

# BERECHNUNG DES KRÄFTESPIELS IN DURCHLAUFENDEN EBEN GEKRÜMMTEN TRÄGERN

Von

B. SÁLYI

Lehrstuhl für Mechanik, Fakultät für Verkehrswesen  
Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 27. Juli, 1972.)

Vorgelegt von Prof. Dr. P. MICHELBERGER

## Einleitung

Die Klärung des Kräftespiels von »durchlaufenden Trägern« stellt eine im technischen Leben ziemlich oft vorkommende Aufgabe dar. Es werden die Träger hierhergezählt, die aus der Sicht des belastenden, aktiven Kräftesystems statisch unbestimmt abgestützt sind, die Zahl der Auflagerungen also höher als die für die Gewährleistung des Gleichgewichts notwendige Anzahl ist.

(Die bei Fahrzeugen gebräuchlichen Trägernetz-Modelle führen zum Beispiel oft zu einer vereinfachten Berechnung, wo der Rahmen praktisch mit guter Näherung als ein auf dem Oberbau aufliegender, durchlaufender, ebener Träger — auf festem Auflager — gelten kann.)

In Abhängigkeit von der geometrischen Form der Verbindungsmittellinie der Schwerpunkte der einzelnen Querschnitte wird von geraden oder gekrümmten Durchlaufträgern gesprochen. Diese Unterscheidung weist eigentlich gar nicht auf die unterschiedliche Form der Trägermittellinie hin, sondern vielmehr auf die unterschiedlichen Berechnungsmöglichkeiten der unbekanntenen (äußeren und inneren) Reaktionen. Als gerader Durchlaufträger wird in der Regel ein ebenbelasteter, gerader Träger auf  $n+1$  Abstützungen bezeichnet, von denen eine Gelenkstütze und  $n$  Rollenaullagerungen darstellen, deren Stützebenen zueinander parallel und auf die Ebene des aktiven Kräftesystems senkrecht sind. Die Belastungsebene ist aber in der Regel eine Schwerpunkt-Trägheitshauptebene aller Querschnitte.

Im Vergleich zu dem beschriebenen Träger stellt auch ein durchlaufender, gekrümmter Stab mechanisch keine Abweichung dar, dessen Mittellinie eine ebene Kurve in der Belastungsebene ist und dessen Abstützungen dem Vorhergesagten entsprechen.

Ein Berechnungsverfahren wurde für das Kräftespiel derartiger Träger in [1] ausgearbeitet. Durch die Einfügung von Gelenken werden die Träger

in statisch bestimmte Träger umgewandelt und durch eine geeignete Anordnung der Gelenke wird ermöglicht, daß sich die unbekanntenen Momente  $M_i$  der Kräftepaare bei den Gelenken — unter Berücksichtigung der entsprechenden Reihenfolge — aus der Lösung von Gleichungen mit einer Unbekannten ergeben.

Nach anderen Methoden und über einen anderen Gedankengang gelangt auch [2] zu demselben Ergebnis.

In der vorliegenden Arbeit sollte das Kräftespiel der durchlaufenden eben gekrümmten Träger untersucht werden, die folgende Bedingungen befriedigen:

- a) der Träger ist in seiner Ebene durch ein äußeres Kräftesystem belastet
- b) die Ebene (der Mittellinie) des Trägers ist die Schwerpunkt-Trägheits-hauptebene sämtlicher Trägerquerschnitte
- c) von den angesetzten  $n+1$  Bedingungen besteht eine im Vorhandensein eines Gelenks und die  $n$  weiteren in Rollenauflagerungen mit auf die Ebene des Trägers (und der Belastung) senkrechten Stützebenen, wobei die Richtungen letzterer einander gegenüber unterschiedlich sein können.

Dabei wird versucht, — ähnlich wie in [1] und [2] — durch die Einfügung von zweckmäßig angeordneten Gelenken die Berechnung der Gelenkmomente durch die Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten zu ermöglichen. Auch die bei dem Nachweis ähnlicher Träger allgemein angenommene und benutzte Näherung wird herangezogen, wo neben dem Einfluß der Biegebeanspruchungen die Wirkung der Normal- und Scherbeanspruchungen vernachlässigt, und die Spannungsverteilung infolge der Biegebeanspruchung im Querschnitt als linear betrachtet (das heißt eine mäßige Mittellinienkrümmung vorausgesetzt) wird.

(Als derartige Träger können im allgemeinen die Fahrzeugrahmen gelten. Bei deren Berechnung begnügt man sich in der Regel mit der Berücksichtigung von geraden Trägern, wobei diese hinsichtlich ihrer Formgestaltung vielmehr zu den gekrümmten Trägern zählen sollten; die angeführten Bedingungen werden in der Regel auch bei diesen befriedigt.)

## 1. Die Grundgleichung der Berechnung

Abb. 1 zeigt einen eben gekrümmten Träger auf  $n+1$  Auflagern. Die Auflagepunkte sind in der Abbildung durch  $A_i$  bezeichnet, die Länge des Trägerabschnitts » $T_i$ « zwischen zwei benachbarten Auflagepunkten —  $A_i$  und  $A_{i+1}$  — ist  $l_i$ , die Länge des Stababschnitts zwischen zwei nicht benachbarten Punkten  $A_i$  und  $A_k$  ist  $L_{ik}$ .  $e_i$  bedeutet den Normaleinheitsvektor der Stützebene beim Auflagepunkt  $A_i$ . Bei einer Belastung in der Abbildungsebene ist der Träger statisch  $n-1$ -fach unbestimmt. Neben den bereits angegebenen

Bedingungen wird der Einfachheit halber einstweilen auch vorgeschrieben, daß der Trägerquerschnitt konstant ist.

