

UNTERSUCHUNGEN DER AUF MESSERGEBNISSEN BERUHENDEN NÄHERUNGSFUNKTIONEN

Von

G. HALÁSZ

Lehrstuhl für Wasserkraftmaschinen, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 10. November 1972)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. VARGA

Bezeichnungen

ε, η, ξ	Zufallsveränderlichen
$\varepsilon \in N(0, \sigma)$	Zufallsveränderliche mit dem Erwartungswert 0, der Standardabweichung σ und von normaler Verteilung
x, y	physikalische Veränderlichen
$M(\varepsilon)$	Erwartungswert
$M(\xi x_j)$	bedingter Erwartungswert im Falle $x = x_j$
$\varphi(z, m_j, \sigma_j)$	Dichtefunktion der Zufallsveränderlichen mit dem Erwartungswert m_j , der Standardabweichung σ_j und von normaler Verteilung
$f(z)$	Dichtefunktion
$f^*(z)$	empirische Dichtefunktion
F	Fourier-Transformation
F^{-1}	inverse Fourier-Transformation
i	imaginäre Einheit

I. Einleitung

Im Laufe der Verarbeitung von Meßergebnissen entsteht oft die Notwendigkeit, die zwischen den gemessenen physikalischen Bezeichnungen bestehenden Zusammenhänge durch mathematische Formeln auszudrücken. Bei der Aufstellung der Zusammenhänge muß in Betracht gezogen werden, daß die Meßergebnisse mit Fehlern behaftet sind. Die Meßfehler ergeben sich aus systematischen und Zufallsfehlern und es erweist sich als zweckmäßig, diese durch wahrscheinlichkeitsrechnerische Begriffe zu definieren [2]. Es sei die zwischen dem genauen physikalischen Wert und dem Meßergebnis bestehende Differenz durch die Zufallsveränderliche ε gekennzeichnet. Als systematischer Fehler wird der Erwartungswert $M(\varepsilon)$ betrachtet, während der Zufallsfehler als die Schwankung um den Erwartungswert aufgefaßt wird:

$$\eta = \varepsilon - M(\varepsilon).$$

Der systematische Fehler kann mit Meßgeräten genügender Genauigkeit annähernd auf Null vermindert werden. Jedes Meßergebnis ist durch Zufallsfehler belastet, zu deren Charakterisierung — in Anlehnung an praktische Erfahrungen und an den zentralen Grenzverteilungssatz — angenommen werden kann, daß sie Zufallsveränderlichen mit normaler Verteilung und vom Erwartungswert Null seien.

Bei der Aufstellung von auf Meßergebnissen beruhenden Zusammenhängen wird in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle die Methode der kleinsten Quadrate verwendet. Der sich auf die Methode beziehende Satz von GAUSS—MARKOW enthält auf Grund des Beweises von RÉNYI [1] folgende Bedingungen und Behauptung:

Es soll eine physikalische Erscheinung betrachtet werden, die durch die Veränderlichen x und y gekennzeichnet wird. Bei festgesetzten Werten von x werden Messungen zwecks Bestimmung von y vorgenommen und es wird folgendes angenommen:

1. Die Meßergebnisse sind als Zufallsveränderlichen unabhängig.
2. Zwischen den Veränderlichen x und y besteht der funktionelle Zusammenhang $y(x)$, der linear ist oder durch Transformation linearisiert werden kann. Die in diesem Zusammenhang vorkommenden unbekanntenen Konstanten sollen aus Messungen schätzungsmäßig bestimmt werden.
3. Bei der Messung können die Werte von x genau eingestellt werden, die Werte von y sind durch Zufallsfehler mit dem Erwartungswert Null und von normaler Verteilung belastet.

Unter diesen Bedingungen sind die nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzten Konstanten die verzerrungsfreien Schätzungen der tatsächlichen physikalischen Mengen.

Die Bedingungen dieses Satzes von dem Gesichtspunkt der technischen Anwendung aus analysiert, kann festgestellt werden, daß sich bei der Befriedigung der zweiten und dritten Bedingung Schwierigkeiten einstellen. Was die zweite Bedingung anbelangt, ist diese für die Aussage des Satzes unentbehrlich, da sie die Existenz der aus der Messung zu bestimmenden Konstanten festlegt; in Ermangelung dieser Bedingung besagt der Satz nichts über die Eigenschaften der Schätzung. In praktischen Fällen kommt es jedoch verhältnismäßig selten vor, daß die Art der Beziehung zwischen den physikalischen Veränderlichen genau bekannt ist. Oft geben die Messungen über den Charakter der Beziehung Aufschluß.

