ÜBER DAS BEGRIFFSSYSTEM DER VIERERTENSOREN IN DER RELATIVISTISCHEN ELEKTRODYNAMIK*

Von

T. Elek

Lehrstuhl für Philosophie, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 23. April 1969)

Der Begriff des Tensors im dreidimensionalen Raum bzw. in der Beschreibung physikalischer Vorgänge, die sich in einem kartesischen Koordinatensystem K abspielen, bezeichnet eine Größe mit $3^2 = 9$ Komponenten. Er kann in der Form der dreizeiligen und dreispaltigen quadratischen Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

oder in der kürzeren Form

$$\mathbf{T} = (T_{ik}) \text{ mit } \begin{aligned} i &= 1, 2, 3 \\ k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{2}$$

geschrieben werden.

Bei diesem Dreiertensor mit zwei Indizes (auch Dreiertensor zweiter Ordnung genannt) handelt es sich um eine durchaus reale Begriffsbildung. Seinen Namen hat der Tensor von den Spannungen (Tensionen), die im deformierten elastischen Körper bzw. an den Grenzflächen der Volumelemente in seinem Inneren auftreten und die vom Stoff der benachbarten Volumelemente geweckt werden. Durch eine ähnliche Größe mit 9 Komponenten läßt sich auch die Bewegung jedes beliebigen Punktes in einem unter der Einwirkung einer Dehnungs- oder Druckkraft stehenden elastischen Körper charakterisieren.

Mathematisch kann nachgewiesen werden, daß der Tensor eigentlich den linearen homogenen funktionellen Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Vektorgrößen beschreibt. Wählen wir beispielsweise an der Grenzfläche des betrachteten Volumelements im deformierten elastischen Körper ein Stückchen mit dem durch einen gegebenen Richtungssinn bestimmten Normal-

* Diese Studie ist die organische Fortsetzung der in der Nummer 1/1970 erschienenen Abhandlung des Verfassers »Über das Begriffssystem der Vierervektoren in der relativistischen Mechanik« und setzt somit deren Kenntnis voraus.

Einheitsvektor **n** (dem Einheitsvektor mit dem Richtungssinn normal auf das Flächenelement), dann können wir die drei Komponenten der auf dem gewählten Flächenstückchen wirksamen Spannung $\mathbf{T}_n$ ermitteln, indem wir die Reihen des Spannungstensors mit den Komponenten (n_1, n_2, n_3) des Vektors **n** »komponieren«:

$$\left.\begin{aligned} T_{n1} &= T_{11}n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 \\ T_{n2} &= T_{21}n_1 + T_{22}n_2 + T_{23}n_3 \\ T_{n3} &= T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + T_{33}n_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

In verkürzter Form schreibt sich der homogen lineare funktionelle Zusammenhang zwischen den Vektoren $\mathbf{T}_n$ und **n** zu

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T}\,\mathbf{n}. \tag{4}$$

Auf dieser Grundlage lautet die durchaus zutreffende verallgemeinerte Definition des *mathematischen* Begriffes des Dreiertensors wie folgt: im dreidimensionalen Raum wird jene Größe **T** mit 9 Komponenten als Tensor 2. Ordnung (als Tensor mit zwei Indizes) bezeichnet, die nach der Methode des zeilenweisen Komponierens (auf homogen lineare Weise) *jedem beliebigen* Wert des unabhängig variablen Vektors s (s_1, s_2, s_3) im gleichen Koordinatensystem (im weiteren KS) einen bestimmten »Bildvektor« v (v_1, v_2, v_3) als homogen lineare Vektorfunktion von s zuordnet. In symbolischer Schreibweise hat man also

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\,\mathbf{s}. \tag{5}$$

Es gilt mithin die Feststellung: der Dreiertensor drückt im Grunde genommen die Vereinigung der 9 Komponenten einer einen gegebenen Vektor in einen anderen überführenden homogenen linearen *Konfigurationstransformation* zu einem einzigen Begriff aus. Nachweisbar *ist* der homogen lineare funktionelle Zusammenhang zwischen den beiden Vektoren, d. h. *die Tensorgröße* T mit ihren 9 Komponenten *gegen die homogen lineare Koordinatentransformation kovariant.*