Im ersten Schritt werden sämtliche Auflager mit Ausnahme des Gelenks und der  $k$ -ten Rolle eliminiert (Abb. 2). Damit ist die Auflagerung statisch bestimmt, wobei die aktive Last  $G_a$  für den Träger durch das aus bekannten Kräften bestehende Kräftesystem »K« (die aktive Belastung des ursprünglichen Trägers) sowie durch die Ersatzkräfte  $F_j = F_j e_j$  für die eliminierten Abstützungen gebildet wird. Mit den Reaktionen in den Punkten  $A_0$  und  $A_k$  stellen diese das Kräftesystem  $E_1$  dar.

Für die Berechnung bedienen wir uns des Betti-Satzes. Dabei wurde als zweites Kräftesystem  $E_2$  das aus der in Punkt  $A_i$  angreifenden aktiven Kraft  $e_i$  von Einheitsgröße und aus den zu dieser gehörenden Reaktionen  $a_{ik}, f_{ik}$  bestehende Kräftesystem verwendet. Der Normaleinheitsvektor der Rahmenebene sei der Vektor  $k$ . Zu den beiden Kräftesystemen gehören die Biegemomentenfunktionen  $M(s) = M(s) k$  bzw.  $m(s) = m(s) k$ . Die letztere für die Abschnitte  $L_{0i}$  und  $L_{ik}$  (unter Berücksichtigung der angegebenen Fortschrittsrichtung) angeschrieben, erhält man

$$\text{für den Abschnitt } L_{0i} \quad m(s) = a_{ik} \times r^{(ik)} = m_a^{(ik)}$$

$$\text{für den Abschnitt } L_{ik} \quad m(s) = -f_{ik} \times r^{(ik)} = m_f^{(ik)}.$$

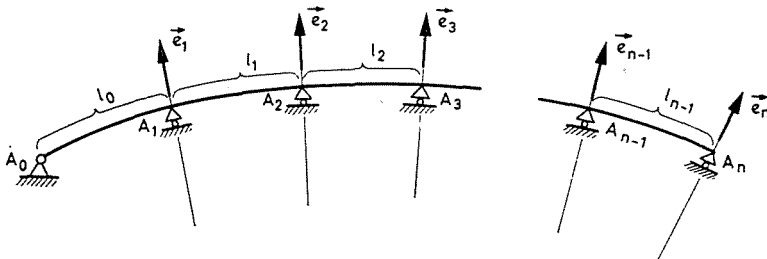


Abb. 1. Eben gekrümmter Träger auf  $n + 1$  Auflagern

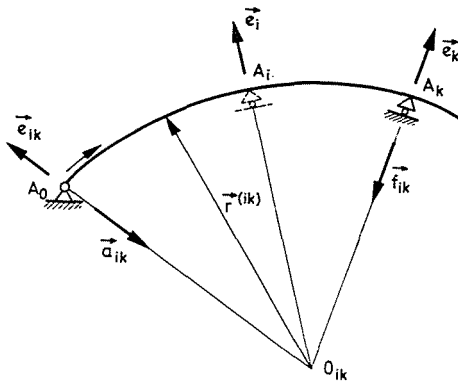


Abb. 2. Das statisch bestimmte Grundsystem

Der Querschnitt  $A_i$  kann sich in Richtung  $\mathbf{e}_i$  nicht verschieben. Nach dem Betti-Satz wird dies durch die Gleichung

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{d}_i = d_{ii} = \frac{1}{IE} \int_{L_{ik}} \mathbf{m}(s) \cdot \mathbf{M}(s) ds = 0$$

ausgedrückt. Die rechte Seite der Gleichung ausführlicher geschrieben, erhält man die Gleichung

$$\mathbf{a}_{ik} \cdot \int_{L_{si}} \mathbf{r}^{(ik)} \times \mathbf{M}(s) ds - \mathbf{f}_{ik} \cdot \int_{L_{ik}} \mathbf{r}^{(ik)} \times \mathbf{M}(s) ds = 0 \quad (1)$$

die für einen beliebigen Trägerabschnitt  $A_0 A_i A_k$  kennzeichnend ist und den Ausgangspunkt für weitere Berechnungen bilden kann. Daher wird im weiteren diese Gleichung als die *Grundgleichung* für den Trägerabschnitt  $A_0 A_i A_k$  bezeichnet.

## 2. Das Rechenverfahren

### 2.1 Anordnung des Gelenks $C_1$

Abb. 3 zeigt das Grundsystem des Gelenkträgers auf 6 Stützen. Notwendigenfalls werden 4 Gelenke so angeordnet, daß aus dem Auflagepunkt  $A_5$  ausgehend in jede Stützweite je ein Gelenk kommt; das letzte wird dann in der Stützweite  $A_1 A_2$  liegen. In der Abbildung sind die beim Gelenk  $C_4$  — als Ersatz für die ursprünglichen starren Verbindungen — eingesetzten Kräftepaare (mit einstweilen unbekanntem Momenten  $M_4$ ) sowie das im Träger auf deren Wirkung entstehende Kräftesystem dargestellt. Durch die gebrochene Linie  $A_0 - V_{41} - V_{42} - V_{43} - V_{44} - A_5$ , die durch » $V^{(4)}$ « gekennzeichnet ist, wird zugleich der Verlauf der Biegemomentenfunktion  $M_4 \mathbf{m}_4(s)$  veranschaulicht (die Kräfte  $\varphi_{4j}$  gehören zum Kräftepaar mit dem Einheitsmoment  $M_4' = 1$ ).

