

STOFFÜBERTRAGUNG IN KOKURRENTER STRÖMUNG BEI NICHT NEWTONSCHEN FLÜSSIGKEITEN

Von

B. PALÁNCZ

Lehrstuhl für Chemisches Maschinenwesen und Landwirtschaftliche Industrien,
Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 6. April 1971)

Vorgelegt von Prof. Dr. S. SZENTGYÖRGYI

Einleitung

In der chemischen und Lebensmittelindustrie gibt es eine bedeutende Anzahl von Stoffen, deren rheologisches Verhalten vom Newtonschen Strömungsgesetz abweicht, d. h. wo die Beziehung zwischen Spannungs- und Formveränderungszustand nicht homogen linear ist. In solchen Fällen wird die mathematische Formulierung der Impuls- und somit auch der Stofftransportgleichungen ziemlich kompliziert. Dies ist die Erklärung dafür, daß sich mit dem Stoffübergang zwischen nicht Newtonschen Flüssigkeiten und Gasphase bis jetzt verhältnismäßig wenige befaßt haben.

Nachstehend soll ein zweidimensionelles, aus ebener Strömung ausgehendes, von POTTER [1] aufgestelltes Stoffübergangsmodell für eine nicht Newtonsche Ostwald-de Waelesche Flüssigkeit untersucht und eine dimensionslose Beziehung abgeleitet werden.

Als Ausgangsbedingungen sollen folgende gestellt werden:

- a) Die Berührung der beiden Phasen erfolgt an der Oberfläche der Phasengrenze, was vom Standpunkt der Stoffübertragung keinen Widerstand bedeutet.
- b) An beiden Seiten der Oberfläche der Phasengrenze befindet sich eine Grenzschicht, die einen dünnen, laminar strömenden Film bildet.
- c) Die beiden Phasen befinden sich an der Grenzoberfläche im Gleichgewicht.
- d) Ein bedeutender Anteil des Diffusionswiderstands befindet sich in der Grenzschicht.
- e) Es tritt keinerlei chemische Reaktion auf.
- f) In der Grenzschicht tritt weder Stoffaufstapelung noch -abnahme auf.
- g) Die sich aus der Stoffübertragung ergebende, auf die Phasengrenze senkrecht wirkende Geschwindigkeit ist so gering, daß sie vernachlässigt werden kann.
- h) Es handelt sich hier um einen stationären, isothermischen Zustand.

An erster Stelle soll der Impulstransport geprüft werden.

Der Impulstransport

Der Impulstransport läßt sich auf Grund der allgemeinen Transportgleichung bestimmen. Für irgendeine extensive Menge gilt als allgemeine Transportgleichung:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \nabla \left(\vartheta \bar{u} + \sum_{j=1}^m L_j \nabla \varphi_j \right) = \bar{g}_k. \quad (1)$$

Unter Berücksichtigung dessen, daß die Impulsdichte als eine vektorielle Menge betrachtet werden kann und daher das aus der Dichte des Konvektivstroms und der Strömungsgeschwindigkeit gebildete dyadische Produkt einen Tensor darstellt, und ferner, daß die Dichte des Konduktivstroms durch einen Spannungstensor ausgedrückt wird, kann die Navier-Stokes Gleichung für die laminare, stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit als

$$\varrho \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \varrho + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

aufgeschrieben werden, wobei im Falle einer dem Exponentialgesetz folgenden Flüssigkeit

$$\tau_{ij} = K[1/2 (\Delta : \Delta)]^{(n-1)/2} \Delta_{ij} \quad (3)$$

ist.

SCHOWALTER [2] zeigte, daß die Grenzschichttheorie auch im Falle einer dem Exponentialgesetz folgenden Flüssigkeit angewendet werden kann, wenn die Reynoldszahl viel größer als 1 ist. Diese Bedingung kann erfüllt werden, wenn der Wert der Verhältnisskennziffer n zwischen 0 und 2 liegt.

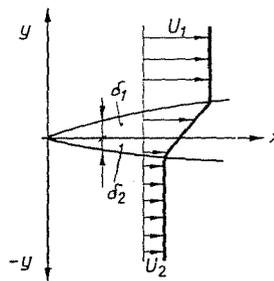


Abb. 1

Nun soll Abb. 1 betrachtet werden. Hierbei ist U_1 die Geschwindigkeit der Hauptmasse, des oberen, Newtonschen und U_2 die der Hauptmasse des unteren, nicht Newtonschen Flüssigkeitsstroms. An der Berührungsfläche der beiden Phasen ist $y = 0$, wobei die gemeinsame Geschwindigkeit u_0 beträgt.

Angenommen sei, daß die Oberfläche eben bleibt und daß die Richtung der Normalen y ist. Die der Oberfläche parallele Geschwindigkeit der beiden Phasen innerhalb der Grenzschicht sei u . Die dynamische Viskosität und Dichte der oberen Phase sei μ_1 bzw. ρ_1 , die der unteren Phase $K(\partial u/\partial y)^{n-1}$ bzw. ρ_2 . Die an der Oberfläche der Phasengrenze auftretende Schubspannung, die aus dem Unterschied der Werte U_1 und U_2 hervorgeht, beträgt τ_0 . Die Dicke der Grenzschicht beträgt δ_1 bzw. δ_2 .