Beim Übergang aus dem System K in das um den gemeinsamen Anfangspunkt gedrehte System K' müssen die Vektoren s und v nach den bekannten Regeln der Koordinatentransformation mit den neuen, in die Richtung der neuen Koordinatenachsen fallenden Komponenten (s_1', s_2', s_3') bzw. (v_1', v_2', v_3') angesetzt werden:

$$s_i' = \varkappa_{ir}\, s_r, \qquad v_i' = \varkappa_{ir}\, v_r. \tag{6}$$

Hier ändern sich jedoch nur die Komponentenwerte: bei der Koordinatentransformation bildet der Inbegriff des neuen Zahlendreiers (s_1', s_2', s_3')

derselbe Vektor **s** wie der Inbegriff des früheren Zahlendreiers (s_1, s_2, s_3), und selbstverständlich gilt dies ebenso auch für den Vektor **v**. Die Vektoren **s** und **v** selbst sind mithin — abweichend von ihren Komponenten — von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Dann aber muß gemäß (5) auch der Tensor **T** selbst unabhängig von jenem Koordinatensystem sein, in welchem er den funktionellen Zusammenhang zwischen den Vektoren **s** und **v** in der Konfigurationstransformation beschreibt. Naturgemäß besagt dieses Postulat nicht, *daß die 9 Komponenten* der Koordinatentransformation gegenüber *unveränderlich sein müssen*, vielmehr erfordert es die Anwendung von Transformationsformeln, die den Zusammenhang (5) zusammen mit den Transformationsformeln der Vektorkomponenten in die richtige Gleichheit überführen. Es läßt sich beweisen, daß diese Transformationsformeln die Gestalt

$$T'_{ik} = \alpha_{ir}\,\alpha_{ks}\,T_{rs} \tag{7}$$

haben. Da

$$i = 1, 2, 3 \qquad k = 1, 2, 3$$
$$r = 1, 2, 3 \qquad s = 1, 2, 3.$$

bedeutet dieses Symbol 9 Formeln, deren rechte Seite in jedem Fall aus einer 9gliedrigen Summe besteht.

Die homogen lineare Transformationsformel der Vektoren für jeden beliebigen Vektor **a** und **b** schreibt sich zu

$$a'_i = \alpha_{ir}\,a_r, \qquad b'_k = \alpha_{ks}\,b_s \tag{8}$$

bzw. nach Multiplikation der beiden Gleichheiten zu

$$a'_i\,b'_k = \alpha_{ir}\,\alpha_{ks}\,a_r\,b_s\,. \tag{9}$$

Ein Vergleich von (7) mit (9) ergibt für die Tensorentransformation folgende Regel: *die Komponenten von Dreiertensoren 2. Ordnung transformieren sich in der homogen linearen Koordinatentransformation wie die Produkte aus den entsprechenden Komponenten zweier Vektoren (d. h. wie die Produkte der Differenzen zwischen den Koordinaten mit entsprechenden Indizes).*

Nach dieser Regel müssen wir also die 9 Komponenten des Tensors **T** im System K transformieren, um im System K' 9 neue Tensorkomponenten zu erhalten, mit deren Anwendung die Komponenten in K' des Vektors **s** in die Komponenten des Bildvektors **v** in K' übergehen. *Diese soeben festgelegte Regel kann auch als Definition des Dreiertensors 2. Ordnung gelten.*

Einstein unterläßt es, bei der Einführung des Tensorbegriffes auf die oben erwähnten *empirischen* physikalischen Grundlagen einzugehen, die zu diesem Begriff hinführen. Statt dessen beschränkt er sich auf die obige rein mathematische Definition mit der Erklärung, es gebe »*geometrische Realitäten*«, die auf den Begriff des Tensors führen.[1]