Aus der Abbildung ist auch leicht zu erkennen, daß bei einer beliebigen Zahl  $n+1$  der Abstützungen — werden die Gelenke derart angeordnet, daß in die erste Stützweite  $T_0$  kein Gelenk kommt — infolge der Wirkung der

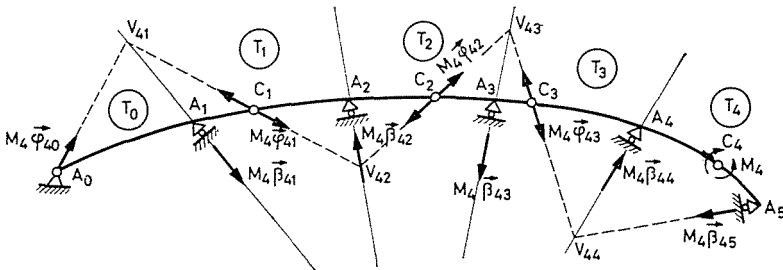


Abb. 3. Das Grundsystem des Gelenkträgers auf 6 Stützen

Kräftepaare mit dem Moment  $M_k$ , die beim Gelenk  $C_k$  angreifen, eine Funktion  $M_k \mathbf{m}_k(s)$  entsteht, die zwischen den Auflagepunkten  $A_{k+1} - A_n$  identisch gleich Null ist, wobei die die Funktion darstellende gebrochene Linie » $V^{(k)}$ « aus Punkt  $A_0$  ausgeht und — mit Ausnahme des Gelenks  $C_k$  — über sämtliche Gelenke in Punkt  $A_{k+1}$  endet.

Abb. 4 veranschaulicht den Trägerabschnitt  $A_0 A_1 A_2$  mit den gebrochenen Linien  $V^{(1)}$  und  $V^{(2)}$ . Es wird für diesen Abschnitt die Grundgleichung (1) angeschrieben, wobei der Umstand zu berücksichtigen ist, daß auf dem Abschnitt  $T_j$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(s) &= \mathbf{M}_K + M_j \mathbf{m}_{jj} + \sum_{i=j+1}^{n-1} M_i \mathbf{m}_{ij} = \\ &= \mathbf{M}_K = M_j \beta_{j,j+1} \times \mathbf{R}^{(j+1)} + \sum_{i=j+1}^{n-1} M_i \varphi_{ij} \times \rho^{(j)} \end{aligned}$$

gilt. ( $\mathbf{M}_K$  ist das zum bekannten äußeren Kräftesystem gehörende Moment).  
Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{12} \cdot \int_{l_0} \mathbf{r}^{(12)} \times (\mathbf{M}_K + M_1 \mathbf{m}_{10}) ds - \mathbf{f}_{12} \cdot \int_{l_1} \mathbf{r}^{(12)} \times (\mathbf{M}_K + M_1 \mathbf{m}_{11}) ds + \\ + \mathbf{a}_{12} \cdot \sum_{i=2}^{n-1} M_i \int_{l_0} \mathbf{r}^{(12)} \times \mathbf{m}_{i0} ds - \mathbf{f}_{12} \cdot \sum_{i=2}^{n-1} M_i \int_{l_1} \mathbf{r}^{(12)} \times \mathbf{m}_{i1} ds = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Durch eine geeignete Anordnung des Gelenks  $C_1$  wird erreicht, daß die Summen der Glieder in der ersten und in der zweiten Zeile der Gl. (2) auch getrennt gleich Null seien; damit läßt sich aus der ersten Zeile das unbekannte Moment

$$M_1 = - \frac{\mathbf{a}_{12} \cdot \int_{l_0} \mathbf{r}^{(12)} \times \mathbf{M}_K ds - \mathbf{f}_{12} \cdot \int_{l_1} \mathbf{r}^{(12)} \times \mathbf{M}_K ds}{\mathbf{a}_{12} \cdot \int_{l_0} \mathbf{r}^{(12)} \times \mathbf{m}_{10} ds - \mathbf{f}_{12} \cdot \int_{l_1} \mathbf{r}^{(12)} \times \mathbf{m}_{11} ds}$$

errechnen.

