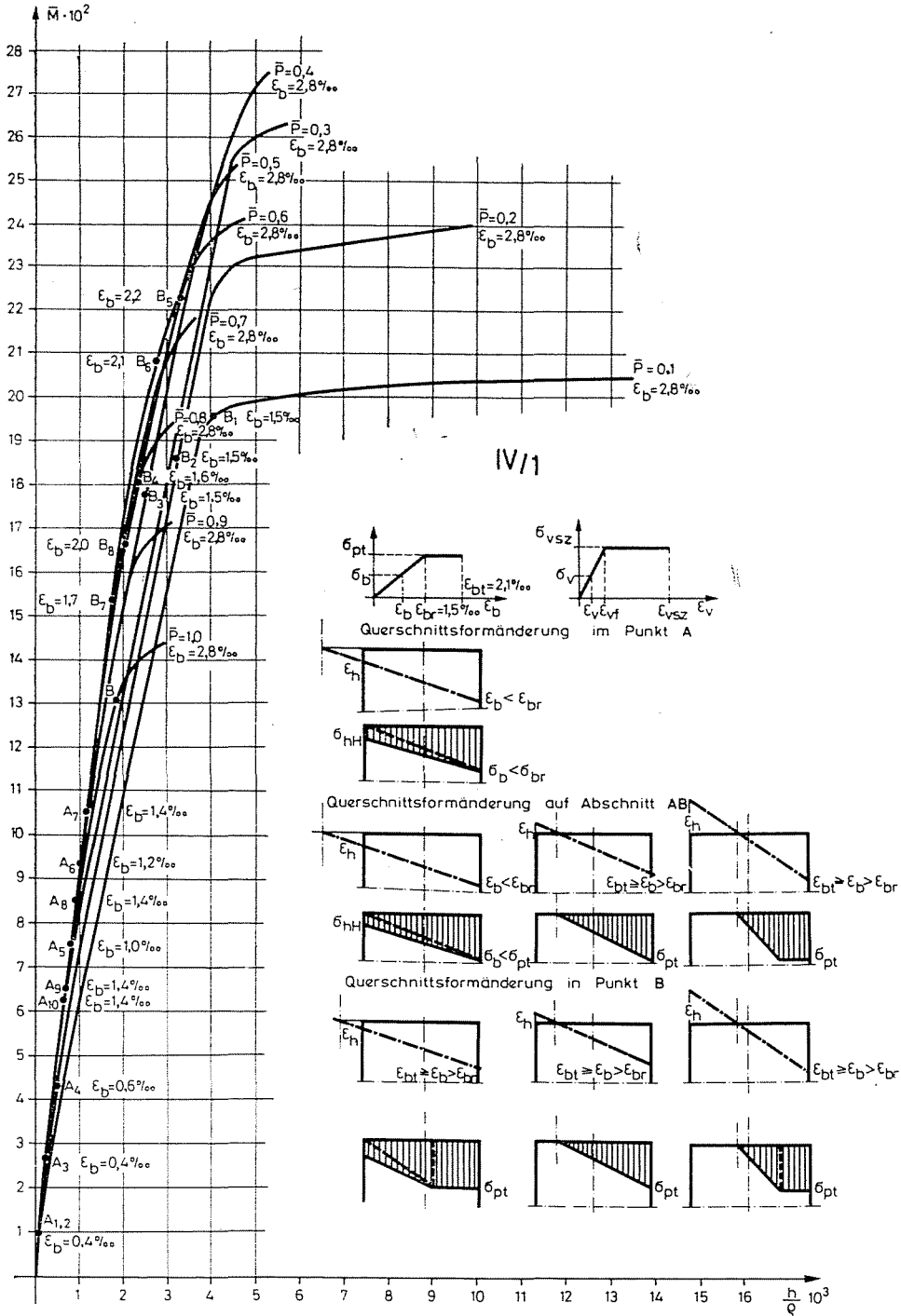


Abb. 11

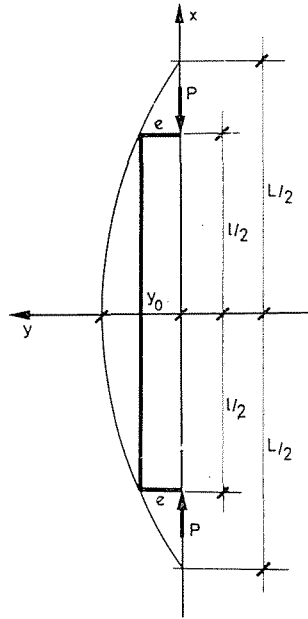


Abb. 12

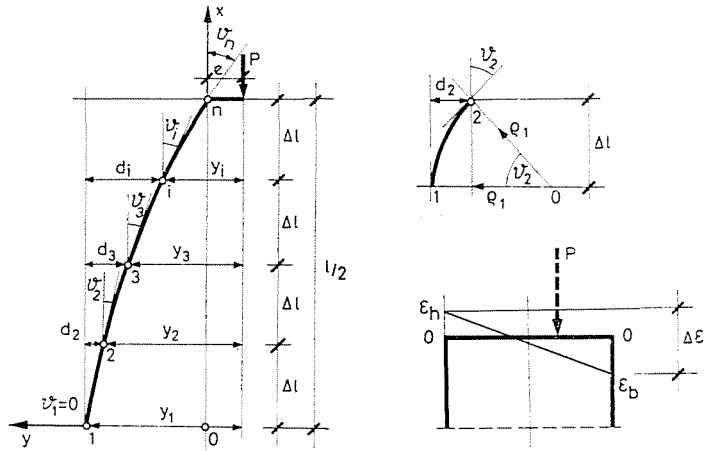


Abb. 13

für den 1. Knotenpunkt angeschriebenen beiden Gleichgewichtsgleichungen drei Unbekannte. Es wird noch ein Wert  $\Delta \varepsilon_1$  (der andere Parameter) angesetzt. Nun lassen sich bereits die Gleichungen auflösen und die Unbekannten  $P$  und  $\varepsilon_b$  bestimmen. Die Lösung ist oft nicht einfach, da es sich um ein Gleichungssystem dritten Grades mit zwei Unbekannten handelt. In Kenntnis

von  $P$  und  $\varepsilon_b$  wird die Lage des 2. Knotenpunktes wie folgt bestimmt.