Die dritte Bedingung erfordert, daß bloß die abhängige Veränderliche y durch einen Meßfehler belastet sei, während die unabhängige Veränderliche x genau eingestellt werden kann. In der überwiegenden Mehrzahl der technischen Aufgaben ist sowohl die abhängige, wie auch die unabhängige Veränderliche je ein Meßergebnis und somit sind beide fehlerbehaftet.

Es ist zu erkennen, daß in der Praxis selten Bedingungen gesichert werden können, die die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate rechtfertigen, und auch das Fachschrifttum des Themas bietet keine allgemeinere Methode.

Ist der exakte Zusammenhang $y(x)$ zwischen den Veränderlichen nicht bekannt, muß zur Annäherung gegriffen werden. VINCZE [3] bedient sich zur Bestimmung der Konstanten der Näherungsfunktion der Methode der kleinsten

Quadrate, die er durch weitere statistische Kontrollen ergänzt: er führt die qualitative Analyse von meßfehlerartigen Größen vor, die sich aus der Abweichung voneinander der Näherungsfunktion und des Meßpunktes ergeben, und schlägt vor, die Nullizität der Fehlerverteilung nach den Methoden der Hypothesen-Untersuchung zu kontrollieren. LINNIK [4] untersucht die Näherung mit Polynomen und prüft durch die Einführung einer geeigneten Statistik die Annehmbarkeit der parabolischen Näherung n -ten Grades.

Man erhält für die Erwägung der Annehmbarkeit einer Näherungsfunktion einen wichtigen Anhaltspunkt, wenn das Maximum der Abweichung voneinander der exakten und der annäherenden Funktion geschätzt werden kann. Zur Lösung dieses Problems wird im vorliegenden Aufsatz eine Methode vorgeschlagen.

2. Formulierung und prinzipielle Lösung der Aufgabe

Es soll ein durch den funktionellen Zusammenhang $y(x)$ gekennzeichneteter physikalischer Vorgang untersucht werden, wobei angenommen wird:

1. Zwischen den physikalischen Veränderlichen x und y besteht ein eindeutiger funktioneller Zusammenhang $y(x)$ von mangelhaft oder gar nicht bekanntem Typ.

2. Bei festgesetzten $x_j; j = 1, 2 \dots n$ Werten werden für die Veränderliche y Messungen vorgenommen. Die Werte $\{x_j\}_{j=1}^n$ können genau eingestellt werden, die gemessenen Werte $\{y_j\}_{j=1}^n$ sind durch Zufallsfehler belastet, die Zufallsveränderlichen mit dem Erwartungswert Null und von normaler Verteilung sind.

3. Die gemessenen Werte $\{y_j\}_{j=1}^n$ sind — als Zufallsveränderlichen — unabhängig.

4. Die unbekannt Funktion $y(x)$ wird mit der bekannten Funktion $g(x)$ angenähert. Mit der Bezeichnung der Differenz-Funktion $\delta(x)$ gilt:

$$\delta(x) = y(x) - g(x). \quad (1)$$

Es wird angenommen, daß $\delta(x)$ im untersuchten Intervall stetig ist. Das Ziel ist, in dem untersuchten Meßbereich das Maximum und das Minimum von $\delta(x)$ mit gegebener Wahrscheinlichkeit zu schätzen. Dadurch kann um die Näherungskurve jener streifenförmige Bereich angegeben werden, der die Kurve des unbekanntes Zusammenhanges $y(x)$ mit gegebener Wahrscheinlichkeit enthält. In Kenntnis der Abmessungen des Streifens kann entschieden werden, ob die Näherung $g(x)$ anwendbar ist.

Es soll bemerkt werden, daß die Bestimmungsmethode der Näherungsfunktion $g(x)$ im weiteren keine Rolle spielt. Ihr Typ wird auf Grund der theoretischen und experimentellen Untersuchungen der betreffenden Vorgänge ausgewählt, die eventuell unbekanntes Konstanten werden z. B. nach der Methode

der kleinsten Quadrate geschätzt. Es genügt auch, die gemessenen Werte darzustellen und die Näherungsfunktion graphisch festzulegen. Im weiteren wird angenommen, daß $g(x)$ eine bekannte Funktion ist.