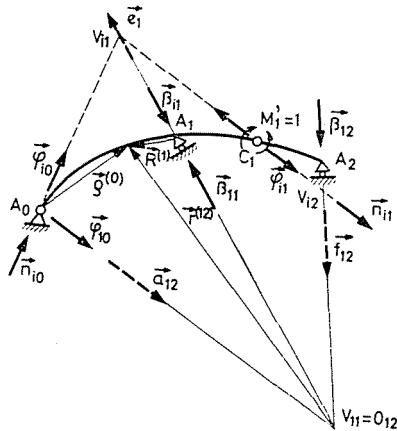


Abb. 4. Der Trägerabschnitt  $A_0 A_1 A_2$

Die zweite Zeile ergibt allein Null, wenn bei einem beliebigen  $i$

$$\begin{aligned} & a_{12} \mathbf{e}_{12} \cdot \int_{l_0} \mathbf{r}^{(12)} \times (\boldsymbol{\varphi}_{i0} \times \boldsymbol{\rho}^{(0)}) ds - f_{12} \mathbf{e}_2 \cdot \int_{l_1} \mathbf{r}^{(12)} \times (\boldsymbol{\varphi}_{i1} \times \boldsymbol{\rho}^{(1)}) ds = \\ & = \varphi_{i0} \mathbf{n}_{i0} \cdot \int_{l_0} \boldsymbol{\rho}^{(0)} \times (\mathbf{a}_{12} \times \mathbf{r}^{(12)}) ds - \varphi_{i1} \mathbf{n}_{i1} \cdot \int_{l_1} \boldsymbol{\rho}^{(1)} \times (\mathbf{f}_{12} \times \mathbf{r}^{(12)}) ds = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

gilt.

Es seien

$$\int_{l_j} \boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \boldsymbol{\rho}^{(j)} ds = \mathbf{q}_{ij} = q_{ij} \mathbf{k}$$

und

$$\int_{l_j} \mathbf{r}^{(pk)} \times (\boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \boldsymbol{\rho}^{(j)}) ds = \mathbf{r}_{ij}^{(pk)} \times \mathbf{q}_{ij} = \mathbf{v}_{ij}^{(pk)},$$

ferner

$$\begin{aligned} \int_{l_k} \mathbf{a}_{ij} \times \mathbf{r}^{(ij)} ds &= \mathbf{u}_{ij,k} = u_{ij,k} \mathbf{k}, \\ - \int_{l_k} \mathbf{f}_{ij} \times \mathbf{r}^{(ij)} ds &= \mathbf{w}_{ij,k} = w_{ij,k} \mathbf{k} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{l_k} \boldsymbol{\rho}^{(k)} \times (\mathbf{a}_{ij} \times \mathbf{r}^{(ij)}) ds &= \boldsymbol{\rho}_{u_{ij,k}}^{(k)} \times \mathbf{u}_{ij,k}, \\ - \int_{l_k} \boldsymbol{\rho}^{(k)} \times (\mathbf{f}_{ij} \times \mathbf{r}^{(ij)}) ds &= \boldsymbol{\rho}_{w_{ij,k}}^{(k)} \times \mathbf{w}_{ij,k}. \end{aligned}$$

Die Integrale in der ersten Zeile der Formel (3) ergeben — von den Skalarmultiplikatoren abgesehen — die für die Wirkungslinie  $\mathbf{e}_k$  des resultierenden Vektors  $\mathbf{q}_{i0}$  bzw. für die Wirkungslinie  $\mathbf{e}_2$  des resultierenden Vektors  $\mathbf{q}_{i1}$  berechneten Momente. In der zweiten Zeile stehen hingegen die für die Wirkungslinie  $\mathbf{n}_{i0}$  der Resultierenden  $\mathbf{u}_{12,0}$  bzw. für die Wirkungslinie  $\mathbf{n}_{i1}$  der Resultierenden  $\mathbf{w}_{12,1}$  errechneten Momente mit dem skalaren Wert  $\varphi$  multipliziert.

Aus dem Gleichgewicht des Abschnitts  $A_0 A_1 C_1$  folgt

$$\boldsymbol{\varphi}_{i0} + \beta_{i1} \mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\varphi}_{i1} = \beta_{i1} \left[ \frac{\boldsymbol{\varphi}_{i0}}{\beta_{i1}} + \mathbf{e}_1 - \frac{\boldsymbol{\varphi}_{i1}}{\beta_{i1}} \right] = \mathbf{0},$$

bzw. die Kurzbezeichnungen

$$\frac{\boldsymbol{\varphi}_{ij}}{\beta_{ik}} = \boldsymbol{\psi}_{ij} \quad \text{und} \quad \frac{\mathbf{m}_{ij}}{\beta_{ik}} = \boldsymbol{\mu}_{ij}$$

eingeführt

$$\boldsymbol{\psi}_{i0} + \mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\psi}_{i1} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Auch das ist offenbar, daß — ist Gl. (3) gültig — sie mit den entsprechenden  $\beta$ -Werten dividiert auch anstatt der  $\varphi$ -Werte für die entsprechenden  $\psi$ -Vektoren gelten muß. Die gebrochene Linie  $A_0 - V_{i1} - C_1$  in Abb. 5 ist also das für den Vektor  $\mathbf{e}_1$  gezeichnete Seilpolygon, während  $\boldsymbol{\psi}_{i0}$ ,  $-\boldsymbol{\psi}_{i1}$  die Seilvektoren

sind. Damit gelten dann

$$\psi_{i0} = \psi_{\alpha 0} + \Delta\psi_1 \mathbf{t}_1,$$

$$\psi_{i1} = \psi_{\alpha 1} + \Delta\psi_1 \mathbf{t}_1.$$

(Die Gerade  $A_0C_1$  ist die Culmannsche Gerade, deren Richtung durch den Einheitsvektor  $\mathbf{t}_1$  angegeben wird.)