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\Delta\varepsilon_1}{h}; \quad \vartheta_2 = \frac{\Delta l}{\varrho_1}; \quad d_2 = \frac{\Delta l^2}{2\varrho_1}.$$

Beim 2. Knotenpunkt gilt  $y_2 = y_1 - d_2$  (der eine Parameter). Bei den weiteren Knotenpunkten wird  $P$  konstant gehalten (der andere Parameter), und es werden die Werte  $\varepsilon_b$  und  $\Delta\varepsilon$  aus dem Gleichungssystemen (1) und (2) ermittelt.

Für einen allgemeinen Knotenpunkt gelten

$$d_i = d_{i-1} + \Delta l \cdot \vartheta_{i-1} + \frac{\Delta l^2}{2\varrho_{i-1}}; \quad \frac{1}{\varrho_{i-1}} = \frac{\Delta\varepsilon_{i-1}}{h}; \quad \vartheta_i = \vartheta_{i-1} + \frac{\Delta l}{\varrho_{i-1}}.$$

Dieses Rechenverfahren wird bis zum letzten Knotenpunkt fortgesetzt und es wird die Randbedingung  $d_n = y_1$ , d. h.  $y_1 - d_n = y_n = 0$  bzw.  $y_1 - d_n = y_n = e$  überprüft (je nach dem, ob die Stütze mittig oder außenmittig belastet ist). Ist diese befriedigt, gehört zu den für den 1. Knotenpunkt angesetzten  $y_1$  und  $\Delta\varepsilon_1$ -Werten tatsächlich  $P_1$ ;  $P_1$  und  $y_1$  bilden also ein zusammengehörendes Wertpaar. Gilt das nicht, so müssen die für den 1. Knotenpunkt angesetzten Ausgangswerte ( $y_1$  und  $\Delta\varepsilon_1$ ) geändert und das Verfahren wiederholt werden.

Aus der Berechnung können so die Kraft- $(P_1)$ -Verschiebungs- $(y_1)$ -Kurve des Mittelquerschnitts der Stütze und anhand der Bedingung 7 in Abschnitt 4.2 die Bruchkraft ermittelt werden (Abb. 14). In der Abbildung bedeuten:

- $y_{1i}$  — den beim  $i$ -ten Verfahren erhaltenen  $y_1$ -Wert (Verschiebung des Stützen-Mittelquerschnitts),
- $P_{1i}$  — den beim  $i$ -ten Verfahren erhaltenen  $P_1$ -Wert,
- $\varepsilon_{b1i}$  — die beim  $i$ -ten Verfahren erhaltene Randfaser-Zusammendrückung im Mittelquerschnitt.

Bei diesem Berechnungsverfahren ist die Ermittlung der  $P_1 - y_1$ -Kurve sehr langwierig und selbst beim Einsatz eines Rechenautomaten arbeitsaufwendig.

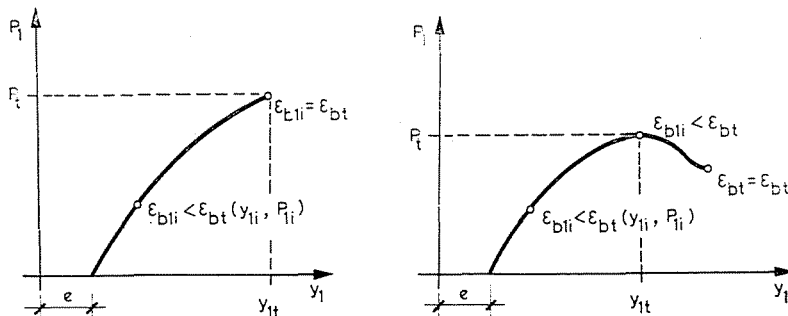


Abb. 14

#### 4.6 Bestimmung der Bruchlast mit Hilfe einer vorausgesetzten Verschiebungsform. Einige numerische Ergebnisse

Als Ausgang werden auch hier die beiden Gleichgewichtsgleichungen gewählt und durch die Gleichung der vorausgesetzten Verschiebungsform, durch die Verschiebungsgleichung, ergänzt. Für die verschobene Form wird eine Cosinusfunktion gewählt. Der Verschiebungswert (Abb. 15) der Querschnitte an der Stelle  $x = \frac{L}{2}$  wird in der Form angeschrieben:

$$e = y_0 \cos \frac{\pi}{L} \frac{l}{2}. \quad (3)$$

An der Stelle  $x = 0$  hat die Krümmung den Wert:

$$\frac{1}{\varrho} = y_0 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2. \quad (4)$$

Im Allgemeinfall wird für eine Last mit einer Außenmittigkeit  $e$  die Verschiebung des Mittelquerschnitts mit Hilfe der Gln. (3) und (4) in folgender Weise ermittelt:

$$y_0 = \frac{e}{\cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{1}{\varrho y_0}}}. \quad (5)$$

Die Krümmung — die bekannt sein muß, um die Berechnung durchzuführen — erhält man aus den Gleichgewichtsgleichungen (Abschn. 4.5).

