# УЧЕТ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ПОДОБИЯ ДЕВИАТОРОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАБОТЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

К. Касап

Кафедра Технической Механики Будапештского Технического Университета

(Поступило 27-го мая 1970 г.)

Представлено проф. д-р Д. Козманн

## Расчет удельной работы пластической деформации

В теориях пластичности принято такое предположение, что девиатор напряжения и приращение девиатора деформации подобны [1], другими словами вектор напряжения и приращение вектора девиатора деформации коллинеарны. В настоящей работе это предположение не принимается, а по экспериментальным данным определяется вектор девиатора напряжения и приращение вектора девиатора деформации. На основании этих расчетов рассматривается, что вышеописанное предположение какое отклонение дает во величине удельной работы пластической деформации.

В настоящей работе представляются результаты экспериментов, на основании которых открывается возможность расчета и исследования удельной работы пластической деформации.

В расчетах работы пластической деформации используется пятимерное, ортогональное пространство девиаторов напряжения и деформации [2].

Приращение работы пластической деформации ($\delta W^p$) при маленькой, но конечной деформации [3]:

$$\delta W^p = \bar{S} \cdot \overline{\delta e^p} \, , \tag{1}$$

где

$\bar{S}$ — вектор девиатора напряжения,

$\overline{\delta e^p}$ — приращение вектора девиатора пластической деформации.

Вектор девиатора напряжения:

$$\bar{S} = \sum_{k=1}^{5} S_k \cdot \bar{p}_k \, , \tag{2}$$

где

$\bar{p}_k$ $(k = 1,2, \ldots, 5)$ — единичные векторы пятимерного пространства девиаторов,

$S_k$ $(k = 1,2, \ldots, 5)$ — координаты вектора $\bar{S}$, то есть

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \sigma'_{11} \, , \; S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma'_{22} - \sigma'_{33}) \, ,$$
$$S_3 = \sqrt{2}\, \sigma'_{12} \, , \; S_3 = \sqrt{2}\, \sigma'_{23} \, , \; S_5 = \sqrt{2}\, \sigma'_{31} \, ; \tag{3}$$

$\sigma'_{mn}$ $(m, n = 1, 2, 3)$ — координаты девиатора напряжения, относящегося к вектору $\bar{S}$.

Приращение вектора девиатора пластической деформации:

$$\overline{\delta e^p} = \sum_{k=1}^{5} \delta e_k^p \cdot \bar{p}_k \,, \tag{4}$$

где

$\delta e_k^p$ $(k = 1,2, \ldots, 5)$ — координаты вектора $\overline{\delta e^p}$, то есть

$$\begin{gathered} \delta e_1^p = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \delta e_{11}^p \,, \qquad \delta e_2^p = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\delta e_{22}^p - \delta e_{33}^p\right), \\ \delta e_3^p = \sqrt{2}\, \delta e_{12}^p, \quad \delta e_4^p = \sqrt{2}\, \delta e_{23}^p, \quad \delta e_5^p = \sqrt{2}\, \delta e_{31}^p \,. \end{gathered} \tag{5}$$

В выражениях (5) $\delta e_{mn}^p$ $(m, n = 1, 2, 3)$ есть координаты приращения девиатора пластической деформации, относящиеся к вектору $\overline{\delta e^p}$.

Выражение (1), написанное абсолютными значениями векторов и углами между ними:

$$\delta W^p = S \cdot \delta e^p \cdot \cos \omega \,, \tag{6}$$

где

$$S = |\bar{S}| \,; \quad \delta e^p = |\overline{\delta e^p}| \,;$$

$\omega$ — угол между $\bar{S}$ и $\overline{\delta e^p}$.