Die als Ziel gesetzte Schätzung läßt sich mit Hilfe folgenden Gedankenganges erreichen:

Es sei $\varepsilon \in N(0, \sigma)$ eine Zufallsveränderliche mit dem Charakter eines die Meßergebnisse $\{y_j\}_{j=1}^n$ belastenden Zufallsfehlers, deren einzelne Realisationen als Differenzen der gemessenen und exakten Werte enthalten werden:

$$\varepsilon_j = y_j - y(x_j), \quad j = 1, 2 \dots n. \quad (2)$$

Die Menge $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$ ist nicht bekannt, jedoch können in jedem Punkt die Abweichungen voneinander der Werte der Näherungsfunktion $g(x)$ und von y_j bestimmt werden:

$$\xi_j = y_j - g(x_j), \quad j = 1, 2 \dots n. \quad (3)$$

Auf Grund der Formel (1) kann geschrieben werden:

$$\xi_j = y_j - y(x_j) + \delta(x_j), \quad j = 1, 2 \dots n.$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhanges (2) des Zufallsfehlers, erhält man:

$$\xi_j = \varepsilon_j + \delta(x_j), \quad j = 1, 2 \dots n. \quad (4)$$

Die Menge $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ kann als eine Stichprobe aus n Elementen für die Zufallsveränderliche ξ behandelt werden. Aus dem Zusammenhang (4) ist zu entnehmen, daß bei festgesetztem $x = x_j$ ξ eine Zufallsveränderlichen von normaler Verteilung mit dem bedingten Erwartungswert:

$$M(\xi|x_j) = m_j = \delta(x_j), \quad j = 1, 2 \dots n \quad (5)$$

ist.

Wenn x den Meßbereich $[\min x_j, \max x_j]$ durchläuft, kann sich der Erwartungswert der Veränderlichen ξ von Punkt zu Punkt ändern, also entsteht die Dichtefunktion $f(z)$ der Veränderlichen ξ als eine Mischung der Dichtefunktionen der normalen Verteilung $q(z, m_j, \sigma_j)$. In Verbindung mit den Mischverteilungen stellt die Frage des sogenannten Zerlegens auf Komponenten — siehe [5], [6] — ein gelöstes Problem dar, wo in Kenntnis von $f(z)$ die Komponenten $q(z, m_i, \sigma_j)$ gesucht werden. Es soll ausgenutzt werden, daß diese Aufgabe auflösbar ist.

Aus der unter Anwendung des Zusammenhanges (3) berechenbaren Stichprobe $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ kann das Hystogramm $f^*(z)$ aufgebaut werden, das nach den Gleichungen (4) und (5) als Mischung von höchstens n Dichtefunktionen von normaler Verteilung und mit dem Erwartungswert $\delta(x_j)$ entsteht.

Durch das Zerlegen des Mischhystogrammes $f^*(z)$ auf seine Komponenten und die Bestimmung der Erwartungswerte der einzelnen Komponenten erhält man die Ordinatenwerte der Funktion $\delta(x)$. Nach Auswahl des Minimums M_1 und des Maximums M_2 der Erwartungswerte kann aufgeschrieben werden:

$$M_1 \leq \delta(x) \leq M_2, \quad x \in [\min_j x_j; \max_j x_j]. \quad (6)$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhanges (1) erhält man:

$$g(x) + M_1 \leq y(x) \leq g(x) + M_2. \quad (7)$$

Somit ist die gewünschte Schätzung erreicht: um die Näherungsfunktion $g(x)$ wurde der streifenförmige Bereich konstruiert, der die Kurve der unbekannt Funktion $y(x)$ enthält.

Bei der Zerlegung der Misch-Dichtefunktion auf Komponenten läßt sich neben dem Erwartungswert auch die Standardabweichung abschätzen und nach der Methode der Anpassungsuntersuchung kann kontrolliert werden, ob bei gegebener Signifikanz die Stichprobe $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ als aus einer Verteilung mit den geschätzten Parametern stammend betrachtet werden darf.