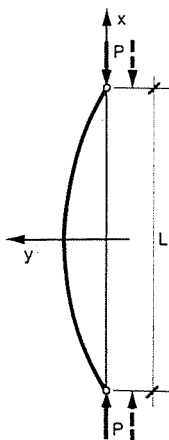


Abb. 15



In Kenntnis von  $y_0$  kann die Kurve  $P - y_0$  bestimmt werden. Aus der Gleichung läßt sich  $y_0$  explizite nicht ausdrücken, daher bedient man sich einer stufenweisen Näherung. Die einzelnen Schritte der Berechnung sind:

- a) es wird  $y_0$  angesetzt,
- b) man bestimmt das zur vorgegebenen Kraft  $P$  gehörende Moment im Mittelquerschnitt,  $M = Py_0$ ,
- c) aus der Kurve  $M - \frac{1}{\varrho}$  wird die Krümmung bestimmt,
- d) der angesetzte  $y_0$ -Wert wird mit Hilfe des Zusammenhangs (5) überprüft.

Die stufenweise Näherung läßt sich vermeiden, indem die Funktion

$$\frac{\pi}{L} = \sqrt{\frac{1}{\varrho y_0}} \quad (6)$$

für verschiedene  $P$ -Werte im Koordinatensystem  $L - y_0$  dargestellt, sodann der Schnittpunkt mit der Kurve, gewonnen aus der in demselben Koordinatensystem dargestellten Gleichung

$$y_0 = \frac{e}{\cos \frac{l}{2} \frac{\pi}{L}} \quad (7)$$

gesucht wird (Abb. 16, 17).

Die aus den Schnittpunkten erhaltenen  $y_0$ -Werte befriedigen die Gl. (5) und liefern gleichzeitig die Verschiebung des Mittelquerschnitts, die zur mit einer Außenmittigkeit  $e$  angreifenden Kraft  $P$  gehört.

Die Berechnung läßt sich auch von den Querschnittsabmessungen des Betons unabhängig durchführen, wobei sich die vorigen Zusammenhänge wie folgt ändern:

$$\frac{\pi}{L} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{h}{\varrho} \frac{y_0}{h}}, \quad (8)$$

$$\frac{y_0}{h} = \frac{e}{\cos \frac{l}{2} \frac{\pi}{L}} \cdot \frac{h}{h} \quad (9)$$

Mit Hilfe der Schnittpunkte der für die Bestimmung der Werte  $y_0$  bzw.  $\frac{y_0}{h}$  benutzten Kurven können die Lastverschiebungsfunktionen  $(P - y_0)$  bzw.  $\bar{P} - \bar{y}_0$  gezeichnet werden (Abb. 18), aus denen die Bruchlast ermittelt wird.

Auch der Bezugswert des Verschiebungs- oder Außenmittigkeitszuwachses unter Bruchlastwirkung wird bekannt, den man aus der Differenz zwischen der Anfangsaußenmittigkeit und der Außenmittigkeit beim Bruch erhält:

$$\frac{\Delta e}{h} = \frac{y_0 \max}{h} - \frac{e}{h}.$$

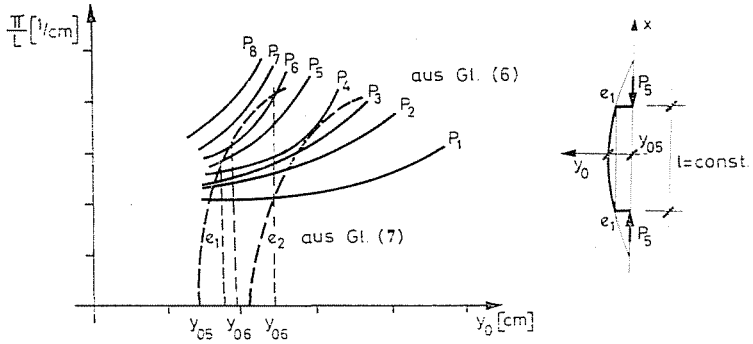


Abb 16

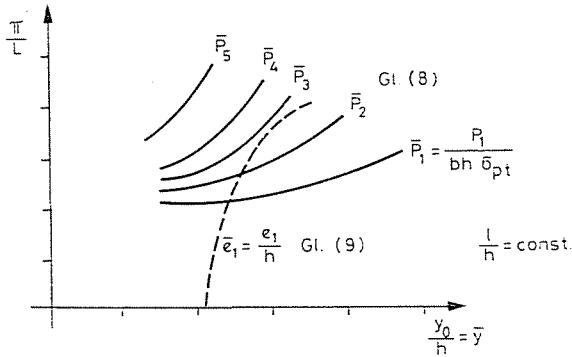


Abb. 17

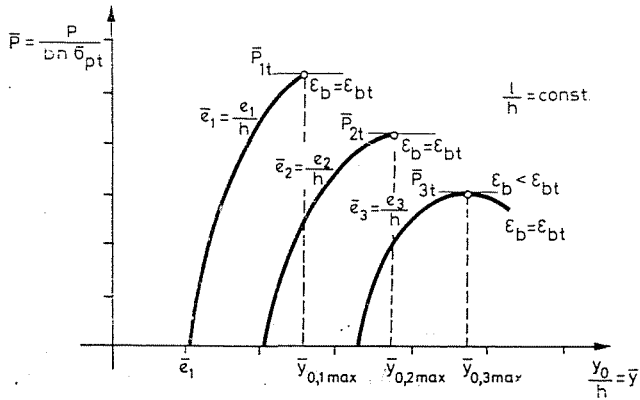


Abb. 18

Wird  $\frac{\Delta e}{h}$  für Stützen mit verschiedener Geometrie berechnet, erhält man die Funktion in Abb. 19, die über den Außenmittigkeitszuwachs Aufschluß gibt.