Выражая через координаты векторов можно написать

$$\cos \omega = \frac{\sum_{k=1}^{5} S_k \cdot \delta e_k^p}{S \cdot \delta e^p} \,. \tag{7}$$

Вместо абсолютных значений векторов девиатора напряжения и девиатора деформации в литературе обычно применяются пропорционально им интенсивность напряжения $(\sigma_i)$, и интенсивность деформации $(\varepsilon_i)$. Абсолютные значения векторов $\bar{S}$ и $\overline{\delta e^p}$ через соответствующие интенсивности выражаются следующим образом:

$$S = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \sigma_i \,; \qquad \delta e^p = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \delta^* \varepsilon_i^p, \tag{8}$$

где в выражении $\delta^* \varepsilon_i^p$ звездочка означает, что интенсивность деформации образуется из координат приращения тензора деформации. Этими обозначениями:

$$\delta W^p = \sigma_i \cdot \delta^* \varepsilon_i^p \cdot \cos \omega \,. \tag{9}$$

В дальнейшем предполагаем, что в процессе пластической деформации изменение объема равняется нулю, и главные оси тензора напряжения совпадают с главными осями приращения тензора деформации. Тогда координаты векторов $\bar{S}$ и $\overline{\delta e}^p$ выражаются через главные напряжения и главные значения приращения тензора деформации по (3):

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{3}\,, \quad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\,, \quad S_3 = S_4 = S_5 = 0\,; \tag{10}$$

$$\delta e_1^p = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\delta\varepsilon_1^p\,, \quad \delta e_2^p = \frac{\sqrt{2}}{2}(\delta\varepsilon_1^p+2\delta\varepsilon_2^p)\,, \quad \delta e_3^p = \delta e_4^p = \delta e_5^p = 0\,. \tag{11}$$

В выражениях (11) по нашим предположениям учитывалось, что

$$\delta\varepsilon_1^p+\delta\varepsilon_2^p+\delta\varepsilon_3^p = 0\,.$$

Учитывая формулы (10), (11) выражение (7) можно представить в виде:

$$\cos\omega = \frac{\sigma_1\cdot\delta\varepsilon_1^p+\sigma_2\cdot\delta\varepsilon_2^p+\sigma_3\cdot\delta\varepsilon_3^p}{\sigma_i\cdot\delta\varepsilon_i^p}\,. \tag{12}$$

## Зависимость между углом ω и параметрами Надаи-Лоде

Отклонение от подобия девиаторов принято характеризовать и параметрами Надаи-Лоде $\mu$, $\nu$, где

$$\mu = \frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}\,; \quad \nu = \frac{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}\,. \tag{13}$$

Пользуясь формулами (10), (11) в пятимерном пространстве, составляющие векторов только по направлениям $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ будут различаться от нуля. Пусть нарисуем к представлению зависимости $\mu$, $\nu$, $\omega$ в плоскости единичных векторов $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ любую криволинейную траекторию деформации. К любой точке этой кривой нанесем приращение вектора деформации и вектора напряжения (рис. 1). Для определения искомой зависимости возьмем пару осей ($u$, $v$), которые направлениями $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ заключают угол 30°. Из рис. 1. непосредственно видны следующие зависимости:

$$\omega = \alpha_s - \alpha_{\delta e}\,; \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_s = \frac{S_v}{S_u} = \frac{S_2\cdot\cos 30°-S_1\cdot\sin 30°}{S_2\cdot\sin 30°+S_1\cdot\cos 30°}\,. \tag{15}$$

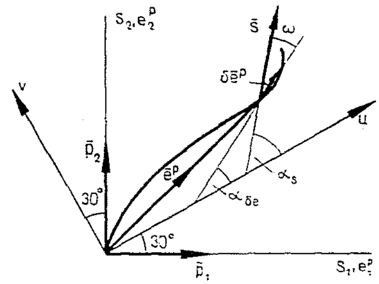


*Рис. 1.* Зависимость между углом подобия $\omega$ и параметрами Надаи-Лоде

В формулу (15) вместо $S_1$, $S_2$ подставив выражения (10) получим:

$$\operatorname{tg}\alpha_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mu . \tag{16}$$

Подобно этому получим, что

$$\operatorname{tg}\alpha_{\delta e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\delta\varepsilon_2^p - \delta\varepsilon_1^p - \delta\varepsilon_3^p}{\delta\varepsilon_1^p - \delta\varepsilon_3^p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\nu_\delta^p . \tag{17}$$

В обозначении $\nu_\delta^p$, индекс $\delta$ означает то, что $\nu_\delta^p$ надо вычислять из главных значений приращения тензора деформации.

