

# EINE UNMITTELBARE BEZIEHUNG ZWISCHEN DER PROFILKURVE UND IHRER UMSTRÖMUNG

Von  
Z. BOGNÁR

Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen, Technische Universität Budapest

Problemstellung: Wie wird sich eine stationäre, ebene Potentialströmung verändern, in die ein Zylinder mit gegebener Leitkurve eingelegt, und vorgeschrieben wird, daß die Geschwindigkeit längs der gegebenen Profilkurve tangential sein soll (Abb. 1).

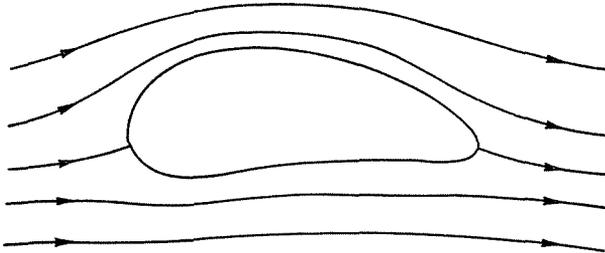


Abb. 1

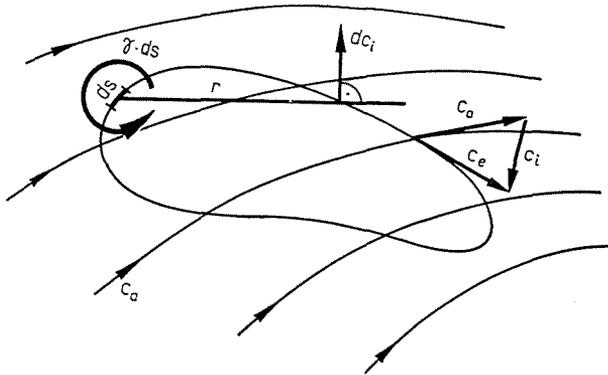


Abb. 2

Die Wirkung des Profils durch die induzierte Geschwindigkeit der auf dem Rande verteilten Wirbel ersetzt, mit den Bezeichnungen in Abb. 2 läßt sich wegen

$$c_{in} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\gamma ds}{r} \cos \alpha \quad (1)$$

dieser Ansatz für die Normalkomponenten in folgender Form schreiben:

$$c_{an} + c_{in} = 0 \quad (2)$$

was wegen (1) zu einer Fredholmschen Integralgleichung erster Art mit einer singulären Kernfunktion unter dem Integralzeichen führt. Das Integral wird als Cauchyscher Hauptwert aufgefaßt.

Existenz und Mannigfaltigkeit der Lösungen wurden schon mehrfach untersucht und bestätigt, darauf wird hier nicht eingegangen (z. B. [3]).

### Kotangensintegral – Transformation

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2} d\varphi = g(\psi) \quad (3)$$

Diese Transformation hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \sin n\varphi &\rightarrow \cos n\psi \\ \cos n\varphi &\rightarrow -\sin n\psi \\ \text{konst.} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Die mit Fourier-Reihe angegebenen Funktionen können also ohne besondere Berechnung transformiert werden. Der Einfachheit halber führen wir für diese Transformation folgende Bezeichnung ein:

$$g(\psi) = f(\tilde{\varphi}) \quad (5)$$

### Kreisprofil

Die Beziehung (1) auf ein Kreisprofil nach Abb. 3 angewandt, ergibt sich

$$c_{in} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\varphi)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2} d\varphi = \frac{\gamma(\tilde{\varphi})}{2} \quad (6)$$

Also gilt für beliebige Wirbelverteilung, daß die Normalkomponente der induzierten Geschwindigkeit gleich der Hälfte der Transformierten der Wirbelverteilung ist.

Für die Tangentialkomponente gilt (den Gegenuhrzeigersinn als positiv genommen):

$$c_{it} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\varphi)}{2} d\varphi \tag{7}$$

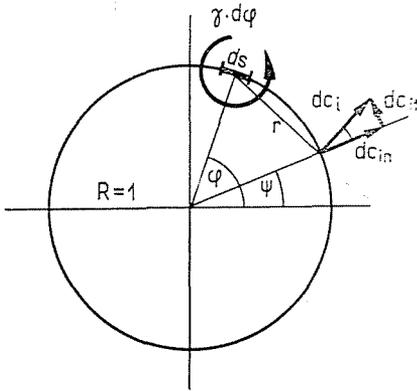


Abb. 3

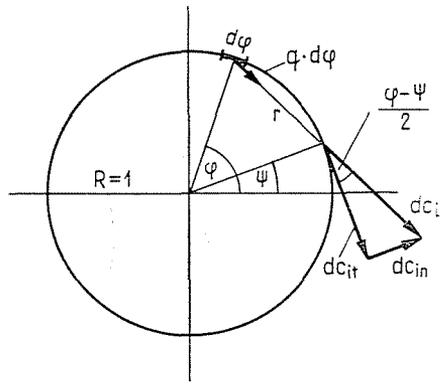


Abb. 4

d. h. die Hälfte des Integralmittelwertes den ganzen Kreis entlang.