Durch die Festlegung der zu einzelnen Biegsamkeiten und Außenmittigkeiten gehörenden Maximalwerte der Funktion  $\bar{P} - \bar{y}$  erhält man die Kraft-Biegsamkeitsfunktion ( $\bar{P} - l/h$ ) (Abb. 20).

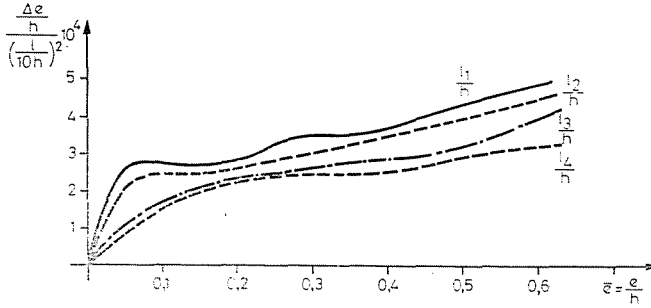


Abb. 19

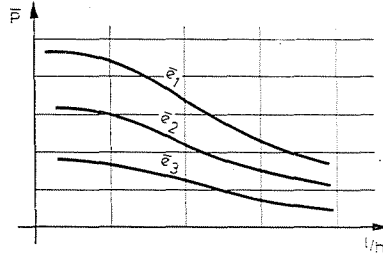


Abb. 20

Einige numerische Ergebnisse.

Von den Ergebnissen der Anwendungsbeispiele des erörterten Verfahrens sollen dargelegt werden.

Abb. 21 dient zur Bestimmung von  $\bar{y}_0$ . Abb. 22 zeigt die Funktion  $\bar{P} - \bar{y}$ . Der Verlauf des Außenmittigkeitszuwachses bei Stützen mit praktisch vertretbarem Stahlanteil ist in Abb. 23 dargestellt. In der Abbildung sind die für die praktische Berechnung verwendbaren Ersatzgeraden für die Angabe des Außenmittigkeitszuwachses und deren Gleichungen angegeben.

Der Einfluß des mittig angeordneten Spanngliedes auf die Tragfähigkeit wird in Abb. 24 gezeigt. Die Tragfähigkeitsänderungen der Träger gleicher Form mit schlaffer und Spannbewehrung sind in Abb. 25 zu sehen. Die Tragfähigkeit außenmittig gespannter Stützen verändert sich gemäß Abb. 26.