Entsprechend führt er den Begriff des Dreiertensors 2. Stufe als Inbegriff der *in der Gleichung der Fläche zweiten Grades* aufscheinenden Koeffizienten, u. zw. in der Weise ein, *daß sich diese Definition* mit Hilfe der Transformationsregel *auf den Begriff von Tensoren in bezug auf Räume beliebig vieler Dimensionen und auf Tensoren beliebig hoher Indexzahl extrapolieren läßt.*

Bemerkt sei hierzu, daß der Tensorbegriff eine logische Verallgemeinerung der skalaren und der Vektorgröße darstellt, daß Vektoren mathematisch als Tensoren erster Ordnung (Ein-Index-Tensoren), Skalare hingegen als Tensoren nullter Ordnung gedeutet werden können. In der vierdimensionalen Schreibweise hat mithin:

der Tensor der Ordnung 0 . . . . . $4^0 = 1$ Komponente,
der Tensor der Ordnung 1 . . . . . $4^1 = 4$ Komponenten,
der Tensor der Ordnung 2 . . . . . $4^2 = 16$ Komponenten,
der Tensor der Ordnung 3 . . . . . $4^3 = 64$ Komponenten

.
.
.

der Tensor der Ordnung α . . . . . 4^α Komponenten.

Einstein benötigt den verallgemeinerten Begriff des Tensors vor allem zur Untermauerung der physikalischen Realität des Raumzeitkontinuums und in diesem zur Untermauerung der Realität der Konfigurationen zweiten Grades (der quadratischen Konfigurationen), wie etwa derjenigen des »Lichtkegels«, den die Gleichung $(ds)^2 = 0$ beschreibt, d. h. er bedient sich dieses Begriffes im hypostasierenden Sinne. Von besonderer Wichtigkeit ist für ihn der Begriff des *Vierertensors zweiter Ordnung*, einer Größe mit $4^2 = 16$ Komponenten, die nach dem Muster von (1) durch eine quadratische Matrix vom Schema

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} = (T_{ik}) \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{array} \tag{10}$$

beschrieben werden kann.

Der Vierertensor zweiter Ordnung bedeutet ebenso einen homogenen linearen funktionellen Zusammenhang zwischen zwei variablen Vierervekto-

[1] EINSTEIN, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956, pp. 8/9.

ren, wie er für den Fall der Dreiervektoren und -tensoren besteht [vgl. die Formel (5)], und dieser funktionelle Zusammenhang, d. h. die Größe **T** mit 16 Komponenten ist gleichfalls unabhängig vom KS (Lorentz-Invariant). Analog der Formel (5) haben die einander zugehörigen Vierervektoren **s** und **v** sowie der Vierertensor **T**, der zwischen ihnen den homogen linearen Zusammenhang herstellt, in jedem KS ihre Repräsentationen, die anhand der Formeln der als Koordinatentransformation gedeuteten Lorentz-Transformation (LT) ineinander umgerechnet werden können. Die Vektorkomponenten transformieren sich auch hier wie die Koordinatendifferentiale, die Komponenten des Tensors T_{ik} hingegen wie die Produkte der Koordinatendifferentiale dx_i, dx_k [vgl. (6)—(9)].

Nach der Auffassung Einsteins bedeuten freilich diese Koordinatentransformationen auch hier wieder die Umrechnungen zwischen den *Inertialsystemen*, obwohl die Vektoren und Tensoren in der immateriellen, unstofflichen, feldfreien Welt der Inertialsysteme im allgemeinen mit keinerlei physikalischer Bedeutung ausgestattet werden können. Nach der Auffassung L. Jánossys hingegen beziehen sich die verschiedenen Repräsentationen der Vierervektoren und -tensoren und die *Koordinatentransformationsformeln*, mit deren Hilfe sie ineinander überführt werden, wieder auf die *Lorentz-Systeme*.