In ganz ähnlicher Weise, eine reine Quellenverteilung angenommen, erhält man nach Abb. 4

$$c_{in} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q(\varphi)}{2} d\varphi \tag{8}$$

bzw.

$$c_{it} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q(\varphi)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2} d\varphi = - \frac{q(\tilde{\varphi})}{2} \tag{9}$$

Es folgt aus den Zusammenhängen in (4), daß bei beliebig angesetzter Wirbelverteilung die Normalkomponente auf der Kontur induzierten Geschwindigkeit so verteilt ist, daß ihr Integralmittelwert und damit auch das Integral gleich Null sind. Das entspricht der Quellenfreiheit im Inneren des Profils. Die sich aus der Fourierreihe  $\gamma(\varphi)$  nach (6) und (4) ergebende Reihe enthält nämlich kein konstantes Glied, und die Integrale der anderen Glieder ergeben Null.

Eine ähnliche Aussage darf auf Grund von (9) für die Tangentialkomponente der durch eine beliebige Quellenbelegung induzierten Geschwindigkeits-

verteilung gemacht werden, das ist aber der Fall des wirbelfreien Innenfeldes.

Ist das Integral der Normalkomponente der Grundströmung längs des Profils nicht gleich Null, sind also im Inneren Quellen vorhanden, so wird die Fourierreihe von  $c_{an}$  auch ein konstantes Glied haben, das sich durch Wirbelverteilung allein nicht kompensieren läßt. Die den anderen Gliedern der Reihe entsprechende Wirbelverteilung kann gleich angeschrieben werden. Aber auch in diesem Fall läßt sich eine geeignete  $q(\varphi) = \text{konst.}$  finden, durch die wegen

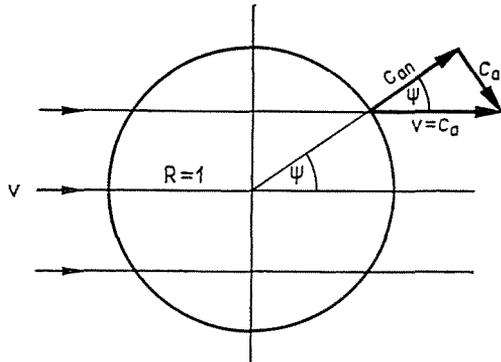


Abb. 5

(9) und (4) die Tangentialkomponenten nicht verändert werden. Desgleichen ist einzusehen, daß eine geeignete  $\gamma(\varphi) = \text{konst.}$  wegen (7) eine beliebige, vorgegebene Zirkulationsstärke längs der Kontur ermöglicht, und das wird wegen (6) und (4) die Verteilung der Normalkomponente nicht beeinflussen.

Die Grundströmung in Abb. 5 dient als Beispiel für das Gesagte. Hier ist  $c_{an} = v \cdot \cos \psi$ , daher gilt nach (6) und (2)

$$\frac{\gamma(\varphi)}{2} + v \cdot \cos \psi = 0$$

d. h.  $\gamma(\varphi) = -2v \cdot \cos \psi$ .

Auch (4) in Betracht gezogen, ist

$$\gamma(\varphi) = -2v \cdot \sin \varphi + \text{konst.}$$

die Wirbelverteilung, die die Normalkomponente der Grundströmung löscht. Ist — wie das oft vorkommt — im Inneren die Geschwindigkeit überall gleich Null, stimmt die Wirbelverteilung gleichzeitig mit der resultierenden tangentialen Geschwindigkeitsverteilung längs der Kontur überein. Das gilt auch in diesem Fall. In Kenntnis der Wirbelverteilung muß nunmehr keine Integralgleichung gelöst, höchstens, um die induzierte Geschwindigkeit zu bestimmen, integriert werden.