Da bei den gegenwärtigen Bedingungen, wie es aus [3] hervorgeht, die Ähnlichkeitstransformation nicht angewendet werden kann, bedienen wir uns als Mittel für die Lösung des Integrierverfahrens. Die Bewegungsgleichung der Grenzschicht lautet:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy}. \quad (4)$$

Für die Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Die Integralform der Gleichungen unter Berücksichtigung der Bedingung g) schreibt sich zu:

$$\tau_0 = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} (U-u) u dy. \quad (6)$$

Somit können für den oberen und unteren Flüssigkeitsstrom folgende Beziehungen angegeben werden:

$$\tau_0/\rho_1 = \nu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{+0} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_1} (U_1 - u) u dy \quad (7a)$$

$$\tau_0/\rho_2 = \frac{K}{\rho_2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-0}^n = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{-\delta_1} (U_2 - u) u dy. \quad (7b)$$

Bei diesen Beziehungen besteht die Möglichkeit der Annäherung des Geschwindigkeitsprofils durch ein Polynom, und zwar heißt es

$$u = \sum_{i=0}^4 \alpha_i y^i. \quad (8)$$

Der Wert der Koeffizienten α_i läßt sich anhand der Randbedingungen bestimmen, die folgendermaßen lauten:

$$\begin{array}{llll}
 y = \delta_1 & u = U_1 & \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\
 y = +0 & u = u_0 & & \\
 y = -0 & u = u_0 & & \\
 y = -\delta_2 & u = U_2 & \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.
 \end{array} \quad (9)$$

Die Bedingungen enthalten diejenige Feststellung, laut welcher die Geschwindigkeit an der Phasengrenzfläche u_0 , an den Rändern der Grenzschicht U_1 und U_2 beträgt, ferner daß das Geschwindigkeitsprofil an diesen Stellen kontinuierlich ist. Eine weitere Bedingung folgt aus der Äquivalenz der an der Phasengrenzfläche angreifenden Schubspannungen, und zwar ist

$$\mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{+0} = \tau_0 = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-0}. \quad (10)$$

Werden diese Werte in die Bewegungsgleichung (4) eingesetzt und Punkt g) mit in Betracht gezogen, erhält man folgende Randbedingung:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{+0} = 0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{-0}. \quad (11)$$

Geht man z. B. aus den Bedingungen (9) und (10) aus, so läßt sich α_i für die obere Phase laut folgenden Gleichungssystems bestimmen:

$$\begin{array}{l}
 U_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_1^2 + \alpha_3 \delta_1^3 + \alpha_4 \delta_1^4 \\
 0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \delta_1 + 3\alpha_3 \delta_1^2 + 4\alpha_4 \delta_1^3 \\
 0 = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \delta_1 + 12\alpha_4 \delta_1^2 \\
 u_0 = \alpha_0 \\
 0 = 2\alpha_2
 \end{array} \quad (12)$$

Nach Lösung des Gleichungssystems ergibt sich für die Gleichung des Geschwindigkeitsprofils der oberen Flüssigkeit:

$$u = u_0 + 2(U_1 - u_0) \left(\frac{y}{\delta_1} \right) - 2(U_1 - u_0) \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^3 + (U_1 - u_0) \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^4 \quad (13)$$

bzw. in dimensionsloser Form:

$$\frac{u}{U_1} = r + (1 - r) \left[2 \left(\frac{y}{\delta_1} \right) - 2 \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^4 \right], \quad (14a)$$

wobei

$$r = u_0/U_1.$$

Im anderen Fall ist das Verfahren ganz ähnlich, so wird die Gleichung für das Geschwindigkeitsprofil für die untere Phase lauten:

$$\frac{u}{U_2} = \frac{r}{s} + \left(1 - \frac{r}{s} \right) \left[2 \left(\frac{y}{-\delta_2} \right) - 2 \left(\frac{y}{-\delta_2} \right)^3 + \left(\frac{y}{-\delta_2} \right)^4 \right], \quad (14b)$$

wobei

$$s = U_2/U_1$$

ist.

Nach Einsetzen der Gleichungen (14a) und (14b) in die Gleichungen (7a) und (7b) und nach dem Integrieren erhält man:

$$\nu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{+0} = \frac{\partial}{\partial x} [U_1^2 \delta_1 (1 - r) (74 + 115r)/630] \quad (15a)$$

$$\frac{K}{\varrho_2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-0}^n = \frac{\partial}{\partial x} [U_1^2 (-\delta_2) (s - r) (74s + 115r)/630]. \quad (15b)$$

Auf Grund der Gleichungen der Geschwindigkeitsprofile ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{+0} = U_1 (1 - r) 2/\delta_1 \quad (16a)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-0} = U_1 (s - r) 2/(-\delta_2). \quad (16b)$$

Werden die Gleichungen (15a)—(16b) miteinander verglichen, so erhält man nach dem Integrieren:

$$(\delta_2)^{n-1} = 2^n (n+1) \frac{K}{\varrho_2} x U_1^{n-2} [630/(74s + 115r)] (r - s)^{n-1} \quad (17a)$$

$$\delta_1^2 = 4r_1 x / U_1 [630/(74 + 115r)]. \quad (17b)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (10) wird:

$$\mu_1 U_1 (1 - r) 2/\delta_1 = K [U_1 (s - r) 2/(-\delta_2)]^n. \quad (18)$$

Hieraus, sowohl wie nach dem Gleichsetzen von Gl. (17a) und (17b) nach Ausdrücken von δ_1^n/δ_1 folgt:

$$\frac{(r-s)^{2n/(n+1)}}{1-r} (74s+115r)^{n/(n+1)} / (74+115r)^{1/2} = T_0 N Re_x^{(n-1)/2n(n+1)}, \quad (19)$$

wobei

$$T_0 = \left(\frac{n+1}{2} \right)^{1/(n+1)} 630^{(n-1)/2(n+1)}$$

und

$$N = \left(\frac{\mu_1}{K^{1/n}} \right)^{1/2} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2^{[(2n+1)n-1]/n(n+1)}} \right)^{1/2} U_1^{(1-n)/n} \quad (20)$$

$$Re_x = \frac{\varrho_2 U_1^{2-n} x^n}{K}$$

ist.