Угол $\omega$ по формуле (14) с учетом (16), (17):

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\mu - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\nu_\delta^p . \tag{18}$$

Из (18) видно, что если

$$\mu = \nu_\delta^p , \quad \text{то} \quad \omega = 0 , \tag{19}$$

то есть девиатор напряжения и приращение девиатора деформации подобны.

## Случай двухосного напряженного состояния

При исследовании деформации тонкостенных труб вводятся следующие обозначения:

$\sigma_a$ — осевое напряжение,
$\sigma_t$ — тангенциальное напряжение,
$\sigma_r$ — радиальное напряжение,
$\delta\varepsilon_a^p$ — приращение осевого пластического удлинения,
$\delta\varepsilon_t^p$ — приращение тангенциального пластического удлинения,
$\delta\varepsilon_r^p$ — приращение радиального пластического удлинения.

В случае тонкостенных трубок, нагруженных растягивающей силой и внутренним гидравлическим давлением, $\sigma_r$ пренебрежимо мало по отношению к $\sigma_a$ и $\sigma_t$, то есть напряженное состояние с хорошим приближением является двухосным [4].

Если $\sigma_r = \sigma_3 \cong 0$, то из (12) получим:

$$\cos\alpha = \frac{\sigma_i \cdot \delta\varepsilon_1^p + \sigma_2 \cdot \delta\varepsilon_2^p}{\sigma_i \cdot \delta\varepsilon_i^p}, \tag{20}$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_t^2 - \sigma_a \cdot \sigma_t}, \tag{21}$$

$$\delta^*\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta\varepsilon_a^{p2} + \delta\varepsilon_t^{p2} + \delta\varepsilon_a^p \cdot \delta\varepsilon_t^p}. \tag{22}$$

В дальнейшем вычисляется $\cos\omega$ для нескольких случаев, относящихся к характерным значениям отношения $\sigma_t/\sigma_a$.

а) $\sigma_t/\sigma_a = 0$, то есть случай одноосного растяжения; $(\mu = -1)$.

При этом

$$\sigma_1 = \sigma_a, \qquad \sigma_2 = 0;$$
$$\delta\varepsilon_1^p = \delta\varepsilon_a^p, \qquad \delta\varepsilon_2^p = \delta\varepsilon_t^p = 0{,}5\,\delta\varepsilon_a^p,$$
$$\sigma_i = \sigma_a, \qquad \delta^*\varepsilon_i^p = \delta\varepsilon_a^p.$$

Этими значениями из формулы (20) получим, что

$$\cos\omega = \frac{\sigma_a \cdot \delta\varepsilon_a^p}{\sigma_a \cdot \delta\varepsilon_a^p} = 1. \tag{23}$$

б) $\sigma_t/\sigma_a = 0{,}5$, в этом случае диаметр трубки остается постоянным [4]; $(\mu = 0)$.

При этом

$$\sigma_1 = \sigma_a, \qquad \sigma_2 = \sigma_t = 0{,}5\,\sigma_a;$$
$$\delta\varepsilon_1^p = \delta\varepsilon_a^p, \qquad \delta\varepsilon_2^p = \delta\varepsilon_t^p = 0;$$
$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_a, \qquad \delta^*\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}}\delta\varepsilon_a^p.$$

Этими значениями

$$\cos\omega = \frac{\sigma_a \cdot \delta\varepsilon_a^p}{\sigma_a \cdot \delta\varepsilon_a^p} = 1. \tag{24}$$

в) $\sigma_t/\sigma_a = 1$, случай двухосного одинакового растяжения; $(\mu = 1)$. При этом

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_a = \sigma_t;$$
$$\delta\varepsilon_1^p = \delta\varepsilon_2^p = \delta\varepsilon_a^p = \delta\varepsilon_t^p;$$
$$\sigma_i = \sigma_a, \quad \delta^*\varepsilon_i^p = 2\,\delta\varepsilon_a^p.$$

Этими значениями

$$\cos\omega = \frac{2\,\sigma_a \cdot \delta\varepsilon_a^p}{2\,\sigma_a \cdot \delta\varepsilon_a^p} = 1. \tag{25}$$