In der Konzeption L. Jánossys bedeutet jedoch die LT auch weiterhin entscheidend eine *Konfigurationstransformation*, die 16 Koeffizienten der LT können also nicht einfach nach dem *mathematischen Schema einer Matrix* aufgeschrieben, sondern als *Vierertensor mit physikalischer Bedeutung (Lorentz-Tensor)* zusammengefaßt werden:

$$\mathbf{L} = (\alpha_{ik}) \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4. \end{array} \tag{11}$$

Für die Komponenten des Lorentz-Tensors gelten folgende spezielle Zusammenhänge:

$$\alpha_{ir}\,\alpha_{kr} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } i \neq k \\ 1, \text{ wenn } i = k. \end{cases} \tag{12}$$

In der Tat: den Ereignisvektor $\mathbf{x}$ (x_1, x_2, x_3, x_4) (mit anderen Worten den Vierer-Ortsvektor) überführt die LT aufgrund der Formeln

$$x'_i = \alpha_{ir}\,x_r \tag{13}$$

in den Bildvektor $\mathbf{x}'$ (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) im gleichen Koordinatensystem; nach dem Muster von (5) kann also

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\,\mathbf{x} \tag{14}$$

geschrieben werden.

Dieser Zusammenhang zwischen den Ereignisvektoren x uns x′ ist von der Wahl des KS (sofern wir innerhalb der Klasse der Lorentz-Systeme bleiben) ebenso unabhängig wie ganz allgemein der homogen lineare funktionelle Vektor-Vektor-Zusammenhang, wie ihn die Tensoren herstellen.

Den *physikalischen* Sinn verleiht den Vierertensoren zweiter Stufe im Falle der Lorentz-Tensoren und auch sonst ganz allgemein der Umstand, *daß sie die vom KS unabhängigen Zusammenhänge zwischen den Vierervektoren im Sinne der Konfigurationstransformation repräsentieren. Die Lorentz-Invarianz der allgemeinen Vierertensoren* bedeutet in dieser Konzeption gewisse quantitativ unveränderte Elemente *des vom KS unabhängigen Zusammenhanges* zwischen den Zuständen eines physikalischen Systems vor und nach seiner Beschleunigung, u. zw. bedeutet sie ausschlaggebend den unverändert bleibenden homogen linearen Charakter jenes vom KS unabhängigen funktionellen Zusammenhanges, der zwischen den im gegebenen materiellen System als Vierervektoren gedeuteten Größen v und s auch im Zustand vor und nach der Beschleunigung besteht.

Mit den Vierertensoren lassen sich die organischen physikalischen Beziehungen zwischen bestimmten physikalischen Größen ohne Zweifel besser zum Ausdruck bringen als in der dreidimensionalen Schreibweise. Besonders wird uns dies z. B. bei der Behandlung des elektromagnetischen Feldes in den Fällen des Feldintensitäts- und des Energietensors deutlich werden. Die Komponenten dieser Tensoren ändern sich von Ort zu Ort und von Zeitpunkt zu Zeitpunkt, d. h. sie sind Funktionen der Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4). *Die Lorentz-Invarianz dieser Vierertensoren weist in der Deutung als Konfigurationstransformation eben auf das Fortbestehen der durch sie ausgedrückten organischen physikalischen Beziehungen in jenen Fällen hin, in denen das physikalische System, welches derartige Beziehungen herstellt und trägt, eine Beschleunigung erfährt, unter deren Einfluß die bekannten relativistischen Effekte auftreten.* Die LT transformiert hierbei den Ortsvektor x (x_1, x_2, x_3, x_4) der vierdimensionalen Schreibweise in den Ortsvektor x′ (x_1', x_2', x_3', x_4'), und die gleiche LT leitet die Komponenten der in Rede stehenden Vektoren in die den transformierten Ortsvektoren zugehörigen Werte über. Die LT behält also die durch die gegebenen Vierertensoren abgebildeten physikalischen Zusammenhänge unverändert bei, d. h. diese sind bezüglich der LT in ihrer Deutung als Konfigurationstransformation kovariant.