### Zylinder mit allgemeiner Leitkurve

Läßt sich die gegebene Profilkurve, um die die Strömungsverhältnisse untersucht werden, in folgender Parameterform beschreiben (Abb. 6):

$$x = x(t) \tag{10}$$

$$y = y(t)$$

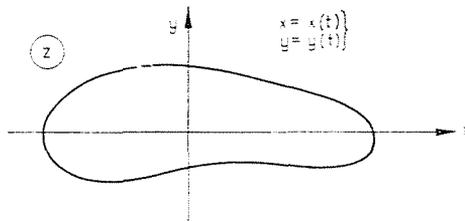


Abb. 6

so können die für den Kreis erhaltenen Ergebnisse auch auf den Fall eines solchen allgemeinen Profils übertragen werden. Nehmen wir noch an, daß die Veränderung des Parameters  $t$  von  $0$  bis  $2\pi$  der einmaligen Umfahrung der Kurve in mathematisch positivem Sinne bedeutet.

Nach einem bekannten Satz der Mathematik (z. B. [4] B. II. S. 370—371) erhält man in (10) die Substitution  $t = w$  durchgeführt, mit der komplexen Veränderlichen  $w = u + iv$ , auf jeden Fall eine analytische Funktion, auch wenn die Kurve (10) selbst nicht analytisch ist. Diese Substitution stellt eine Abbildung entsprechend der Beziehung:

$$z = x(w) + iy(w) \tag{11}$$

zwischen den Ebenen  $z$  und  $w$  dar, indem die Profilkurve auf den Abschnitt  $0-2\pi$  der reellen Achse bzw. bei mehrfacher Umfahrung auf periodische Wiederholung in beide Richtungen bis ins Unendliche abgebildet wird. (Das Innere der Profilkurve wird auf die obere Hälfte der Ebene  $w$  abgebildet.)

Die hier beschriebene Abbildung gilt naturgemäß auch für eine in der Ebene  $\zeta = \xi + i\eta$  aufgenommene und mit dem Gleichungssystem

$$\xi = \cos \varphi \tag{12}$$

$$\eta = \sin \varphi$$

beschriebene Parameterkurve, die nichts anderes ist als der Einheitskreis um die Origo der Ebene  $\zeta$  (Abb. 7). Durch die Substitution  $\varphi = w$  wird auch dieser Kreis auf die reelle Achse der Ebene  $w$  abgebildet, u. zw. so, daß die Punkte mit den Parametern  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 2\pi$  mit den Punkten  $t = 0$  bzw.  $t = 2\pi$

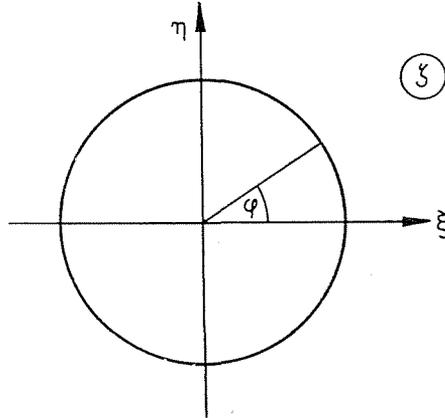


Abb. 7

zusammenfallen. Deshalb darf die mit der Substitution  $\varphi = w$  erhaltene Abbildung

$$\zeta = \xi(w) + i\eta(w) = \cos w + i \sin w = e^{iw} \quad (13)$$

mit der Abbildung (11) verknüpft werden, da  $w$  in beiden als gleich genommen wird. Damit ergibt sich mit dem Zusammenhang aus (13)

$$w = -i \ln \zeta \quad (14)$$

die Abbildung

$$z = x(-i \ln \zeta) + iy(-i \ln \zeta) \quad (15)$$

zwischen der Ebene  $z$  der Profilkurve und der den Einheitskreis enthaltenden Ebene  $\zeta$ . Die vermittelnde Ebene  $w$  ist nicht mehr notwendig, (15) ergibt die Abbildung der Profilkurve auf den Einheitskreis.

Bei der Ellipse

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos t \\ y &= b \cdot \sin t \end{aligned}$$

ist z. B.

$$\begin{aligned} x + iy = z &= a \cdot \cos(-i \ln \zeta) + ib \cdot \sin(-i \ln \zeta) = \\ &= a \cdot \operatorname{ch} \ln \zeta + b \cdot \operatorname{sh} \ln \zeta = \\ &= \frac{a+b}{2} \cdot \zeta + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{1}{\zeta} \end{aligned}$$

die Funktion, die die Ellipse auf den Einheitskreis abbildet.