г) $\sigma_t/\sigma_a = 2$, случай внутреннего гидравлического давления; $(\mu = 0)$. При этом

$$\sigma_1 = \sigma_t, \qquad \sigma_2 = \sigma_a;$$
$$\delta\varepsilon_1^p = \delta\varepsilon_t^p, \qquad \delta\varepsilon_2^p = \delta\varepsilon_a^p = 0;$$
$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_t, \quad \delta^*\varepsilon_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}}\delta\varepsilon_t^p.$$

Этими значениями

$$\cos\omega = \frac{\sigma_t \cdot \delta\varepsilon_t^p}{\sigma_t \cdot \delta\varepsilon_t^p} = 1. \tag{26}$$

В вышеизложенных случаях просто было убедиться в том, что при принятых условиях вектор девиатора напряжения и приращение вектора девиатора деформации коллинеарны, то есть соответствующие девиаторы подобны.

## Результаты экспериментов[1]

В дальнейшем на основании данных, полученных из экспериментов, рассматривается влияние угла между вектором девиатора напряжения и приращением вектора девиатора деформации на величину удельной работы пластической деформации.

На тонкостенных никелевых и медных трубках осуществились простые и сложные нагружения. Эксперименты, методы измерений и данные образца сообщены в работе [3]. Траектории нагружения показаны на рис. 2. Учитывая, что $\sigma_r = \sigma_3 \cong 0$, из формул (10) получим, что

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_a - 0{,}5\sigma_t), \quad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_t. \tag{27}$$

[1] Эксперименты проводились в лаборатории Кафедры Сопротивления Материалов Ленинградского Политехнического Института под руководством проф. Ю. И. Ягна на установке, описанной в работе [5].

Координаты на рис. 2. определены с помощью выражений (27). Процесс нагружения изображен совместно на рис. 2а и 2б. Нагружение осуществилось в двух ступенях. В первой ступени отдельные группы трубок нагружались по разному (рис. 2а), а потом разгружались. Границей нагружения первой ступени была для никелевых трубок $\varepsilon_{iA}^{*p} = \sum_{OA} \delta^* \varepsilon_i^p \cong 17{,}2\%$, для медных трубок $\varepsilon_{iA}^{*p} \cong 21{,}4\%$. Во второй ступени все трубки нагружались по

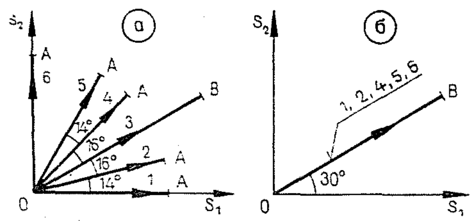


*Рис. 2.* Траектории нагружения: а) первая ступень нагружения, б) вторая ступень нагружения

одинаковой траектории негружения до предела несущей способности (рис. 2б). Таким образом, конец второй ступени нагружения (B) совпадает с пределом несущей способности. Никелевые трубки нагружались по программам 1, 2, 3, 4, 5, 6; медные трубки по программам 3, 6. В первой ступени нагружение простое, во второй — рассматривая весь процесс нагружения — сложное. $\delta^* \varepsilon_i^p = 0-3\%$ — в зависимости от числа измерений и от распределения измерений во время нагружения.

Полученные из экспериментов диаграммы $\cos \omega - \varepsilon_i^{*p}$ для никеля показаны на рис. 3а, 3б, где по горизонтальной оси откладывается $\varepsilon_i^{*p} = \sum \delta^* \varepsilon_i^p$. Рис. 3а относится к первой ступени, а рис. 3б ко второй ступени нагружения. На рис. 3б по оси абсцисс откладывается $\Delta\varepsilon^{*p} = \varepsilon_i^{*p} - \varepsilon_{iA}^{*p}$.

При никелевых трубках в первой ступени программ нагружения 1 и 2 $\cos \omega = 0{,}983$; а в программах 3, 4, 5, 6 $0{,}998 \leq \cos \omega \leq 0{,}999$. Участок OA программы 1 — случай одноосного растяжения, где $\cos \omega = 0{,}983$ — этот результат бросается в глаза, потому что по расчетам (23) $\cos \omega = 1$. Причиной расхождения результатов расчетов и экспериментов может быть, например, начальная, ибо проявляющаяся при деформации анизотропия.

Во второй ступени нагружения никелевых трубок в каждой программе $\cos \omega \cong 1$, даже и в тех программах, в которых в первой ступени нагружения было расхождение от $\cos \omega = 1$.