Mit dem mathematischen Verhalten der in Abhängigkeit von den Koordinaten veränderlichen Tensoren befaßt sich die *Tensoranalysis*. Hierher gehören z. B. *die Regeln der Differentiation* von Tensoren. Es läßt sich beweisen, daß die partiellen Ableitungen, die man durch Differentiation sämtlicher Komponenten eines Vektors der Ordnung α erhält, einen Tensor der Ordnung $(\alpha + 1)$ bilden.[2]

[2] EINSTEIN, A.: l. c., p. 9.

ren, wie er für den Fall der Dreiervektoren und -tensoren besteht [vgl. die Formel (5)], und dieser funktionelle Zusammenhang, d. h. die Größe **T** mit 16 Komponenten ist gleichfalls unabhängig vom KS (Lorentz-Invariant). Analog der Formel (5) haben die einander zugehörigen Vierervektoren **s** und **v** sowie der Vierertensor **T**, der zwischen ihnen den homogen linearen Zusammenhang herstellt, in jedem KS ihre Repräsentationen, die anhand der Formeln der als Koordinatentransformation gedeuteten Lorentz-Transformation (LT) ineinander umgerechnet werden können. Die Vektorkomponenten transformieren sich auch hier wie die Koordinatendifferentiale, die Komponenten des Tensors T_{ik} hingegen wie die Produkte der Koordinatendifferentiale dx_i, dx_k [vgl. (6)—(9)].

Nach der Auffassung Einsteins bedeuten freilich diese Koordinatentransformationen auch hier wieder die Umrechnungen zwischen den *Inertialsystemen*, obwohl die Vektoren und Tensoren in der immateriellen, unstofflichen, feldfreien Welt der Inertialsysteme im allgemeinen mit keinerlei physikalischer Bedeutung ausgestattet werden können. Nach der Auffassung L. Jánossys hingegen beziehen sich die verschiedenen Repräsentationen der Vierervektoren und -tensoren und die *Koordinatentransformationsformeln*, mit deren Hilfe sie ineinander überführt werden, wieder auf die *Lorentz-Systeme*.

In der Konzeption L. Jánossys bedeutet jedoch die LT auch weiterhin entscheidend eine *Konfigurationstransformation*, die 16 Koeffizienten der LT können also nicht einfach nach dem *mathematischen Schema einer Matrix* aufgeschrieben, sondern als *Vierertensor mit physikalischer Bedeutung (Lorentz-Tensor)* zusammengefaßt werden:

$$\mathbf{L} = (\alpha_{ik}) \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4. \end{array} \tag{11}$$

Für die Komponenten des Lorentz-Tensors gelten folgende spezielle Zusammenhänge:

$$\alpha_{ir}\,\alpha_{kr} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \neq k \\ 1, & \text{wenn } i = k. \end{cases} \tag{12}$$

In der Tat: den Ereignisvektor **x** (x_1, x_2, x_3, x_4) (mit anderen Worten den Vierer-Ortsvektor) überführt die LT aufgrund der Formeln

$$x_i' = \alpha_{ir}\, x_r \tag{13}$$

in den Bildvektor **x**′ (x_1', x_2', x_3', x_4') im gleichen Koordinatensystem; nach dem Muster von (5) kann also

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\,\mathbf{x} \tag{14}$$

geschrieben werden.

Dieser Zusammenhang zwischen den Ereignisvektoren **x** uns **x**′ ist von der Wahl des KS (sofern wir innerhalb der Klasse der Lorentz-Systeme bleiben) ebenso unabhängig wie ganz allgemein der homogen lineare funktionelle Vektor-Vektor-Zusammenhang, wie ihn die Tensoren herstellen.