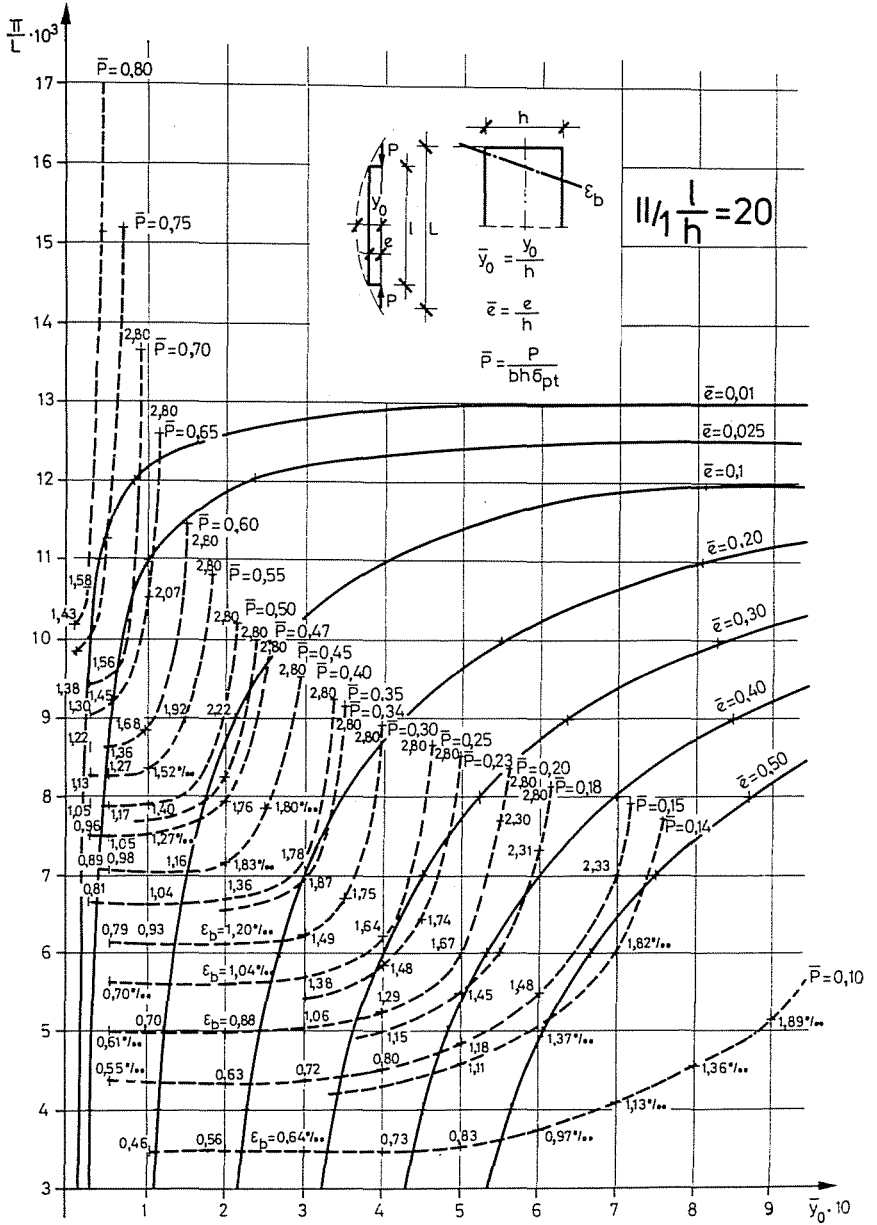


Abb. 21

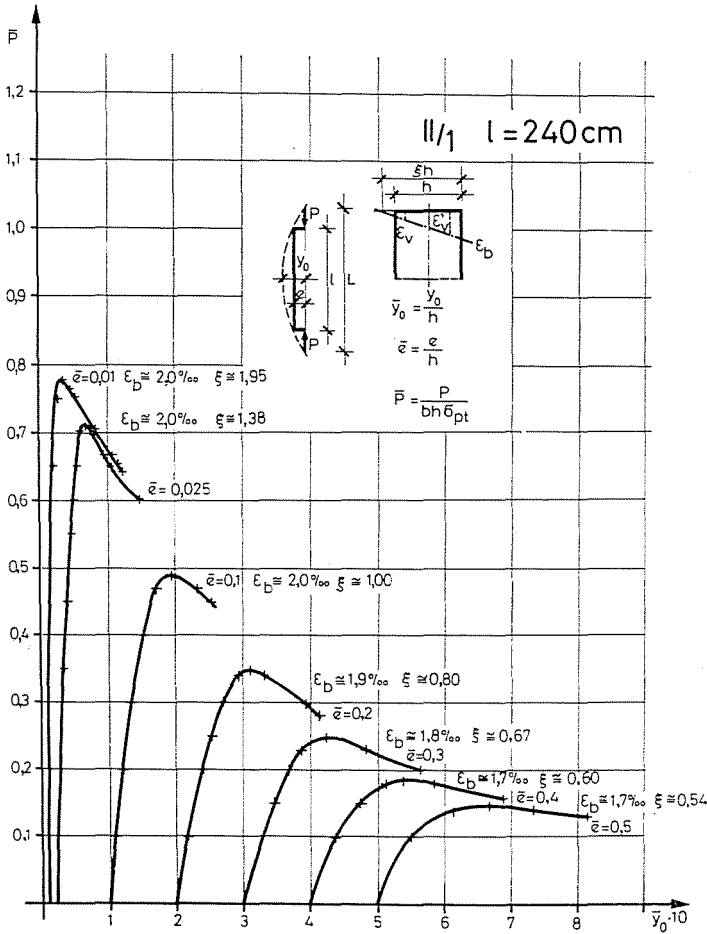


Abb. 22

#### 4.8 Vorschlag zur Berechnung der Tragfähigkeit von Stahlbetonstützen

Axial beanspruchte Querschnitte können mit Hilfe

a) der Gleichgewichtsgleichungen bzw.

b) der Tragfähigkeitslinie

bemessen oder nachgeprüft werden.

Bei Stützenuntersuchungen sind jedoch die Berücksichtigung der Formänderung des vollen Stabes und die Kenntnis des Außenmittigkeitszuwachses ( $\Delta e$ ) erforderlich.

Eines der Ziele unserer Untersuchungen war, diesen Zuwachs zu bestimmen. Anhand der durchgeführten Untersuchungen wird für die Ermittlung