$\cos \omega$ в течение деформации в каждой ступени — с допустимым разбросом — имело постоянное значение.

В случае медных трубок в обоих случаях нагружения $0{,}999 \leq \cos \omega \leq 1{,}000$.

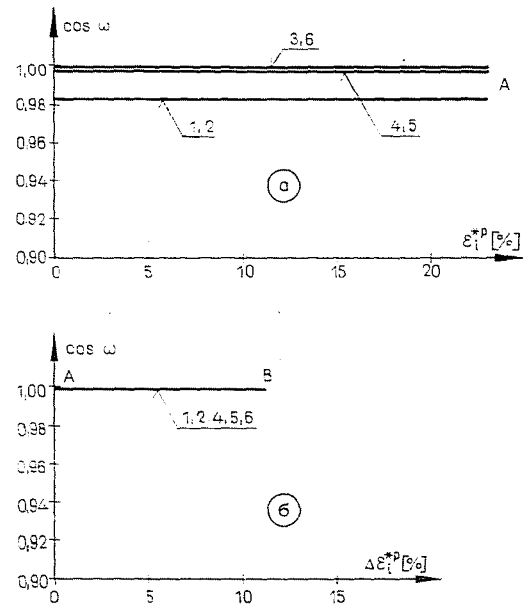


*Рис. 3.* Изменение угла подобия в процессах деформации никелевых трубок: а) первая ступень деформации, б) вторая ступень деформации

В наших экспериментах максимальное отклонение от $\cos\omega = 1$ имело место в первой ступени программы 1 для никелевых трубок. Разность удельных работ пластической деформации в процентах, расчитанных для соответствующей программы 1 и при $\cos\omega = 1$ и при $\cos\omega = 0{,}983$:

$$\frac{\sigma_i \cdot \delta^* \varepsilon_i^p - \sigma_i \cdot \delta^* \varepsilon_i^p \cdot \cos\omega}{\sigma_i \cdot \delta^* \varepsilon_i^p \cos\omega} 100 = \frac{1{,}000 - 0{,}983}{0{,}983} 100 = 1{,}73\,\% .$$

Это значит, что в рассмотренных случаях разница между удельными работами пластической деформации, определенными с учетом и без учета отклонения от подобия девиаторов, максимально 1,73%.

На основании вышеописанных можем сделать вывод, что при расчете работы пластической деформации изотропных или квази-изотропных материалов неучет отклонения от подобия девиатора напряжения и приращения девиатора деформации оказывает пренебрежимо малую ошибку.

Это заключение относится только к пластической части работы деформации. Ибо при исследовании суммы упругой и пластической деформаций угол между вектором напряжения и приращением девиатора вектора деформации при сложных нагружениях, особенно для следа запаздывания может быть и значительным [6].

## Резюме

В настоящей работе на основании экспериментов рассматривается влияние отклонения от подобия девиатора напряжения и приращения девиатора деформации на удельную работу пластической деформации.

Эксперименты проводились на тонкостенных никелевых и медных трубках. Трубки нагружались осевой растягивающей силой и внутренним гидравлическим давлением. Рассматривались и простые и сложные нагружения.

По экспериментам удельная работа пластической деформации определялось двумя способами. В одном случае при расчете принималось то предположение, что девиатор напряжения и приращение девиатора пластической деформации подобны, а в другом случае учитывалось отклонение от подобия девиаторов. Разница между удельными работами пластической деформации, определенными двумя способами — в рассмотренных случаях — не достигает 2%-ов.

## Литература

1. Качанов, Л. М.: Основы теории пластичности. Изд. Наука, Москва, 1969.
2. Ильюшин, А. А.: Пластичность. Изд. АН. СССР, Москва, 1963.
3. Kaszap, K.: Periodica Polytechnica **14,** 91—105 (1970).
4. Nádai, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. Mc Graw—Hill, 1950.
5. Ягн, Ю. И.—Шишмарев, О. А.: Заводская лаборатория **10**, 1243—1245 (1958).
6. Ленский, В. С.: Изв. АН. СССР, ОТН. **11,** 15—24, (1958).

Kálmán Kaszap, Budapest XI., Műegyetem rkp. 3. Венгрия