Den *physikalischen* Sinn verleiht den Vierertensoren zweiter Stufe im Falle der Lorentz-Tensoren und auch sonst ganz allgemein der Umstand, *daß sie die vom KS unabhängigen Zusammenhänge zwischen den Vierervektoren im Sinne der Konfigurationstransformation repräsentieren. Die Lorentz-Invarianz der allgemeinen Vierertensoren* bedeutet in dieser Konzeption gewisse quantitativ unveränderte Elemente *des vom KS unabhängigen Zusammenhanges* zwischen den Zuständen eines physikalischen Systems vor und nach seiner Beschleunigung, u. zw. bedeutet sie ausschlaggebend den unverändert bleibenden homogen linearen Charakter jenes vom KS unabhängigen funktionellen Zusammenhanges, der zwischen den im gegebenen materiellen System als Vierervektoren gedeuteten Größen **v** und **s** auch im Zustand vor und nach der Beschleunigung besteht.

Mit den Vierertensoren lassen sich die organischen physikalischen Beziehungen zwischen bestimmten physikalischen Größen ohne Zweifel besser zum Ausdruck bringen als in der dreidimensionalen Schreibweise. Besonders wird uns dies z. B. bei der Behandlung des elektromagnetischen Feldes in den Fällen des Feldintensitäts- und des Energietensors deutlich werden. Die Komponenten dieser Tensoren ändern sich von Ort zu Ort und von Zeitpunkt zu Zeitpunkt, d. h. sie sind Funktionen der Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4). *Die Lorentz-Invarianz dieser Vierertensoren weist in der Deutung als Konfigurationstransformation eben auf das Fortbestehen der durch sie ausgedrückten organischen physikalischen Beziehungen in jenen Fällen hin, in denen das physikalische System, welches derartige Beziehungen herstellt und trägt, eine Beschleunigung erfährt, unter deren Einfluß die bekannten relativistischen Effekte auftreten.* Die LT transformiert hierbei den Ortsvektor **x** (x_1, x_2, x_3, x_4) der vierdimensionalen Schreibweise in den Ortsvektor **x**′ (x_1', x_2', x_3', x_4'), und die gleiche LT leitet die Komponenten der in Rede stehenden Vektoren in die den transformierten Ortsvektoren zugehörigen Werte über. Die LT behält also die durch die gegebenen Vierertensoren abgebildeten physikalischen Zusammenhänge unverändert bei, d. h. diese sind bezüglich der LT in ihrer Deutung als Konfigurationstransformation kovariant.

Mit dem mathematischen Verhalten der in Abhängigkeit von den Koordinaten veränderlichen Tensoren befaßt sich die *Tensoranalysis*. Hierher gehören z. B. *die Regeln der Differentiation* von Tensoren. Es läßt sich beweisen, daß die partiellen Ableitungen, die man durch Differentiation sämtlicher Komponenten eines Vektors der Ordnung α erhält, einen Tensor der Ordnung $(\alpha + 1)$ bilden.[2]

[2] EINSTEIN, A.: l. c., p. 9.

ren, wie er für den Fall der Dreiervektoren und -tensoren besteht [vgl. die Formel (5)], und dieser funktionelle Zusammenhang, d. h. die Größe **T** mit 16 Komponenten ist gleichfalls unabhängig vom KS (Lorentz-Invariant). Analog der Formel (5) haben die einander zugehörigen Vierervektoren **s** und **v** sowie der Vierertensor **T**, der zwischen ihnen den homogen linearen Zusammenhang herstellt, in jedem KS ihre Repräsentationen, die anhand der Formeln der als Koordinatentransformation gedeuteten Lorentz-Transformation (LT) ineinander umgerechnet werden können. Die Vektorkomponenten transformieren sich auch hier wie die Koordinatendifferentiale, die Komponenten des Tensors T_{ik} hingegen wie die Produkte der Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}x_k$ [vgl. (6)—(9)].

Nach der Auffassung Einsteins bedeuten freilich diese Koordinatentransformationen auch hier wieder die Umrechnungen zwischen den *Inertialsystemen*, obwohl die Vektoren und Tensoren in der immateriellen, unstofflichen, feldfreien Welt der Inertialsysteme im allgemeinen mit keinerlei physikalischer Bedeutung ausgestattet werden können. Nach der Auffassung L. Jánossys hingegen beziehen sich die verschiedenen Repräsentationen der Vierervektoren und -tensoren und die *Koordinatentransformationsformeln*, mit deren Hilfe sie ineinander überführt werden, wieder auf die *Lorentz-Systeme*.