3. Methode der numerischen Lösung

Von den zahlreichen Methoden zur praktischen Ausführung der Zerlegung auf Komponenten war es zweckmäßig eine zu wählen, die gegen die Ungenauigkeiten des Hystogramms weniger empfindlich ist. Eine solche wird in der Abhandlung [6] von MEDGYESSY und VARGA beschrieben. Die Grundidee ist auch schon in Abhandlung [5] zu finden, das ist die sogenannte Methode der Standardabweichungsverminderung. Die zu analysierende Dichtefunktion $f(z)$ ist die mit p_k gewogene Mischung der Dichtefunktion $\varphi(z, m_k, \sigma_k)$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^N p_k \varphi(z, m_k, \sigma_k). \quad (8)$$

Nehmen wir an, daß in Kenntnis von $f(z)$ die sogenannte Testfunktion aufgestellt werden kann:

$$f_t(z, \lambda) = \sum_{k=1}^N p_k \varphi(z, m_k, \sigma_k - \lambda),$$

wo λ ein reeller Parameter und $\lambda < \min_k \sigma_k$ ist. Die Testfunktion $f_t(z, \lambda)$ ist die Superposition solcher Gauss-Funktionen, deren Erwartungswerte jenen der Komponenten von $f(z)$ gleich sind, doch sind sie steiler und höher, somit vermischen sie sich nach der Superposition weniger. Bei der Wahl eines geeigneten λ -Wertes heben sich die einzelnen Komponenten nadelartig heraus.

Zur Konstruktion der Testfunktion wird von MEDGYESSY in Abhandlung [5] folgende Methode vorgeschlagen: Es wird die Fourier-Transformation von $f(z)$ gebildet:

$$F\{f(z)\} = \psi(\omega).$$

Es kann bewiesen werden, daß — wenn F^{-1} die inverse Fourier-Transformation ist — die Testfunktion mit dem Zusammenhang aufgestellt werden kann:

$$f_t(z, \lambda) = F^{-1}\{\exp(\lambda^2\omega^2/2)\psi(\omega)\}.$$

Das aus einer endlichen Zahl von Stichproben konstruierte Hystogramm kann nicht als genau betrachtet werden. In Abhandlung [6] werden die Fehler so aufgefaßt, als wenn die genaue Dichtefunktion $f(z)$ durch die Realisation $v(z)$ eines Geräuschvorganges $\eta(z)$ überlagert wäre, also stehen anstatt der Werte von $f(z)$ die Werte von $f^*(z) = f(z) + v(z)$ zur Verfügung.

Somit wird die Fourier-Transformation an der Funktion $f^*(z)$ durchgeführt:

$$\psi^*(\omega) = \int_z^{\beta} f^*(z) \exp(i\omega z) dz, \quad (9)$$

wo

$$z = \min_j \{\xi_j\}_{j=1}^n$$

und

$$\beta = \max_j \{\xi_j\}_{j=1}^n$$

sind.

Wird das so erhaltene Spektrum $\psi^*(\omega)$ durch einen geeignet gewählten, einparametrischen Filter $D(\omega, \omega_0)$ filtriert und danach die inverse Transformation durchgeführt, erhält man bei der teilweisen Behebung der störenden Geräuschwirkung die Näherungsfunktion $f_t^*(z, \lambda)$ der Testfunktion $f_t(z, \lambda)$:

$$f_t^*(z, \lambda) = F^{-1}\{\exp(\lambda^2\omega^2/2)\psi^*(\omega) \cdot D(\omega, \omega_0)\}. \quad (10)$$

Aus den Zusammenhängen (9) und (10) erhält man durch Umstellen nach SIMONYI [8] eine für numerische Zerlegung geeignete Formel:

Es seien

$$a(\omega) = \int_z^{\beta} f^*(z) \cos \omega z dz,$$

$$b(\omega) = \int_z^{\beta} f^*(z) \sin \omega z dz.$$

Unter Anwendung dieser Ausdrücke ergibt sich für die Testfunktion der Zusammenhang

$$f_t^*(z, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \{a(\omega) \cos \omega z + b(\omega) \sin \omega z\} \exp(\lambda^2\omega^2/2) d\omega. \quad (11)$$

Im weiteren soll die numerische Anwendung der Ergebnisse des vorliegenden Aufsatzes mit Hilfe der Meßergebnisse in [7] und der dort definierten Näherungsfunktion gezeigt werden. Nach [7] steht die mit dem Zusammenhang (3) berechnete Stichprobe $\{\xi_j\}_{j=1}^{119}$ zur Verfügung; die daraus konstruierte