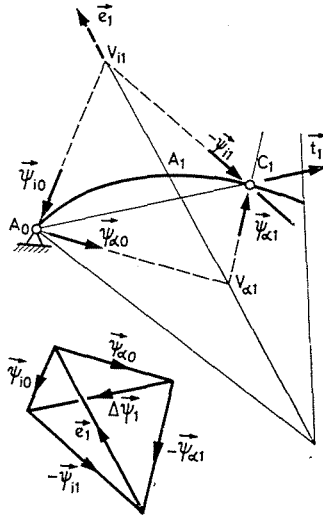


Abb. 5. Die gebrochene Linie  $A_0-V_{ii}-C_1$  ist das für den Vektor  $\mathbf{e}_1$  gezeichnete Seilpolygon

In (3) anstelle von  $\varphi_{i0}, \varphi_{i1}$  einmal den die Beziehung (4) befriedigenden Vektor, sonst jedoch beliebig gewählte Vektoren  $\psi_{\alpha 0}, \psi_{\alpha 1}$  bzw. den (noch unbekannt) Vektor  $\mathbf{t}_1$  eingesetzt, erhält man zwei Skalargleichungen, deren Auflösung die beiden Koordinaten liefert, die den Ort des Gelenks  $C_1$  bestimmen.

Die Verhältnisse gestalten sich übersichtlicher, wenn man berücksichtigt, daß die Resultierende eines die ebene Kurve entlang auf deren Ebene senkrechten und linear verteilten Vektorensystems  $\mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}$  die Kurvenebene im zur Wirkungslinie des Vektors  $\mathbf{e}$  als Geraden und zu dem — zum Schwerpunkt der ebenen Kurve gehörigen — Trägheitstensor gehörenden Antipol  $P$  schneidet. Das bedeutet, daß der Ort der Resultierenden  $\mathbf{u}_{12,0}$  im auf den Schwerpunkt  $S_1$  bezogenen Antipol  $P_0$  der Geraden  $A_0O_{12}$  und der Ort der Resultierenden  $\mathbf{w}_{12,1}$  im auf den Schwerpunkt  $S_2$  bezogenen Antipol  $P_1$  der Geraden  $A_2O_{12}$  liegt (Abb. 6). Werden also die Gerade  $A_0V_{\alpha 1}$  durch den Punkt  $P_0$ , die Gerade  $V_{\alpha 1}V_{\alpha 2}$  durch den Punkt  $P_1$  geführt, so wird für den in dieser Weise bestimmten Vektor  $\psi_{\alpha 0}, \psi_{\alpha 1}$  Gl. (3) mit Sicherheit gelten und  $C_1$  muß in der Geraden  $V_{\alpha 1}V_{\alpha 2}$  liegen. Da weiterhin

$$\rho_{w_{12,1}}^{(1)} = \rho_{w_{12,1}}^{(0)} - \overline{A_0C_1} \mathbf{t}_1,$$

und die Bezeichnung

$$\mathbf{u}_{12,0} + \mathbf{w}_{12,1} = \mathbf{b}_{01}$$

eingeführt,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 \cdot [(\rho_{u_{12,0}}^{(0)} \mathbf{u}_{12,0} + \rho_{w_{12,1}}^{(1)} \mathbf{w}_{12,1}) \times \mathbf{k}] &= [\mathbf{t}_1 \times (\rho_{u_{12,0}}^{(0)} \mathbf{u}_{12,0} + \rho_{w_{12,1}}^{(0)} \mathbf{w}_{12,1})] \cdot \mathbf{k} = \\ &= (\mathbf{t}_1 \times \rho_{b_{01}}^{(0)} \mathbf{b}_{01}) \cdot \mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

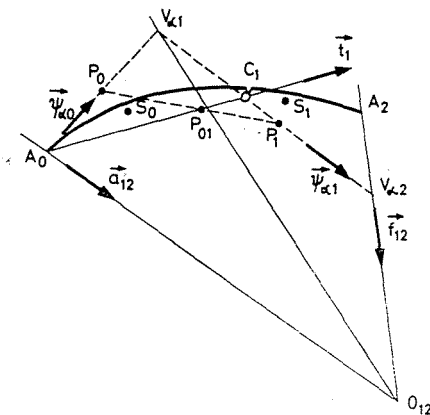


Abb. 6. Die Bestimmung des Gelenks  $C_1$

lediglich dann gelten kann, wenn  $\rho_{b_{12}}^{(0)}$  zu  $\mathbf{t}_1$  parallel ist, muß also  $C_1$  auch in der Geraden  $A_0P_{01}$  liegen. Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden ist also der Ort von  $C_1$  eindeutig bestimmt.

## 2.2 Anordnung der weiteren Gelenke

Die Grundgleichung des Trägerabschnitts  $A_0A_1A_3$  hat die Form:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_{13} \cdot \int_{l_0} \mathbf{r}^{(13)} \times [(\mathbf{M}_K + M_1 \mathbf{m}_{10}) + M_2 \mathbf{m}_{20}] ds - \\ &- \mathbf{f}_{13} \cdot \int_{L_{13}} \mathbf{r}^{(13)} \times [(\mathbf{M}_K + M_1 \mathbf{m}_{11}) + M_2 \mathbf{m}_{21}] ds + \mathbf{a}_{13} \cdot \sum_{i=3}^{n-1} M_i \int_{l_0} \mathbf{r}^{(13)} \times \mathbf{m}_{i0} ds - \quad (5) \\ &- \mathbf{f}_{13} \cdot \sum_{i=3}^{n-1} M_i \left( \int_{l_1} \mathbf{r}^{(13)} \times \mathbf{m}_{i1} ds + \int_{l_2} \mathbf{r}^{(13)} \times \mathbf{m}_{i2} ds \right) = 0. \end{aligned}$$

Durch die entsprechende Anordnung des Gelenks  $C_2$  läßt sich auch erreichen, daß die Summe der zwei ersten bzw. der anderen Glieder der Gl. (5) auch gesondert gleich Null seien, damit kann in Kenntnis von  $M_1$  aus der ersten Zeile  $M_2$  berechnet werden.