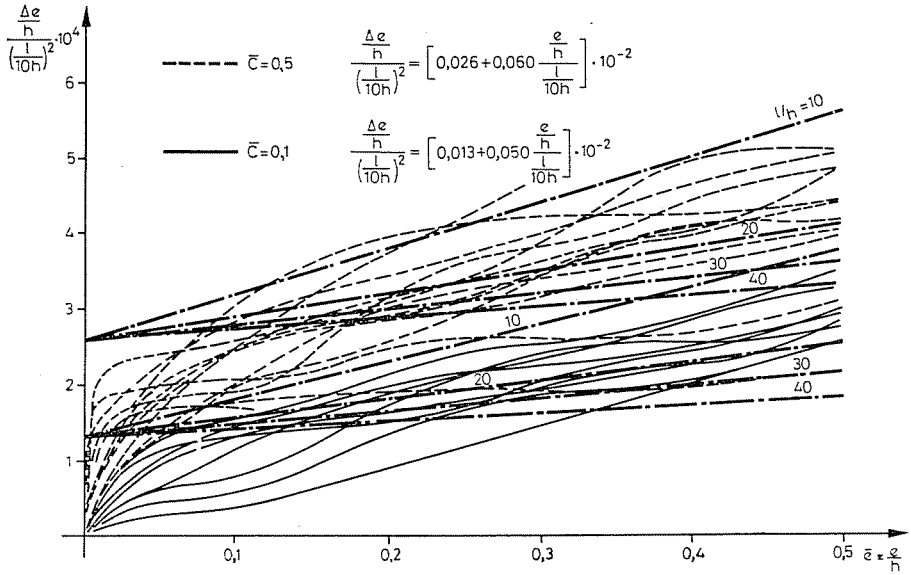


Abb. 23

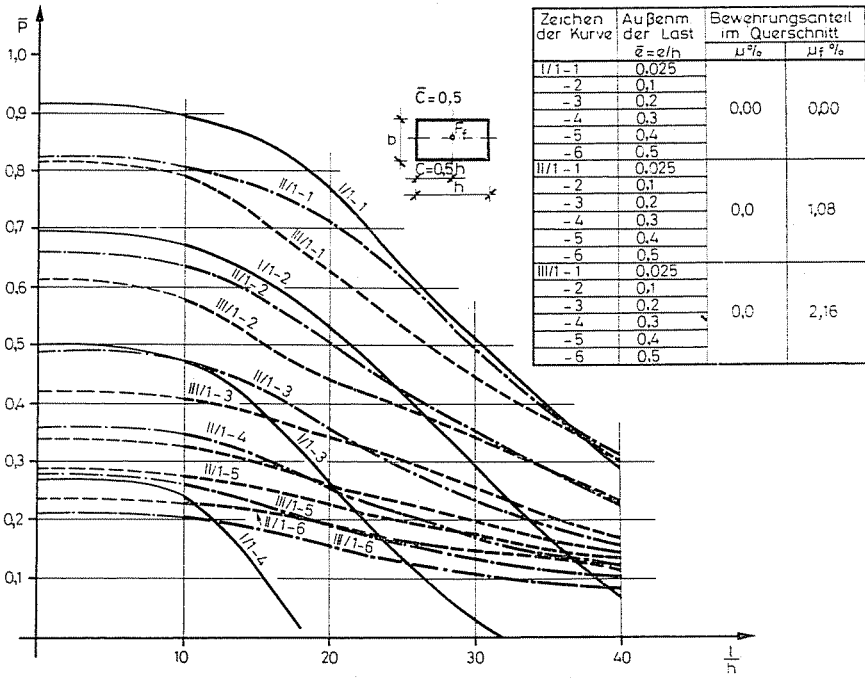
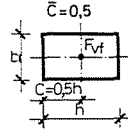
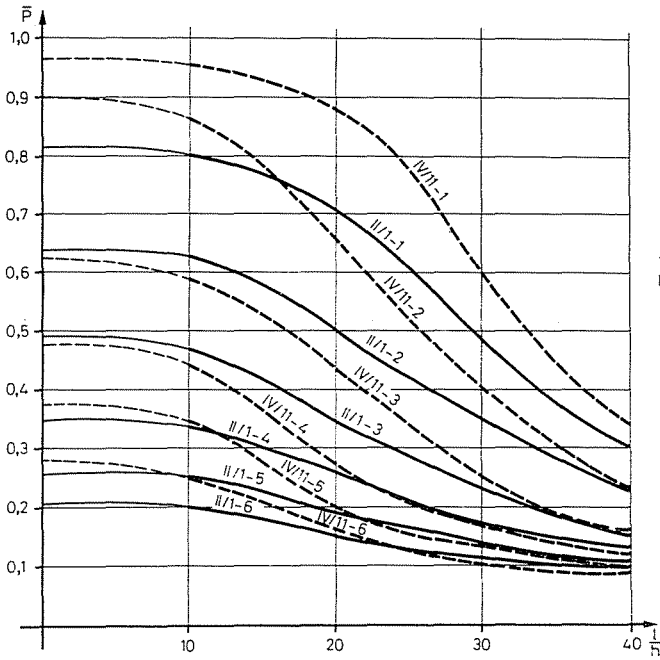
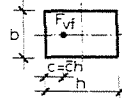
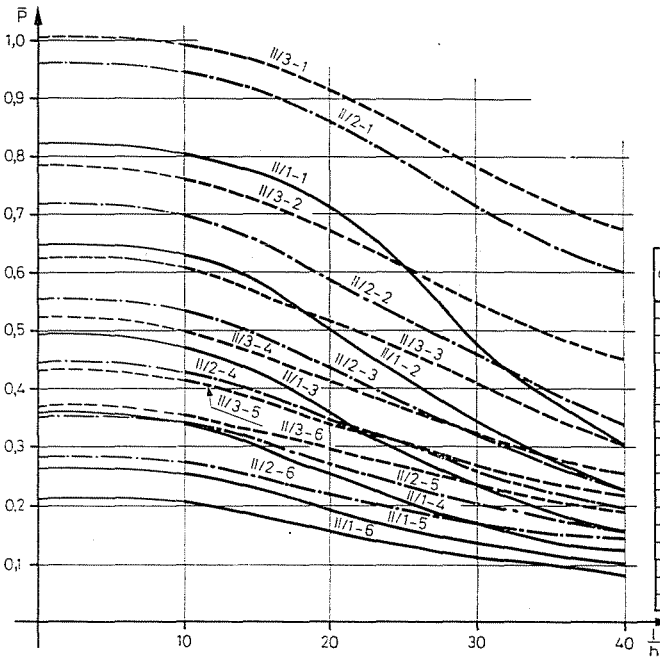