Der lokale Wert von τ_0 kann somit bestimmt werden und unter Berücksichtigung von Gl. (10) und (16a) gilt:

$$\frac{\tau_0}{\varrho_1 U_1^2} = (1-r) [(74+115r)/630]^{1/2} (U_1 x/\nu_1)^{-1/2}, \quad (21)$$

wobei der Reibungskoeffizient

$$\xi(r) = (1-r) [(74+115r)/630]^{1/2} \quad (22)$$

ist.

In Kenntnis der Werte $U_1, U_2, \mu_1, \varrho_1, K, n, \varrho_2$ und x können die entsprechenden Werte von r aus Gl. (19) definiert werden. Weiterhin ergibt sich mittels Kenntnis des Werts von r auch der Wert von ξ .

Für die graphische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils wird nachstehendes Verfahren angewendet.

Die Gleichungen (17a) und (17b) werden in folgender Form aufgeschrieben:

$$\delta_1 = T_1 (\nu_1 x / U_1)^{1/2} \quad (23a)$$

$$-\delta_2 = T_2 \left(\frac{K}{\varrho_2} x U_1^{n-2} \right)^{-1/(n+1)}, \quad (23b)$$

wobei

$$T_1 = [630/(74+115r)]^{1/2} \quad (24a)$$

$$T_2 = \{ [2^n(n+1)(s-r)^{n-1}] [630/(74s+115r)] \}^{1/(n+1)} \quad (24b)$$

ist.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (14a) und (14b) werden die Variablen

$$\eta_1 = (\nu_1 x / U_1)^{-1/2} y \tag{25a}$$

und

$$\eta_2 = \left(\frac{K}{\rho_2} x U_1^{n-2} \right)^{-1/(n+1)} y \tag{25b}$$

eingeführt. Diese Variablen in die Gleichungen des Geschwindigkeitsprofils eingesetzt ergeben:

$$\frac{u}{U_1} = r + (1-r) \left[2 \frac{\eta_1}{T_1} - 2 \left(\frac{\eta_1}{T_1} \right)^3 + \left(\frac{\eta_1}{T_1} \right)^4 \right] \tag{26a}$$

und

$$\frac{u}{U_1} = r + (s-r) \left[2 \frac{\eta_2}{T_2} - 2 \left(\frac{\eta_2}{T_2} \right)^3 + \left(\frac{\eta_2}{T_2} \right)^4 \right]. \tag{26b}$$

Die Gleichungen (26a) und (26b) werden in Abb. 2 dargestellt.

Im weiteren wird gezeigt, daß Gleichung (19) ziemlich allgemein ist und sich auch für Spezialfälle anwenden läßt. Zuerst soll die Newtonsche

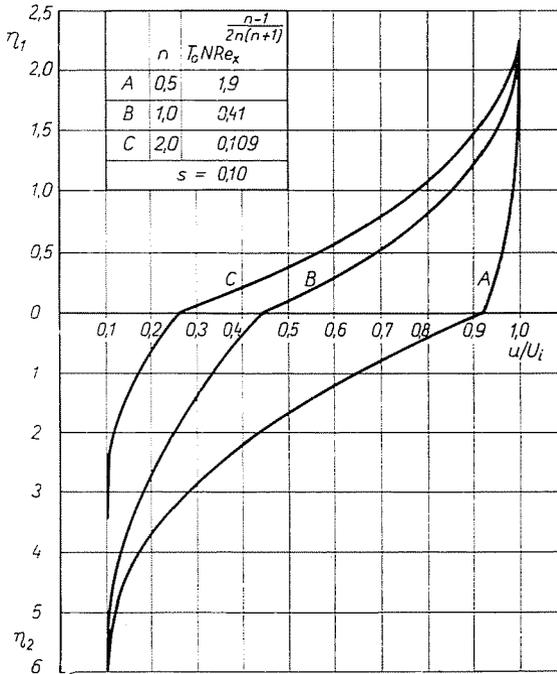


Abb. 2

Bedingung ($n = 1$, $K = \mu_2$) ohne Änderung der Randbedingungen geprüft werden. In diesem Falle gilt für Gl. (19):

$$\frac{r-s}{1-r} (74s+115r)^{1/2}/(74+115r)^{1/2} = \left(\frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_2 \varrho_2} \right)^{1/2}, \quad (27)$$

da jetzt Gl. (18) als:

$$\mu_1(1-r)/\delta_1 = \mu_2(r-s)/\delta_2 \quad (28)$$

aufgeschrieben werden kann und hieraus folgt

$$\left[\left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \right]^2 = \frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_2 \varrho_2} \frac{74+115r}{74s+115r} \quad (29)$$

und wenn r aus Gl. (28) ausgedrückt und in Gl. (29) eingesetzt wird, erhält man die für die Newtonsche Bedingung gültige Form [1], und zwar gilt dann:

$$\left[\left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \right]^2 = \frac{\left[189 \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) + 115s + 74 \right] \frac{\mu_1 \varrho_1}{\mu_2 \varrho_2}}{\left[\left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \right] (74s+115) + 189s}. \quad (30)$$

Es soll nun der Fall $u_0 = 0$ untersucht werden, d. h. wobei die Phasengrenzfläche ruht. Dieser Fall entspricht der Strömung oberhalb einer ebenen Platte ($r = 0$).