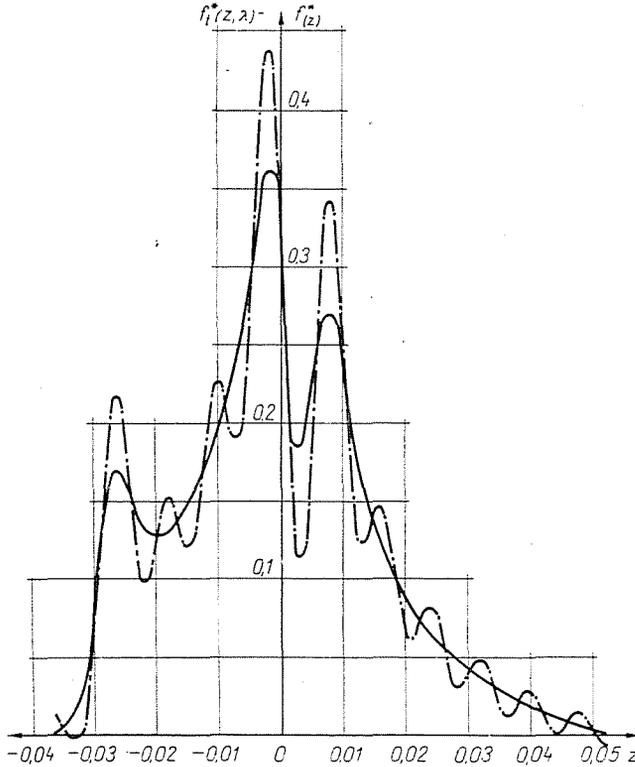


Abb. 1

empirische Dichtefunktion $f^*(z)$ ist in Abb. 1 mit ausgezogener Linie dargestellt. Mit Hilfe des Zusammenhanges (11) kann bei der Wahl geeigneter Werte für ω_0 und λ aus dieser die Testfunktion $f_l^*(z, \lambda)$ bestimmt werden. Für den Fall, daß der die empirische Dichtefunktion belastende Fehler nicht bekannt ist, wird in [6] der aus der Aufzeichnung des Spektrums bestimmbare Wert ω_0 vorgeschlagen. Nach dieser Methode wurde bei der Wahl der Parameter $\omega_0 = 8$ und $\lambda = 0,2$ die mit strichpunktierter Linie ausgezogene Kurve $f_l^*(z, \lambda)$ in Abb. 1 gewonnen.

Es läßt sich feststellen, daß die Erwartungswerte der wichtigen Komponenten aus dem Diagramm gut zu erkennen sind, wobei sich als minimaler Erwartungswert $M_1 = -2,65 \cdot 10^{-2}$ ergibt. M_2 kann nicht mit der gleichen

Sicherheit bestimmt werden. Der rechtsseitige, langsam abfallende Kurvenzweig der empirischen Dichtefunktion $f^*(z)$ wurde durch das Verfahren in einige weniger gewichtige Gauss-Kurven zerlegt, deren Zahl und Erwartungswerte — wie das aus einigen mit verschiedenen ω_0 -Werten durchgeführten Berechnungen hervorgeht — von der Wahl von ω_0 abhängen.

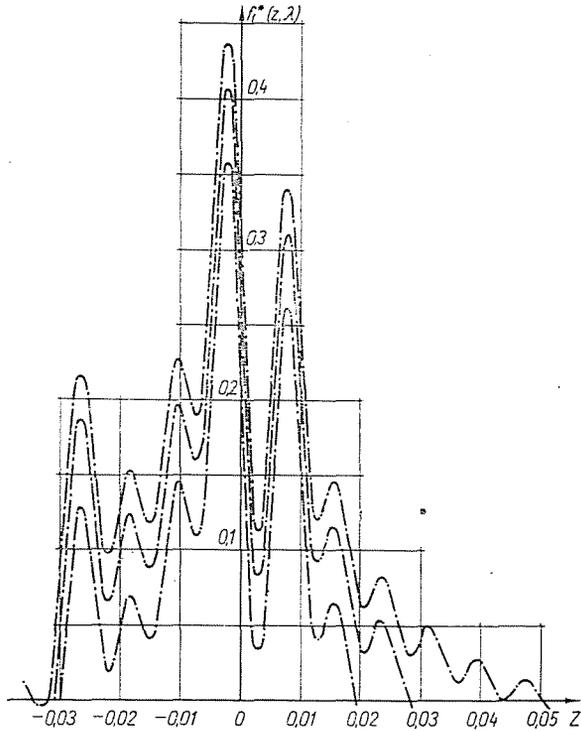


Abb. 2

Es wurde versucht, die Rolle der ungewissen Komponenten in der Erzeugung der Mischverteilung zu ermitteln. Dazu wurde die Funktion $f^*(z)$ in zwei Stufen abgekürzt und unter Berücksichtigung nur der Ordinaten über 0,03 sowie 0,08 die Zerlegung wiederholt. In Abb. 2 sind die aus der originalen und den beiden abgekürzten Funktionen darstellbaren kurven der Testfunktionen erhalten.