Wird weiterhin angenommen, daß die Grundströmung aus einem komplexen Potential ableitbar ist, dann besteht nach den Sätzen der Strömungslehre zwischen den konjugierten Geschwindigkeiten in der Ebene  $z$  bzw.  $\zeta$  die Beziehung

$$\bar{c}(\zeta) = \bar{c}(z) \cdot \frac{dz}{d\zeta} \tag{16}$$

Wegen der Superponierbarkeit der Geschwindigkeiten genügt es, drei spezielle Grundströmungen zu untersuchen: eine waagerechte bzw. senkrechte homogene Geschwindigkeitsverteilung sowie eine reine Zirkulationsströmung. Durch eine Linearkombination derselben lassen sich eine Geschwindigkeit von beliebiger Richtung und Größe im Unendlichen sowie eine beliebige Zirkulation verwirklichen.

Es sei also zuerst in der Ebene  $z$

$$\bar{c}_a(z) = 1$$

Dann gilt nach (16)

$$\bar{c}_a(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\dot{z}}{\dot{\zeta}} \tag{17}$$

wo der Punkt die Ableitung nach dem gemeinsamen Parameter bedeutet. Unter Berücksichtigung des Umstands, daß wegen (15)

$$t = -i \ln \zeta$$

gilt, d. h.

$$\zeta = e^{it} \tag{18}$$

ist, gilt auch

$$\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = i\zeta \tag{19}$$

während  $\dot{z}$  in (17) aus den Koordinaten der Profilpunkte ausgedrückt werden kann:

$$\dot{z} = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) \tag{20}$$

Nehmen wir weiterhin an, daß die Reihenentwicklungen

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{21}$$

und

$$y(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nt + b'_n \sin nt) \tag{22}$$

möglich sind. Aus diesen ergibt sich mit den Eulerschen Identitäten und mit (18):

$$z = c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \zeta^n + c_{-n} \zeta^{-n}) \quad (23)$$

(das ist die Gleichung der Abbildung), mit

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= a_0 + ia'_0 \\ c_n &= a_n + b'_n + ia'_n - ib_n \\ c_{-n} &= a_n - b'_n + ia'_n + ib_n \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die Grundströmung in (17) kann jetzt unmittelbar aufgeschrieben werden:

$$\bar{c}_a(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(c_n \cdot \zeta^{n-1} - c_{-n} \zeta^{-n-1}) \quad (25)$$

Die Normalkomponente der Grundströmung wird aus dem Realteil der Beziehung

$$c_{an} - ic_{an} = \zeta \cdot \bar{c}_a(\zeta) \quad (26)$$

gewonnen:

$$c_{an} = \sum_{n=1}^{\infty} n(b'_n \cos n\varphi - a'_n \sin n\varphi) \quad (27)$$

wenn jetzt der Parameter des Kreises mit  $\varphi$  bezeichnet wird.

Die gesuchte Wirbelverteilung läßt sich wegen (2) und (6) aus dem Zusammenhang

$$\gamma(\tilde{\varphi}) + 2 \cdot c_{an} = 0$$

mit Hilfe der Transformationsregeln in (4) in der Form

$$\gamma(\varphi) = 2 \cdot c_{an} \quad (28)$$

aus (27) gleich aufschreiben

$$\gamma(\varphi) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} n(a'_n \cos n\varphi + b'_n \sin n\varphi) \quad (29)$$

Es kann mit den Euler-Identitäten auch in der Form

$$\gamma = - \sum_{n=1}^{\infty} n[(a'_n - ib'_n) \zeta^n + (a'_n + ib'_n) \zeta^{-n}] \quad (30)$$

geschrieben werden.

Die durch die Wirbelbelegung induzierte Geschwindigkeit in einem Punkt  $\zeta_0$  auf dem äußeren Rand des Kreisumfangs ist

$$\bar{c}_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta_0 - \zeta} \frac{\gamma ds}{\zeta_0 - \zeta} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\gamma}{\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (31)$$

In diese Formel (30) eingesetzt, lautet das Ergebnis des Integrals den Index 0 weggelassen

$$\bar{c}_i = \sum_{n=1}^{\infty} n(i a'_n - b'_n) \zeta^{-n-1} \quad (32)$$

Bildet man dieses wieder in die Ebene  $z$  ab, so erhält man mit der Beziehung

$$\bar{c}_i(z) = \bar{c}_i(\zeta) \cdot \frac{i\zeta}{z} \quad (33)$$

nach Superposition mit der Grundströmung

$$\bar{c}_e(z) = 1 + \frac{i}{z} \sum_{n=1}^{\infty} n(i a'_n - b'_n) \zeta^{-n} \quad (34)$$