Wie im vorangehenden gezeigt wurde, ist:

$$\tau_0 = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-0}^n = K [U_1(s-r)2/(-\delta_2)]^n$$

und unter Berücksichtigung des Ausdrucks $(-\delta_2)^n$ gilt:

$$\frac{\tau_0}{\varrho_2} = \frac{K}{\varrho_2} [U_1(s-r)2]^n \left\{ 2^n(n+1) \frac{K}{\varrho_2} x U_1^{n-2}(s-r)^{n-1} [630/(74s+115r)] \right\}^{-n/n+1}, \quad (31)$$

wenn $r = 0$ gesetzt wird, ist

$$\frac{\tau_0}{U_2^2 \varrho_2} = \left(\frac{2}{n+1} \frac{74}{630} \right)^{n/(n-1)} \left(\frac{\varrho_2 U_2^{2-n} x^n}{K} \right)^{-1/(n-1)} \quad (32)$$

und somit ergibt sich als Reibungskoeffizient

$$\xi(n) = \left(\frac{2}{1+n} \frac{74}{630} \right)^{n(n+1)}. \quad (33)$$

Der Vergleich der aus Gl. (33) und aus der exakten Lösung [4] berechneten Werte bei verschiedenen Werten der Verhältnisskennziffer wird in Abb. 3 dargestellt.

Aus diesem Vergleich geht hervor, daß mit Ausnahme ganz geringer Werte von n in dem aus praktischem Standpunkt bedeutsamen Bereich bis zu Werten von $n = 2$ die Gl. (33) als gute Annäherung dient.

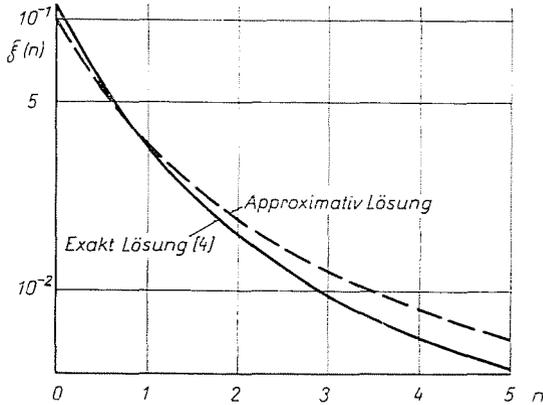


Abb. 3

Es besteht auch die Möglichkeit für einen weiteren Vergleich, wenn die Bewegung einer ebenen Platte in einer stehenden, nicht Newtonschen Flüssigkeit untersucht wird. In diesem Falle beträgt $r = 1$ und $s = 0$, da $u_0 = U_1$ und $U_2 = 0$ ist.

Hierbei drückt u_0 die Bewegungsgeschwindigkeit der ebenen Platte aus und somit schreibt sich Gl. (31) zu:

$$\tau_0 = K [2 U_1]^n \left\{ 2^n (n+1) \frac{K}{\rho_2} x U_1^{n-2} [630/115] \right\}^{-n/(n+1)} \quad (34)$$

Wird die dimensionslose Schubspannung eingeführt, so gilt für deren Wert an der Stelle $y = 0$ die Beziehung:

$$\tau'_0 = \frac{\tau_0}{K u_0^n} \left\{ \frac{\rho_2 u_0^{2-n}}{K x} \right\}^{-n/(n+1)} \quad (35)$$

und somit auch

$$\tau'_0 = 2^n \left[\frac{115}{(n+1) 2^n \cdot 630} \right]^{n/(n+1)} \quad (36)$$

Der Vergleich der aus Gl. (36) und der exakten Lösung [5] erhaltenen Werte wird in Abb. 4 dargestellt.

Aus den angeführten Beispielen geht klar hervor, daß das Integrierverfahren bei den verschiedenen Randbedingungen von befriedigender Genauigkeit ist. Da zu den Eigenschaften des Integrierverfahrens auch diejenige hinzugehört, laut welcher die Genauigkeit der mittels dieser erhaltenen Lösung für die Randbedingungen unveränderlich ist [6], wird die vorher angeführte Genauigkeit auch in diesem Falle erwartet.

Im weiteren soll nun die Bestimmung des Massentransports beschrieben werden.

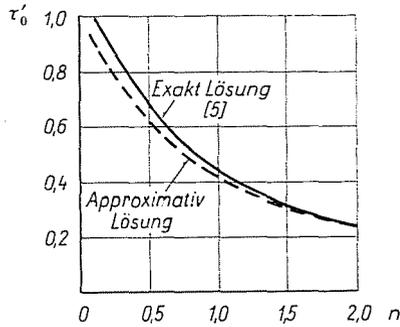


Abb. 4

Der Stofftransport

Hier gehen wir wiederum von der allgemeinen Transportgleichung aus, und zwar ist

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \nabla \left(\vartheta \bar{u} + \sum_{j=1}^m L_j \nabla \varphi_j \right) = \bar{g}_k.$$

Im stationären Fall, wenn keinerlei chemische Reaktion vorhanden ist, gilt

$$\nabla \left(\vartheta \bar{u} + \sum_{j=1}^m L_j \nabla \varphi_j \right) = 0 \quad (37)$$

und ferner unter Berücksichtigung von

$$\vartheta = C_i = \varphi_j \quad \text{und} \quad L_j = -D_i = \text{konst.} \quad (38)$$

erhält man

$$\nabla (C_i \bar{u} - D_i \nabla C_i) = 0 \quad (39)$$

und da es sich um ein inkompressibles Medium handelt, lautet

$$\nabla (C_i \bar{u}) = \bar{u} \nabla C_i + C_i \nabla \bar{u} = \bar{u} \nabla C_i. \quad (40)$$

Somit schreibt sich die Massentransportgleichung bei zweidimensionaler ebener Strömung, wenn sich die Konzentration nur in der Richtung von y konduktiv ändert, zu

$$u \frac{\partial C_i}{\partial x} + v \frac{\partial C_i}{\partial y} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2}. \quad (41)$$

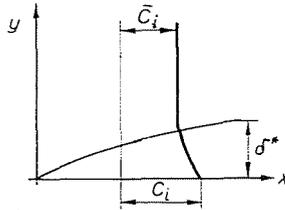


Abb. 5

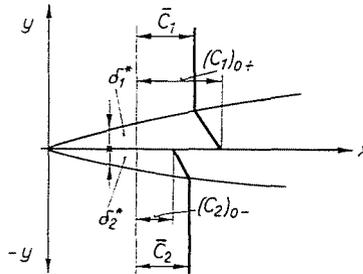


Abb. 6

Wird nun wiederum das Integrierverfahren angewendet (s. Abb. 5), ergibt sich für die Integralgleichung des Massentransports:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta^*} u(C_i - \bar{C}_i) dy = -D_i \left(\frac{\partial C_i}{\partial y} \right)_0. \quad (42)$$

Für den Fall zweier Phasen soll Abb. 6 betrachtet werden.