Die Summe der anderen Glieder allein wird dann gleich Null sein, wenn für jedes  $i$  die Gleichung

$$\mathbf{a}_{13} \cdot \int_{l_0} \mathbf{r}^{(13)} \times \boldsymbol{\mu}_{i0} ds - \mathbf{f}'_{13} \cdot \left( \int_{l_1} \mathbf{r}^{(13)} \times \boldsymbol{\mu}_{i1} ds + \int_{l_2} \mathbf{r}^{(13)} \times \boldsymbol{\mu}_{i2} ds \right) = 0 \quad (6)$$

gilt.

Lösen wir  $\mathbf{f}'_{13}$  in die einstweilen unbekanntenen Komponenten

$$\mathbf{f}'_{13} = \mathbf{f}'_{13} - \mathbf{f}''_{13}$$

auf, um diesen Ausdruck in (6) eingesetzt

$$\mathbf{a}_{13} \cdot \int_{l_0} \mathbf{r}^{(13)} \times \boldsymbol{\mu}_{i0} ds - \mathbf{f}'_{13} \cdot \int_{l_1} \mathbf{r}^{(13)} \times \boldsymbol{\mu}_{i1} ds = 0 \quad (7)$$

zu erhalten. Nach Abb. 7 gilt

$$\mathbf{r}^{(13)} = O_{13} A_0 \mathbf{e}_{13} + \boldsymbol{\rho}^{(0)}, \quad \boldsymbol{\mu}_{i0} = \boldsymbol{\psi}_{i0} \times \boldsymbol{\rho}^{(0)},$$

daher ist

$$\mathbf{a}_{13} \cdot \int_{l_0} \mathbf{r}^{(13)} \times \boldsymbol{\mu}_{i0} ds = \mathbf{a}_{13} \cdot \int_{l_0} \boldsymbol{\rho}^{(0)} \times (\boldsymbol{\psi}_{i0} \times \boldsymbol{\rho}^{(0)}) ds = \mathbf{a}_{13} \cdot \mathbf{J}_{A_0}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{i0}.$$

$\mathbf{J}_{A_0}^{(0)}$  ist der auf Punkt  $A_0$  bezogene Tensor des Trägerabschnitts  $T_0$ . Die früher benutzte Beziehung

$$\boldsymbol{\psi}_{ij} = \boldsymbol{\psi}_{xj} + \Delta\boldsymbol{\psi}_1 \mathbf{t}_1$$

ermöglicht, statt (7) zwei Gleichungen anzuschreiben:

$$\mathbf{a}_{13} \cdot \mathbf{J}_{A_0}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{x0} - \mathbf{f}'_{13} \cdot \mathbf{v}_{x1} = c_1 - \mathbf{f}'_{13} \cdot \mathbf{v}_{x1} = 0 \quad (8.1)$$

$$\mathbf{a}_{13} \cdot \mathbf{J}_{A_0}^{(0)} \cdot \mathbf{t}_1 - \mathbf{f}'_{13} \cdot \mathbf{v}_{r1} = c_2 - \mathbf{f}'_{13} \cdot \mathbf{v}_{r1} = 0. \quad (8.2)$$

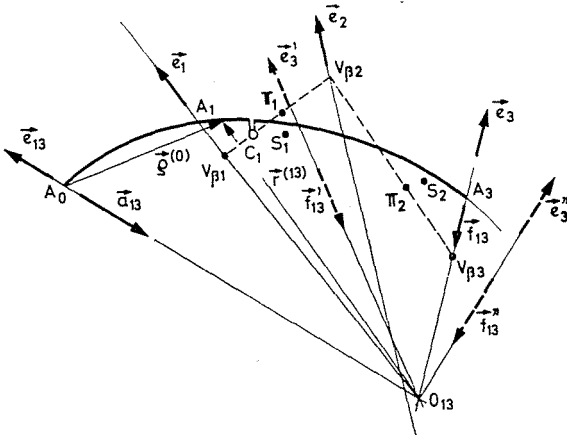


Abb. 7. Der Trägerabschnitt  $A_0 A_1 A_3$

Hier sind

$$\int_{l_i} \mathbf{t}_1 \times \rho^{(1)} ds = \int_{l_i} \mathbf{t}_1 \times \rho^{(0)} ds = \tau_{i1} \mathbf{k}$$

und

$$\int_{l_i} \mathbf{r}^{(pk)} \times (\mathbf{t}_1 \times \rho^{(1)}) ds = \nu_{r1}^{(pk)}.$$