Den resultierenden Geschwindigkeitsvektor um den Winkel der Tangente verdreht ergibt sich ein reeller Wert, wodurch bewiesen ist, daß die resultierende Geschwindigkeit von tangentialer Richtung ist:

$$\bar{c}_e \cdot \frac{z}{|z|} = c_t \quad (35)$$

Aus (34) erhält man nach Zusammenziehung

$$c_t = \frac{1}{|z|} \cdot \left[ \dot{x}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n(a'_n \cos nt + b'_n \sin nt) \right] \quad (36)$$

d. h., eine direkte Beziehung zwischen Geschwindigkeitsverteilung und Kontur.  
Mit der Abkürzung

$$a'_n \cos nt + b'_n \sin nt = Y_n \quad (37)$$

kann (36) auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$c_t = \cos \delta - \frac{1}{|z|} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot Y_n \quad (38)$$

wo  $\delta$  der Tangentenwinkel nach Abb. 6 ist.

In ganz ähnlicher Weise erhält man für die Grundströmung  $\bar{c}_a = -i$

$$c_t = \sin \delta + \frac{1}{|\dot{z}|} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot X_n \quad (39)$$

wo

$$X_n = a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

ist.

Das der freien Zirkulation entsprechende Strömungsbild erhält man am einfachsten, indem längs des Kreises in der Ebene  $\zeta$  eine konstante tangentielle Einheitsgeschwindigkeit mit der freien Zirkulation

$$\Gamma = 2\pi$$

aufgenommen und diese Geschwindigkeitsverteilung dann wieder in die Ebene  $z$  abgebildet wird.

Also

$$\bar{c}(\zeta) = \frac{1}{i\zeta};$$

nach Abbildung ergibt schließlich die Geschwindigkeitsverteilung:

$$c_t = \frac{1}{|\dot{z}|} \quad (40)$$

Für die Ellipse

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cdot \cos t \\ y &= b \cdot \sin t \end{aligned} \right\}$$

ergeben sich zum Beispiel aus den drei speziellen Grundströmungen in der obigen Reihenfolge

$$c_t = \frac{-(a+b) \cdot \sin t}{|\dot{z}|}$$

$$c_t = \frac{(a+b) \cdot \cos t}{|\dot{z}|}$$

$$c_t = \frac{1}{|\dot{z}|}$$

wo

$$|\dot{z}| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

ist, was mit den auch in anderer Weise berechenbaren Endergebnissen in voller Übereinstimmung ist.

Es ist zu bemerken, daß die Parametergleichungen ziemlich frei angesetzt werden können, daher ist es im größten Teil der in der Praxis vorkommenden Fälle möglich, daß statt der unendlichen Reihen (21) und (22) nur einige Glieder vorkommen, wie z. B.

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = a \cos t \\ y(t) \end{array} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) = b \sin t \end{array} \right\}$$

was den Rechenaufwand wesentlich verringert.

Damit ist das Problem gelöst. Die Methode kann auch für die Berechnung ebener, gerader Profilkitter verallgemeinert werden, und ist auch ohne Rechenanlage gut anwendbar. Die Geschwindigkeit läßt sich in jedem Punkt der Kontur von der sonstigen Verteilung berechnen.

### Zusammenfassung

Aufgabenstellung: Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung längs einer gegebenen Profilkurve. Es wird aus einer ebenen Potentialströmung als Grundströmung ausgegangen, die durch ein eingelegtes Profil so verändert wird, daß die resultierende Geschwindigkeit tangentialer Richtung sei. Die Wirkung des Profils wird durch eine an der Kontur verteilte Wirbelbelegung ersetzt. Die Bestimmung der Wirbelbelegung, bzw. der resultierenden Geschwindigkeit ist auch in einer allgemeinen Form möglich. Dazu dienen hier zwei Hilfsmittel: die Kotangensintegral-Transformation und eine geeignete Abbildung, mit der die Profilkurve auf den Einheitskreis abgebildet wird.

### Literatur

1. GRUBER, J., BLAHÓ, M.: Folyadékok mechanikája. Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.
2. FRANK—MISES: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei. Bd. I—II. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.
3. MARTENSEN, E.: Die Berechnung der Druckverteilung an dicken Gitterprofilen mit Hilfe von Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art. Mitteilungen aus dem Max-Planck Institut für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt. Göttingen, 1959.
4. BECKENBACH, E. F.: Modern matematika mérnököknek Bd. I—II. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.

Zoltán BOGNÁR, Budapest XI, Stoczek u. 2—4, Ungarn