Auf Grund dessen ergibt sich für die Integralform der Massentransportgleichung für den unteren und oberen Flüssigkeitsstrom:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_1^*} u(\bar{C}_1 - C_1) dy = D_1 \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right)_{0+} \quad (43a)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{-\delta_2^*} u(\bar{C}_2 - C_2) dy = D_2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial y} \right)_{0-}. \quad (43b)$$

Aus den Konzentrationswerten $(C_1)_{0+}$ bzw. $(C_2)_{0-}$ an der Phasengrenzfläche und C_1 bzw. C_2 am Rande der Grenzschicht folgt, daß die Konzentration von y kontinuierlich abhängt. Somit gelten für die Grenzschichtbedingungen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 y = 0+ & \quad C_1 = (C_1)_{0+} \\
 y = \delta_1^* & \quad C_1 = \bar{C}_1 \quad \frac{\partial C_1}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} = 0 \\
 y = 0- & \quad C_2 = (C_2)_{0-} \\
 y = \delta_2^* & \quad C_2 = \bar{C}_2 \quad \frac{\partial C_2}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{44}$$

An der Phasengrenzfläche kann der Stoffstrom beiderseitig als

$$D_1 \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right)_{0+} = D_2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial y} \right)_{0-} \tag{45}$$

angegeben werden.

Angenommen, daß die Konzentration entlang der Oberflächenlänge (in x -Richtung) konstant und das Maß der Stoffübertragung nicht allzu groß, d. h., daß $(C_i)_{y=0} = \text{konst.}$ und somit $(\partial C_i / \partial x)_0 = 0$ und ferner $v \approx 0$ ist, ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} \right)_{0+} = 0 = \left(\frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \right)_{0-}. \tag{46}$$

Das Konzentrationsprofil kann durch ein Polynom 4ten Grades angenähert werden, und zwar gilt dann

$$C_i = \sum_{j=0}^4 \alpha_j y^j. \tag{47}$$

Bei Anwendung der Randbedingungen (44) und (46) für die Bestimmung von α_j für die obere Phase ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 (C_1)_{0+} &= \alpha_0 \\
 C_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 \delta_1^* + \alpha_2 \delta_1^{*2} + \alpha_3 \delta_1^{*3} + \alpha_4 \delta_1^{*4} \\
 0 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 \delta_1^* + 3\alpha_3 \delta_1^{*2} + 4\alpha_4 \delta_1^{*3} \\
 0 &= 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \delta_1^* + 12\alpha_4 \delta_1^{*2} \\
 0 &= 2\alpha_2
 \end{aligned} \tag{48}$$

Dieses Gleichungssystem ist dem des bei der Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils erhaltenen analog, wodurch dessen Lösung nach entsprechendem Auswechseln der Zeichen für den oberen Strom als

$$C_1 = (C_1)_{0+} + 2[\bar{C}_1 - (C_1)_{0+}] \left(\frac{y}{\delta_1^*} \right) - 2[\bar{C}_1 - (C_1)_{0+}] \left(\frac{y}{\delta_1^*} \right)^3 + \\ + [\bar{C}_1 - (C_1)_{0+}] \left(\frac{y}{\delta_1^*} \right)^4 \quad (49)$$

bzw. in dimensionsloser Form als

$$\frac{C_1}{\bar{C}_1} = \alpha_1 + (1 - \alpha_1) \left[2 \left(\frac{y}{\delta_1^*} \right) - 2 \left(\frac{y}{\delta_1^*} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta_1^*} \right)^4 \right] \quad (50a)$$

und für den unteren Flüssigkeitsstrom als

$$\frac{C_2}{\bar{C}_2} = \alpha_2 + (1 - \alpha_2) \left[2 \left(\frac{y}{-\delta_2^*} \right) - 2 \left(\frac{y}{-\delta_2^*} \right)^3 + \left(\frac{y}{-\delta_2^*} \right)^4 \right] \quad (50b)$$

angegeben werden kann, wobei

$$\alpha_1 = (C_1)_{0+}/\bar{C}_1 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = (C_2)_{0-}/\bar{C}_2 \quad (51)$$

ist.

Werden nun die für die Konzentration und für das Geschwindigkeitsprofil erhaltenen Ausdrücke in die Stofftransportgleichung eingesetzt, so wird daraus:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_1^*} (\bar{C}_1 - C_1) u dy = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{C}_1 U_1 (1 - \alpha_1) \delta_1 \left[\frac{3}{10} r \chi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - r) \left(\frac{2}{15} \chi_1^2 - \frac{3}{140} \chi_1^4 + \frac{1}{180} \chi_1^5 \right) \right] \right\} \quad (52a)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{-\delta_2^*} (\bar{C}_2 - C_2) u dy = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{C}_2 U_1 (1 - \alpha_2) (-\delta_2) \left[\frac{3}{10} r \chi_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (s - r) \left(\frac{2}{15} \chi_2^2 - \frac{3}{140} \chi_2^4 + \frac{1}{180} \chi_2^5 \right) \right] \right\}, \quad (52b)$$

wobei $\chi_1 = \delta_1^*/\delta_1$ und $\chi_2 = \delta_2^*/\delta_2$ auf Grund unserer Voraussetzung $\chi_1, \chi_2 < 1$.