Abb. 24



| Zeichen der Kurve | Außenm. der Last $\bar{e} = e/h$ | Bewehrungsanteil im Querschnitt |           |
|-------------------|----------------------------------|---------------------------------|-----------|
|                   |                                  | $\mu$ ‰                         | $\mu_f$ ‰ |
| II/1-1            | 0,025                            | 0,0                             | 1,08      |
| -2                | 0,1                              |                                 |           |
| -3                | 0,2                              |                                 |           |
| -4                | 0,3                              |                                 |           |
| -5                | 0,4                              |                                 |           |
| -6                | 0,5                              |                                 |           |
| IV/11-1           | 0,025                            | 1,0                             | 0,0       |
| -2                | 0,1                              |                                 |           |
| -3                | 0,2                              |                                 |           |
| -4                | 0,3                              |                                 |           |
| -5                | 0,4                              |                                 |           |
| -6                | 0,5                              |                                 |           |

Abb. 25



| Zeichen der Kurve | Außenm. der Last $\bar{e} = e/h$ | $\bar{c}$ | Bewehrungsanteil im Querschnitt |           |
|-------------------|----------------------------------|-----------|---------------------------------|-----------|
|                   |                                  |           | $\mu$ ‰                         | $\mu_f$ ‰ |
| II/1-1            | 0,025                            | 0,5       | 0,0                             | 1,08      |
| -2                | 0,1                              |           |                                 |           |
| -3                | 0,2                              |           |                                 |           |
| -4                | 0,3                              |           |                                 |           |
| -5                | 0,4                              |           |                                 |           |
| -6                | 0,5                              |           |                                 |           |
| II/2-1            | 0,025                            | 0,3       | 0,0                             | 1,08      |
| -2                | 0,1                              |           |                                 |           |
| -3                | 0,2                              |           |                                 |           |
| -4                | 0,3                              |           |                                 |           |
| -5                | 0,4                              |           |                                 |           |
| -6                | 0,5                              |           |                                 |           |
| II/3-1            | 0,025                            | 0,1       | 0,0                             | 1,08      |
| -2                | 0,1                              |           |                                 |           |
| -3                | 0,2                              |           |                                 |           |
| -4                | 0,3                              |           |                                 |           |
| -5                | 0,4                              |           |                                 |           |
| -6                | 0,5                              |           |                                 |           |

Abb. 26

der maßgebenden Außenmittigkeit die Beziehung vorgeschlagen:

$$e_M = e_{sz} + e_k + \Delta e, \quad (10)$$

$e_{sz}$  wird aus den Beanspruchungen im Querschnitt ermittelt:  $e_{sz} = \frac{M}{P}$ .

In Ermangelung von ausreichenden Prüfungsergebnissen wird vorgeschlagen, die Anfangskrümmung des Stabes und die zufallsbestimmte Außenmittigkeit des Kraftangriffs ( $e_k$ ) mit den in der Norm MSZ 15022/1 angegebenen Werten anzusetzen:

$$e_k = 0,03 h + 0,01 \left( \frac{l}{10 h} \right)^2 h.$$

$\Delta e$  wird mit den als Ergebnis der Untersuchung erhaltenen Zusammenhängen in Abb. 23 bestimmt.

Der Ausdruck (10) der maßgebenden Außenmittigkeit lautet nun: bei mittigem Spannen ( $\bar{c} = 0,5$ )

$$e_M = e_{sz} + 0,03 h + 0,01 \left( \frac{l}{10 h} \right)^2 h + \left[ 0,026 h + 0,060 \frac{\frac{e_{sz}}{h}}{\frac{l}{10 h}} h \right] \left( \frac{l}{10 h} \right)^2, \quad (11)$$

bei außenmittigem Spannen ( $\bar{c} = 0,1$ )

$$e_M = e_{sz} + 0,03 h + 0,01 \left( \frac{l}{10 h} \right)^2 h + \left[ 0,013 h + 0,050 \frac{\frac{e_{sz}}{h}}{\frac{l}{10 h}} h \right] \left( \frac{l}{10 h} \right)^2. \quad (12)$$

In Kenntnis der maßgebenden Außenmittigkeit läßt sich die Konstruktion sowohl mit den Gleichgewichtsgleichungen wie auch mit der Tragfähigkeitslinie des Querschnitts bemessen oder prüfen (12).

Ist die Stütze nach den Berechnungen mittig belastet ( $e_{sz} = 0$ ) und gespannt ( $c = 0,5h$ ), läßt sich die Grenzkraft auch wie folgt berechnen:

$$P_H = \varphi P_{Hof} = \varphi (F_b \sigma_{bH} - F_{vf} \sigma'_{vff}), \quad (13)$$

wo unter Berücksichtigung von (13, 14) sowie (11)

$$\varphi = \frac{1}{1 + 3 \frac{e_M}{h}} \cong \frac{1}{1,1 + \frac{1}{10} \left( \frac{l}{10 h} \right)^2}$$

gilt.

In dieser Formel ist  $\sigma'_{vff}$  die Spannung in der Spannbewehrung im Augenblick des Bruchs.



## 5. Forschungsergebnisse

Die Ergebnisse der experimentellen und theoretischen Untersuchungen werden im folgenden zusammengefaßt:

### a) Die Wirkung der Biegsamkeit

Die Wirkung der Biegsamkeit auf die Tragfähigkeit der Spannbetonstütze ist die gleiche wie im Falle von schlaffbewehrten Stahlbetonstützen, was durch die Abbildungen 24, 25, 26 nachgewiesen wird.

### b) Der Einfluß der Vorspannung

Der Einfluß der Vorspannung macht sich zusammengesetzter geltend.

Bei *mittiger* Vorspannung und mittigem oder nahezu mittigem Druck wird die Tragfähigkeit von gedregungenen Stützen geringer Biegsamkeit durch die Vorspannung vermindert: d. h. wenn  $l/h \leq 26 \div 30$ . Bei einer Belastung mit größerer Außenmittigkeit ( $\bar{e}_{sz} \geq 0,2$ ) ist die mittige Vorspannung wirksam.