Die Reziprovvektoren

$$\nu_{z1}^{(13)*} = \frac{\nu_{z1}^{(13)} \times \mathbf{k}}{\mathbf{k} \nu_{z1}^{(13)} \nu_{r1}^{(13)}}, \quad \nu_{r1}^{(13)*} = \frac{\mathbf{k} \times \nu_{z1}^{(13)}}{\mathbf{k} \nu_{z1}^{(13)} \nu_{r1}^{(13)}}$$

eingeführt, erhält man

$$\mathbf{f}'_{13} = c_1 \nu_{z1}^{(13)*} + c_2 \nu_{r2}^{(13)*}.$$

Das Gesagte läßt sich auch leicht veranschaulichen. Es seien nämlich der Angriffspunkt der Resultierenden  $\mathbf{u}_{13,0}$  Punkt  $\Pi_0$  (Abb. 8) und der Angriffspunkt der Resultierenden  $\mathbf{w}_{13,1}$  der Punkt  $\Pi'_1$ . Da nachgewiesen ist, daß Gl. (7) für jedes Vektorenpaar  $\psi_{i0}, \psi_{i1}$  gültig ist, wird sie auch für die durch die gebrochene Linie  $A_0 \Pi_0 V'_{z1} C_1 V'_{z2}$  bestimmten Vektoren  $\psi'_{z0}$  und  $\psi'_{z1}$  gelten. Das ist jedoch nur möglich, wenn Punkt  $\Pi'_1$  in der Geraden  $V'_{z1} C_1$  liegt; das bedeutet, daß die Wirkungslinie von  $\mathbf{f}'_{13}$  durch den auf  $S_1$  bezogenen Antipol  $V_1$  dieser Geraden geht. Andererseits ist

$$\psi_{ij} = \psi'_{zj} + \Delta \psi' \mathbf{t}_1,$$

also gilt

$$\mathbf{t}_1 \times (\rho_{u_{13,0}}^{(0)} \mathbf{u}_{13,0} + \rho_{w_{13,1}}^{(0)} \mathbf{w}_{13,1}) = \mathbf{t}_1 \times \rho_{b'_{01}}^{(0)} \mathbf{b}'_{01} = \mathbf{0},$$

mit

$$\mathbf{b}'_{01} = \mathbf{u}_{13,0} + \mathbf{w}'_{13,0}.$$

Das bedeutet, daß der Angriffspunkt von  $\mathbf{b}'_{01}$  im Schnittpunkt der Geraden  $\Pi_0 \Pi'_1$  und  $A_0 C_1$  ist. Daraus läßt sich die Größe von  $\mathbf{f}'_{13}$  berechnen.

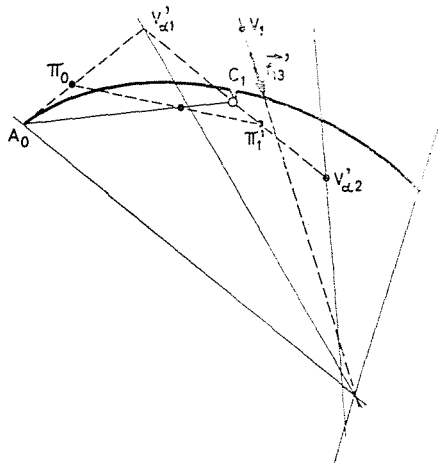


Abb. 8. Die Bestimmung des Angriffspunktes des Vektors  $\mathbf{b}'_{01}$

In Kenntnis dieser erhält nun (6) die Form:

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_{13}'' \cdot \int_{l_1} \mathbf{r}^{(13)} \times \boldsymbol{\mu}_{i1} ds - \mathbf{f}_{13} \cdot \int_{l_2} \mathbf{r}^{(13)} \times \boldsymbol{\mu}_{i2} ds = \\ & = \psi_{i1} \cdot \int_{l_1} \boldsymbol{\rho}^{(1)} \times \mathbf{m}_f^{(13)} ds - \psi_{i2} \cdot \int_{l_2} \boldsymbol{\rho}^{(2)} \times \mathbf{m}_f^{(13)} ds = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Durch diese Gleichung wird ausgedrückt, daß das  $\psi_{i1}$ -fache des für die Wirkungslinie  $\mathbf{n}_{i1}$  des auf dem Abschnitt  $T_1$  linear verteilten Vektorensystems

$$\mathbf{m}_f^{(13)} = -\mathbf{f}_{13}'' \times \mathbf{r}^{(13)}$$

berechneten Moments und das  $\psi_{i2}$ -fache des für die Wirkungslinie  $\mathbf{n}_{i2}$  des auf dem Abschnitt  $T_2$  linear verteilten Vektorensystems

$$\mathbf{m}_f^{(13)} = -\mathbf{f}_{13} \times \mathbf{r}^{(13)}$$

berechneten Moments einander gleich sind. Der Ort der Resultierenden  $\mathbf{w}_{13,1}''$  des ersten Vektorensystems ist der auf den Schwerpunkt  $S_1$  bezogene Antipol  $\Pi_1''$  der den Punkt  $O_{13}$  kreuzenden und mit  $\mathbf{e}_3''$  bezeichneten Geraden, der Ort der Resultierenden  $\mathbf{w}_{13,2}$  des zweiten Vektorensystems der auf den Schwerpunkt  $S_2$  bezogene Antipol  $\Pi_2$  der Geraden  $O_{13}A_3$ .