Nimmt man den Ausdruck des Konzentrationsprofils in Betracht, so gilt für den oberen Strom:

$$D_1 \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right)_{0+} = 2D_1 C_1 (1 - \alpha_1) / \chi_1 \delta_1. \quad (53)$$

Wird der Ausdruck δ_1 der Grenzschicht für den Impuls nach x abgeleitet, so erhält man

$$\delta_1 \frac{d\delta_1}{dx} = \frac{1260}{74+115r} \frac{v_1}{U_1}. \quad (54)$$

Dies in die Gleichung (52a) eingesetzt und nach x integriert und vorausgesetzt, daß $z_1 = \text{konst.}$ ist, führt zur Beziehung

$$\frac{630}{74+115r} z_1^2 \left\{ \frac{3}{10} r + (1-r) \left[\frac{2}{15} z_1 - \frac{3}{140} z_1^3 + \frac{1}{180} z_1^4 \right] \right\} = \frac{D_1}{v_1} = Sc_{x1}^{-1}. \quad (55)$$

In ähnlicher Weise gilt für die untere Phase:

$$D_2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial y} \right)_{0-} = 2D_2 \bar{C}_2 (1-z_2) / z_2 (-\delta_2). \quad (56)$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (52b) und nach x integriert und vorausgesetzt, daß $z_2 = \text{konst.}$, folgt:

$$4xD_2 = U_1 \left[\frac{3}{10} r + (s-r) \left(\frac{2}{15} z_2 - \frac{3}{140} z_2^3 + \frac{1}{180} z_2^4 \right) \right] z_2^2 \delta_2^2 \quad (57)$$

und unter Berücksichtigung des Ausdrucks δ_2 , lautet:

$$\delta_2^2 = \left\{ 2^n (n+1) \frac{K}{\varrho_2} x U_1^{n-2} [630/74s + 115r] (s-r)^{n-1} \right\}^{2/(n+1)} \quad (58)$$

und somit wird

$$z_2^2 \left[\frac{3}{10} r + (r-s) \left(\frac{2}{15} z_2 - \frac{3}{140} z_2^3 + \frac{1}{180} z_2^4 \right) \right] \cdot \quad (59)$$

worin für $[630/(74s+115r)]^{2(n+1)} (r-s)^{2(n-1)/(n+1)} = T_3(n) Pe_x^{-1} Re_x^{2/(n+1)}$,

$$T_3(n) = 4[2^n(n+1)]^{-2/(n+1)}$$

$$Pe_x = \frac{U_1 x}{D_2} \quad (60)$$

$$Re_x = \frac{\varrho_2 U_1^{2-n} x^n}{K}$$

gilt.

Die lokalen Stoffübertragungsfaktoren ergeben

$$k_1 \bar{C}_1 (1-z_1) = -D_1 \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right)_{0+} = \frac{2\bar{C}_1 D_1 (1-z_1)}{z_1 \delta_1}, \quad (61)$$

woraus

$$k_1 = 2D/\zeta_1\delta_1 \quad (62)$$

wird.

Nach Substitution des Ausdrucks δ_1 in Gl. (62) erhält man:

$$\frac{k_1 x}{D_1} = \frac{1}{\zeta_1} \left(\frac{74 + 115r}{630} \right)^{1/2} \left(\frac{U_1 x}{\nu_1} \right)^{1/2} \quad (63)$$

und auf ähnliche Weise für den unteren Strom:

$$k_2 \bar{C}_2 (1 - \alpha_2) = D_2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial y} \right)_{0-} = 2\bar{C}_2 D_2 (1 - \alpha_2) / \zeta_2 \delta_2, \quad (64)$$

somit wird

$$k_2 = 2D_2/\zeta_2\delta_2 \quad (65)$$

und die Anwendung des Ausdrucks δ_2 führt zu:

$$\frac{k_2 x}{D_2} = \frac{2}{\zeta_2} [630/(74s + 115r)]^{-1/(n+1)} (r-s)^{(1-n)/(1+n)} \cdot [2^n(n+1)]^{-1/(n+1)} \left[\frac{K}{\varrho_2} x^{-n} U_1^{n-2} \right]^{-1/(n+1)} \quad (66)$$

bzw. wird

$$Sh_{x2} = \frac{2}{\zeta_2} [630/(74s + 115r)]^{-1/(n+1)} (r-s)^{(1-n)/(1+n)} \cdot T_4(n) Re_x^{1/(n+1)}, \quad (67)$$

wobei

$$T_4(n) = [2^n(n-1)]^{-1/(n+1)}.$$

Aus Gl. (19) läßt sich r , bzw. mittels dessen Kenntnis aus den Gleichungen (55) und (59) ζ bestimmen, wodurch auf Grund der Beziehungen (63) und (67) die Stoffübertragungsfaktoren errechnet werden können.

Es sollen jetzt wiederholt Spezialfälle untersucht werden. Vorausgesetzt, daß $n = 1$ ist, erhält man aus Gl. (67) die Newtonsche Gestalt [1]. Bei der Randbedingung $u_0 = 0$, d. h. für den Fall $r = 0$, lassen sich die Gleichungen (59) und (67) in folgender Form aufschreiben:

$$\zeta_2^2 \left[\frac{2}{15} \zeta_2 - \frac{3}{140} \zeta_2^3 + \frac{1}{180} \zeta_2^4 \right] \left[\frac{630}{74} \right]^{2/(n+1)} = T_3(n) Re_x^{2/(n+1)} Pe_x'^{-1} \quad (68)$$

und

$$Sh_{x2} = \frac{2}{\zeta_2} \left(\frac{630}{74} \right)^{-1/(n+1)} T_4(n) Re_x^{1/(1+n)}. \quad (69)$$