Bei *außenmittiger* Vorspannung erhält man in der Regel eine Tragfähigkeitszunahme. Die Wirksamkeit der außenmittigen Vorspannung ist von der Größe der Außenmittigkeit der Vorspannkraft abhängig. Bei einer Spannkraft mit großer Außenmittigkeit ( $\bar{c} = 0,1$ ) erhält man bereits bei einer verhältnismäßig geringen Biegsamkeit ( $l/h \cong 10$ ) eine Tragfähigkeitszunahme.

Bei stark außenmittigem Druck läßt sich in jedem Falle, sowohl bei mittiger wie auch bei außenmittiger Vorspannung eine Zunahme der Tragfähigkeit erreichen.

### c) Der Einfluß der Vorbelastung auf die Betonfestigkeit

Durch die Vorbelastung wird die Betonfestigkeit in einem gewissen Grade geändert, doch wird die Zunahme der Tragfähigkeit — unseren Beobachtungen gemäß — durch diese Änderung nicht wesentlich beeinflusst.

### d) Die zweckmäßige Vorspannkraft

Eine zweckmäßige Vorspannkraft läßt sich (bei einer Ausgangsspannung gleich der Grenzspannung) durch die Anwendung einer maximal ausgenutzten Spannbewehrung von 0,5 bis 1,0% erreichen. Es ist erwünscht, daß von dieser Spannkraft der Eigenspannungsanteil des Betons  $\sigma_{bf}/K_t = 0,15 - 0,25$  betrage. ( $K_t$  bedeutet die Betonfestigkeit im Zeitpunkt des Spannsens).

e) *Berechnung der Spannbetonstütze*

Die Tragfähigkeit der Spannbetonstütze wird mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichungen des Querschnitts bzw. mit dessen Tragfähigkeitslinie berechnet. Die dafür erforderliche maßgebende Außenmittigkeit wird in Abhängigkeit von der Außenmittigkeit des Spannstahtes mit den Ausdrücken (11) bzw. (12) errechnet. Bei nach der Berechnung mittig belasteten ( $e_{sz} = 0$ ) und gespannten Stützen kann der Nachweis auch nach der Beziehung (13) durchgeführt werden.

### Zusammenfassung

Die Vorspannung wird in Druckgliedern erst in neuester Zeit angewandt. Durch die bisherigen Untersuchungen konnten nicht alle Fragen beruhigend beantwortet werden. In der Arbeit wird versucht, die Fragen zu beantworten:

— wie werden die Formänderungs- und Festigkeitseigenschaften des jungen Betons durch die Vorspannung beeinflusst?

— wie wird die Tragfähigkeit der Stütze durch Anteil und Lage der Spannbewehrung beeinflusst?

— wie sollen die Tragfähigkeits- und Formänderungskennwerte der Spannbetonstütze bestimmt werden?

### Literatur

1. B. RECKENRIDGE, R. A.: "A Study of the Characteristics of Prestressed Concrete Columns". University of Southern California, Engineering Centre 1953. Apr. USCES Report 18—6
2. CSÓNKA, P.: „Heterogén anyagú feszített rudak kihajlása” MTA Műszaki Tudományok Osztálya Közleményei, Bd. 15. H. 1—4
3. ZIA, P. Z.: "Ultimate Strength of Slender Prestressed Concrete Columns". University of Florida, Engineering and Industrial Experiment Station. July 1957
4. LIN, T. Y.—ITAYA, R.: "Prestressed Concrete Columns under Excentric Loading". Journal of the Prestressed Concrete Institute, Dec. 1957. No. 3
5. BROWN, K. I.: "The Ultimate Load Carrying Capacity of Prestressed Concrete Columns under Direct and Excentric Loading". Civil Engineering and Public Works Review, Apr, May, Juni, 1965
6. HALL, A. S.: "Buckling of Prestressed Columns". Constructional Review (Sydney). June 1963
7. MICHAJLOW, W. W.: Predwaritelno naprjashennye i shelesobetonnye konsztrukzii. Moskwa, 1963. 559—586
8. PEZOLD, T.: Wlijanie predwaritelnogo naprjashenija armatury na ustojtschiwost shelesobetonnych kolonn. Beton i Shelesobeton, 1966. H. 4. 30—32
9. SWETOW, A. A.: Wlijanie predwaritelnogo naprjashenija na nesuchstschuju sposobnost gibkich sshotych stershej. Beton i Shelesobeton, 1966. H. 3. 30—34
10. ARONI, S.: "Slender Prestressed Concrete Columns" Journal of Structural Division A.S.C.E. St. 4. 1968. apr. pp. 875—904
11. "Tentative Recommendations for the Design of Prestressed Concrete Columns". Journal of the Prestressed Concrete Institute, 1968. oct. pp. 12—21
12. SZALAI, K.: „A nyomott vasbetonrúd teherbírása”. Mélyépítéstudományi Szemle XVII. 1967. H. 6. 241—251
13. Építmények teherhordó szerkezeteinek erőtani tervezése. Vasbetonszerkezetek. MSz. 15 022/1—T.
14. SZALAI, K.: Általános eljárás a kis külpontossággal nyomott beton- és vasbeton oszlopok méretezésére. Magyar Építőipar 1966. H. 7. 409—411

József ALMÁSI, 1502 Budapest, Postfach 91. Ungarn.