Da die gebrochene Linie  $C_1V_{i2}C_2$  das für den Vektor  $\mathbf{e}_2$  gezeichnete Seilpolygon ist, mit den Seilvektoren  $\psi_{i1}$ , und  $\psi_{i2}$ , wobei  $\overrightarrow{C_1C_2} = C_1C_2\mathbf{t}_2$  die Culmannsche Gerade darstellt, gelten nach Abb. 9

$$\psi_{i1} = \psi_{\beta 1} + \Delta\psi_2\mathbf{t}_2,$$

$$\psi_{i2} = \psi_{\beta 2} + \Delta\psi_2\mathbf{t}_2.$$

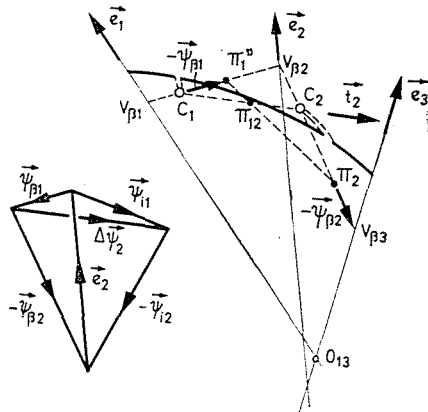


Abb. 9. Die Bestimmung des Gelenks  $C_2$

Kreuzen die Gerade  $C_1V_{\beta_2}$  den Punkt  $II''_1$  in Abb. 9 und die Gerade  $V_{\beta_2}V_{\beta_3}$  den Punkt  $II_2$ , werden die so angegebenen Vektoren  $\psi_{\beta_1}$  und  $\psi_{\beta_2}$  die Gleichung (9) gewiß befriedigen und  $C_2$  wird in der Geraden  $V_{\beta_2}II_2$  liegen. Ferner, da

$$\rho_{w_{13,2}}^{(2)} = \rho_{w_{13,2}}^{(1)} - \overline{C_1C_2}t_2$$

und der Angriffspunkt der Resultierenden

$$b_{12} = w'_{13,1} + w_{13,2}$$

der Punkt  $II_{12}$  ist, nimmt (9) nachdem  $\psi_{\beta_1}$  und  $\psi_{\beta_2}$  bestimmt wurden, die folgende einfache Form an:

$$\begin{aligned} t_2 \cdot [(\rho_{w'_{13,1}}^{(1)} w''_{13,1} + \rho_{w_{13,2}}^{(2)} w_{13,2}) \times \mathbf{k}] = \\ = [t_2 \times (\rho_{w'_{13,1}}^{(1)} w''_{13,1} + \rho_{w_{13,2}}^{(1)} w_{13,2})] \cdot \mathbf{k} = (t_2 \times \rho_{b_{12}}^{(1)} b_{12}) \cdot \mathbf{k} = 0. \end{aligned}$$

Dies kann jedoch nur gültig sein, wenn  $t_2$  parallel zu  $\rho_{b_{12}}^{(1)}$  ist, d. h. wenn  $C_2$  in der Geraden  $C_1II_{12}$  liegt. Der Ort von  $C_2$  ist somit durch den Schnittpunkt der Geraden  $V_{\beta_2}II_2$  und  $C_1II_{12}$  eindeutig bestimmt.

In ähnlicher Weise fortschreitend werden Schritt für Schritt die Orte sämtlicher Gelenke ermittelt. Die Lage des Gelenks  $C_{j-1}$  läßt sich im allgemeinen mit Hilfe der für den Trägerabschnitt  $A_0A_1A_j$  angeschriebenen Grundgleichung bestimmen, nach dem in Punkt 22 dargelegten Gedankengang.

Bei veränderlichen Querschnitten bleibt die Berechnung im wesentlichen unverändert, vorausgesetzt, daß die Stabebene auch weiterhin die Schwerpunkt-Trägheitshauptebene sämtlicher Querschnitte ist. In diesem Falle kann selbstverständlich das veränderliche Moment zweiter Ordnung  $I = I(s)$  nicht vor das Integralzeichen ausgeklammert werden; das bedeutet, daß die Berechnung der Schwerpunkte bzw. der geometrischen Größen in Verbindung mit dem Trägheitstensor (Pol-Antipolare) der Kurvenabschnitte auf die Kurve mit dem »Gewicht«  $\frac{ds}{I} = d\mu$  zu beziehen ist.

### Zusammenfassung

Im Beitrag wird die Berechnung des Kräftespiels von durchlaufenden, eben gekrümmten Stäben behandelt, wo die Stützebenen der Rollenauflagerungen auf die Stab- und die Belastungsebene senkrecht stehen, zueinander jedoch nicht parallel sind. Als Grundsystem wird der sich durch die Einfügung von Gelenken ergebende statisch bestimmte Träger benutzt. Zweck der Berechnung ist, die Gelenke so anzuordnen, daß sich die Berechnung der Gelenkmomente auf die Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten zurückführen läßt.

**Literatur**

1. SÁLYI, I.: Ergänzender Beitrag zur Theorie der Durchlaufträger.\* Akadémiai Közlemények, 1953
2. MOLNÁR, B.: Untersuchung der durchlaufenden, geraden Stäbe.\* Doktorarbeit. Technische Universität Budapest, 1963
3. SÁLYI, B.: Untersuchung des geschlossenen Rahmenwerks in Ebene. Periodica Polytechnica, 1963

Dr. Béla SÁLYI 1450 Budapest, Postfach 93. Ungarn.

\* In ungarischer Sprache.