Bloß muß hierbei beachtet werden, daß

$$Re_x = \frac{\varrho_2 U_2^{2-n} x^n}{K} \quad \text{und} \quad Pe_x' = \frac{U_2 x}{D_2} \quad (70)$$

wird, da $\gamma_2 < 1$ und bei Vernachlässigung der Glieder von höherer Potenz

$$\chi_2^3 \left(\frac{2}{15} \right) \left(\frac{630}{74} \right)^{2/(n+1)} = 4[2^n(n+1)]^{-2/(n+1)} Pe'_x{}^{-1} Re_x^{2/(n+1)} \quad (71)$$

ergibt und ferner, daß die Bedingung $\gamma_2 < 1$ zu

$$4[2^n(n+1)]^{-2/(n+1)} \left(\frac{15}{2} \right) \left(\frac{74}{630} \right)^{2/(n+1)} Re_x^{2/(n+1)} Pe'_x{}^{-1} < 1 \quad (72)$$

führt, und hieraus

$$Pe'_x > 4[2^n(n+1)]^{-2/(n+1)} \left(\frac{15}{2} \right) \left(\frac{74}{630} \right)^{2/(n+1)} Re_x^{2/(n+1)} \quad (73)$$

folgt, da als Voraussetzung für die Anwendung der Grenzschichttheorie

$$Re_x \gg 1$$

gilt und somit die Bedingung

$$Pe'_x \gg 1$$

erfüllt wird.

Setzt man den Ausdruck γ_2 aus (71) in Gl. (69) ein, so ergibt dies

$$Sh_{x2} = \left\{ \frac{4}{15} \left[\frac{74}{630} \frac{1}{2^n(1+n)} \right]^{1/(n+1)} \right\}^{1/3} Pe_x^{1/3} Re_x^{1/3(n+1)} \quad (74)$$

bzw.

$$Sh_{x2} = S(n)^{1/3} Pe_x^{1/3} Re_x^{1/3(n+1)}, \quad (75)$$

wobei

$$S(n) = \frac{4}{15} \left[\frac{74}{630} \frac{1}{2^n(n+1)} \right]^{1/(n+1)} \quad (76)$$

ist.

Nun können die mittels Gl. (76) errechneten Werte von $S(n)$ mit den Werten der exakten Lösung [7] verglichen werden.

Aus Abb. 7 ist ersichtlich, daß im Bereich $0,2 < n < 2$ eine ziemlich gute Annäherung erhalten wird.

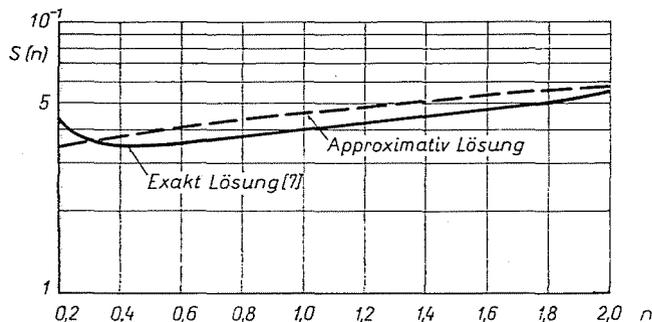


Abb. 7

Es soll ferner auch jener Fall untersucht werden, bei welchem sich die untere Phase mit einer konstanten Geschwindigkeit $u_0 = U_2$ bewegt. So ist auch $r = s$, und läßt man die Glieder höherer Potenz von χ_2 in Gl. (59) außer acht, so kann $(r - s)^{(1-n)/(1+n)}$ folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(r - s)^{(1-n)/(1+n)} = \frac{1}{2} [2^n(n+1)]^{1/(n+1)} \left(\frac{3}{10}\right)^{1/2} \chi_2 \cdot Pe_x^{1/2} Re_x^{-1/(n+1)} \quad (77)$$

und dies in Gl. (67) eingetragen, ergibt

$$Sh_x = \left(\frac{3}{10r}\right)^{1/2} Pe_x^{1/2} = \left(\frac{3}{10}\right)^{1/2} Pe_x^{1/2}. \quad (78)$$

Hieraus folgt der mittels der Aufenthaltsdauer t errechnete lokale Stoffübertragungskoeffizient, und zwar wird:

$$k_2 = \left(\frac{3}{10}\right)^{1/2} \left(\frac{D_2 U_2}{x}\right)^{1/2} = 0,548 \left(\frac{D_2}{t}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{D_2}{\pi t}\right)^{1/2}, \quad (79)$$

was als Beweis für die Gültigkeit der Penetrationstheorie gilt.

Aus den oben angeführten Überlegungen ist ersichtlich, daß die Gleichungen (59) und (67) für Spezialfälle genommen entsprechend gute Ergebnisse aufweisen und somit den vorangehend erwähnten Eigenschaften des Integrierverfahrens zufolge, nämlich daß die Genauigkeit der Lösung für Randbedingungen unveränderlich ist, eine ähnliche Genauigkeit auch im Falle von Zweiphasensystemen erwartet werden kann.

Die Anwendung der Beziehungen soll an einem Zahlenbeispiel erläutert werden.