Aus der nahezu parallelen Verschiebung ist zu erkennen, daß die vernachlässigten Komponenten keine wesentliche Rolle in der Erzeugung der Mischung spielen. Somit ergibt sich für M_2

$$M_2 = 1,6 \cdot 10^{-2}.$$

Aus Abhandlung [7] ist es bekannt, daß der Wertevorrat der Näherungsfunktion $g(x)$ in das Intervall $[0,6; 1,2]$ fällt, daher ist der streifenförmige Bereich

$$g(x) - 0,026 \leq y(x) \leq g(x) + 0,016$$

genügend eng und somit die Näherung annehmbar.

Zum Abschluß sollen noch einige ergänzenden Bemerkungen hinzugefügt werden:

a) Eine weitere Untersuchung ist erforderlich, um die Rolle der Lasten p_k in der Definition (8) der Misch-Dichtefunktion zu klären. Es ist zu erwarten, daß daraus weitere Informationen über das Verhalten der Funktion $\delta(x)$ erhalten werden.

b) Die Parameter der wenig gewichtigen Komponenten hängen stark von dem Kennwert ω_0 des Filters $D(\omega, \omega_0)$ ab. Es wäre zweckmäßig, die Wahl von ω_0 genauer festzulegen, eventuell eine andere Zerlegungsmethode anzuwenden.

c) Es ist ungeklärt, welche Stichprobengröße notwendig ist, um das Misch-Hystogramm mit der erforderlichen Genauigkeit zu konstruieren. Durch diese Schätzung würde die Zahl der notwendigen Meßpunkte bestimmt werden.

Zusammenfassung

Der Aufsatz beschäftigt sich mit der Untersuchung von auf Meßergebnissen beruhenden Näherungsfunktionen. Es wird angenommen, daß der gemessene Vorgang durch den funktionellen Zusammenhang $y(x)$ gekennzeichnet werden kann, dessen Typ unbekannt ist und mit der auf Grund von Meßergebnissen bestimmten Funktion $g(x)$ angenähert wird. Es wird bewiesen, daß die aus der Abweichung voneinander des Meßwertes und der Näherungsfunktion ausgewertete statistische Stichprobe für eine Mischverteilung kennzeichnend ist, und daß durch die Zerlegung der empirischen Dichtefunktion in Komponenten eine Schätzung für die untere und obere Schranke der Abweichungen voneinander von $y(x)$ und $g(x)$ gewonnen wird. Auf Grund dieser Schätzung kann entschieden werden, ob die gewählte Näherungsfunktion $g(x)$ den Anforderungen entspricht.

Literatur

1. RÉNYI, A.: Valószínűségszámítás (Wahrscheinlichkeitsrechnung), Budapest, 1954.
2. ROSENGARD, A.: Cours de statistique appliquée, Paris, 1966
3. VINCZE, I.: Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal (Mathematische Statistik mit industriellen Anwendungen), Budapest, 1968
4. LINNIK, J. V.: Methode des moindres carrées, Paris, 1963
5. MEDGYESSY, P.: MTA Alk. Mat. Int. Közleményei II., 195 (1963)
6. MEDGYESSY, P.—VARGA, L.: MTA Mat. Fiz. Osztály Közleményei, 18, 31 (1968)
7. HALÁSZ, G.: Járókerékre ható axiális erő meghatározása a résáramlás modellezésével. Doktori értekezés (Bestimmung der auf das Laufrad wirkenden axialen Kraft durch Modellieren der Spaltströmung. Dr. techn. Thesis), 1971
8. SIMONYI, K.: Elméleti villamosságtan (Theoretische Elektrizitätslehre), Budapest, 1958

Gábor HALÁSZ, 1502 Budapest, Postfach 91, Ungarn