Beispiel

Es soll der lokale Wert eines Stoffübertragungskoeffizienten an der Flüssigkeitsseite bestimmt werden, und zwar an der Stelle $x = 1$ m von der Berührungsstelle der Gas- und Flüssigkeitsphase entfernt, für eine dem Exponentialgesetz folgenden nicht Newtonsche Flüssigkeit, laut dem vorangehenden Stoffübertragungsmodell unter Anwendung folgender Angaben:

$$U_1 = 1,5 \text{ m/s}, \mu_1 = 5,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}, \varrho_1 = 5,2 \text{ kg/m}^3,$$

$$K = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg s}^{n-2}/\text{m}, n = 0,7, \varrho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3,$$

$$D_2 = 7,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}, U_2 = 0,15 \text{ m/s}.$$

Als erster Schritt sollen die dimensionslosen Veränderlichen der Gl. (20) definiert werden:

$$T_0 = 0,53, N = 2,04, Re = 3,54 \cdot 10^6$$

und somit gilt

$$T_0 N Re_x^{(n-1) 2n(n+1)} = 0,15,$$

da

$$s = U_2/U_1 = 0,1$$

ist und auf Grund der Gl. (19) ist

$$r = 0,28$$

und der Reibungskoeffizient (22) schreibt sich zu

$$\xi = 29 \cdot 10^{-2}.$$

Es soll nun der Charakter der Strömung untersucht werden. Von der Flüssigkeitsseite her betrachtet besteht die Bedingung der laminaren Strömung [8], nämlich gilt

$$\left[\frac{0,33206}{\xi} \right]^2 \left(\frac{\rho_2 U_2^{2-n} \cdot x^n}{K} \right)^{2/(n+1)} < 3 \cdot 10^6, \quad (80)$$

da $1,84 \cdot 10^6 < 3 \cdot 10^6$ ist.

Von der Gasseite her betrachtet gilt aber

$$Re_x = \rho_1 U_1 x / \mu_1 = 1,5 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5.$$

Nachher werden die dimensionslosen Veränderlichen der Gl. (60) bestimmt, und zwar heißt es

$$T_3 = 1,22, Pe_x = 2,08 \cdot 10^7, Re_x = 3,54 \cdot 10^6$$

und somit gilt

$$T_3(n) Pe_x^{-1} \cdot Re_x^{2/(n+1)} = 2,94$$

und auf Grund von Gl. (59) ist

$$\chi_2 = 0,49$$

mit dessen Hilfe man aus Gl. (67)

$$Sh_{\chi_2} = 2,28 \cdot 10^3$$

erhält und sich der Stoffübertragungskoeffizient an der Flüssigkeitsseite als

$$h_2 = 1,64 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

aufschreiben läßt.

Bezeichnungen

g_i	m/s^2	Gravitationskraftfeld
\bar{g}_k		auf die extensive Menge bezogene Siededichte
k	m/s	Stoffübertragungskoeffizient
n		Modellindex der Exponentialfunktion
p	kg/ms^2	Druck
r		u_0/U_1
s		U_2/U_1
t	sec	Zeit
u	m/s	Geschwindigkeit
\bar{u}	m/s	Geschwindigkeitsvektor
u_0	m/s	Phasengrenzgeschwindigkeit
v	m/s	Geschwindigkeit
x	m	Länge
y	m	Länge
C	kg/m^3	Konzentration
\bar{C}	kg/m^3	Konzentration der Hauptmasse
D	m^2/s	molekularer Diffusionsfaktor
L		Leitungskoeffizient
N		ist definiert (20)
S		ist definiert (76)
$T_{0, 1, 2, 3, 4}$		definierte Konstanten (20), (24a), (24b), (59), (67)
U	m/s	Geschwindigkeit der Hauptmasse
α		Koeffizient
δ	m	Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht
δ^*	m	Dicke der Konzentrationsgrenzschicht
η		dimensionslose Länge
θ		extensive Menge
z		ist definiert (51)
μ	kg/ms	dynamische Viskosität
ν	m^2/s	kinematische Viskosität
ξ		Reibungskoeffizient
ρ	kg/m^3	Dichte
τ	kg/ms^2	Schubspannung
$\bar{\tau}$		Spannungstensor

τ'_0	dimensionslose Schubspannung
φ	mit der Extensivmenge zusammenhängende Intensivmenge
χ	ist definiert (52b)

Indizes

i, j	Summierungsindex
1	Gasphase
2	Flüssigkeitsphase

Symbole

Re	Reynoldszahl
Sh	Sherwoodzahl
Pe	Pecletzahl
∇	Nabla-Operator

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die theoretische Analyse der Stoffübertragung bei kokurrenter Strömung für nicht Newtonsche Flüssigkeiten anhand eines aus einer zweidimensionalen ebenen Strömung ausgehenden Modells geschildert. Zum Lösen der Grenzschichtgleichungen wurde das Integrierverfahren angewendet, durch Annäherung der Geschwindigkeits- und Konzentrationsprofile mittels eines Polynoms vierten Grades. Als Ergebnis wird eine dimensionslose Beziehung erhalten, aus welcher der Stoffübertragungskoeffizient an der Flüssigkeitsseite in Kenntnis der entsprechenden Stoff- und Strömungscharakteristiken bestimmt werden kann. Der allgemeine Charakter dieser Beziehung und ihre Existenz im Falle anderer Eindeutigkeitsbedingungen wurde anhand des Vergleichs mit den in der Fachliteratur auffindbaren Lösungen nachgewiesen. Schließlich wurde die praktische Anwendbarkeit durch Lösen eines angeführten Zahlenbeispiels demonstriert.

Literatur

1. POTTER, O. E.: Chem. Engrs. Sci. **6**, 170 (1957).
2. SCHOWALTER, W. R.: A. I. Ch. E. Journal **6**, 24 (1960).
3. VAN ATTA, C. W. und YEH, T. T.: A. I. Ch. E. Journal **13**, 1203 (1967).
4. ACRIVOS, A.: A. I. Ch. E. Journal **6**, 589 (1960).
5. FOX, V. G.: A. I. Ch. E. Journal **15**, 327 (1969).
6. CHI TIEN: Appl. Sci. Res. **17**, 233 (1967).
7. LUKOV, A. V.: Int. J. Heat and Mass Transfer **12**, 377 (1969).
8. SKELLAND, A. M. P.: A. I. Ch. E. Journal **12**, 69 (1966).

BÉLA PALÁNCZ Budapest XI., Műegyetem rkp. 9. Ungarn.