In der Konzeption L. Jánossys bedeutet jedoch die LT auch weiterhin entscheidend eine *Konfigurationstransformation*, die 16 Koeffizienten der LT können also nicht einfach nach dem *mathematischen Schema einer Matrix* aufgeschrieben, sondern als *Vierertensor mit physikalischer Bedeutung (Lorentz-Tensor)* zusammengefaßt werden:

$$\mathbf{L} = (\alpha_{ik}) \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, 3, 4 \\ k &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{11}$$

Für die Komponenten des Lorentz-Tensors gelten folgende spezielle Zusammenhänge:

$$\alpha_{ir}\,\alpha_{kr} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } i \neq k \\ 1, \text{ wenn } i = k. \end{cases} \tag{12}$$

In der Tat: den Ereignisvektor $\mathbf{x}$ (x_1, x_2, x_3, x_4) (mit anderen Worten den Vierer-Ortsvektor) überführt die LT aufgrund der Formeln

$$x_i' = \alpha_{ir}\,x_r \tag{13}$$

in den Bildvektor $\mathbf{x}'$ (x_1', x_2', x_3', x_4') im gleichen Koordinatensystem; nach dem Muster von (5) kann also

$$\mathbf{x}' = \mathbf{L}\,\mathbf{x} \tag{14}$$

geschrieben werden.

Dieser Zusammenhang zwischen den Ereignisvektoren **x** uns **x**' ist von der Wahl des KS (sofern wir innerhalb der Klasse der Lorentz-Systeme bleiben) ebenso unabhängig wie ganz allgemein der homogen lineare funktionelle Vektor-Vektor-Zusammenhang, wie ihn die Tensoren herstellen.

Den *physikalischen* Sinn verleiht den Vierertensoren zweiter Stufe im Falle der Lorentz-Tensoren und auch sonst ganz allgemein der Umstand, *daß sie die vom KS unabhängigen Zusammenhänge zwischen den Vierervektoren im Sinne der Konfigurationstransformation repräsentieren. Die Lorentz-Invarianz der allgemeinen Vierertensoren* bedeutet in dieser Konzeption gewisse quantitativ unveränderte Elemente *des vom KS unabhängigen Zusammenhanges* zwischen den Zuständen eines physikalischen Systems vor und nach seiner Beschleunigung, u. zw. bedeutet sie ausschlaggebend den unverändert bleibenden homogen linearen Charakter jenes vom KS unabhängigen funktionellen Zusammenhanges, der zwischen den im gegebenen materiellen System als Vierervektoren gedeuteten Größen **v** und **s** auch im Zustand vor und nach der Beschleunigung besteht.

Mit den Vierertensoren lassen sich die organischen physikalischen Beziehungen zwischen bestimmten physikalischen Größen ohne Zweifel besser zum Ausdruck bringen als in der dreidimensionalen Schreibweise. Besonders wird uns dies z. B. bei der Behandlung des elektromagnetischen Feldes in den Fällen des Feldintensitäts- und des Energietensors deutlich werden. Die Komponenten dieser Tensoren ändern sich von Ort zu Ort und von Zeitpunkt zu Zeitpunkt, d. h. sie sind Funktionen der Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4). *Die Lorentz-Invarianz dieser Vierertensoren weist in der Deutung als Konfigurationstransformation eben auf das Fortbestehen der durch sie ausgedrückten organischen physikalischen Beziehungen in jenen Fällen hin, in denen das physikalische System, welches derartige Beziehungen herstellt und trägt, eine Beschleunigung erfährt, unter deren Einfluß die bekannten relativistischen Effekte auftreten.* Die LT transformiert hierbei den Ortsvektor **x** (x_1, x_2, x_3, x_4) der vierdimensionalen Schreibweise in den Ortsvektor **x**' (x_1', x_2', x_3', x_4'), und die gleiche LT leitet die Komponenten der in Rede stehenden Vektoren in die den transformierten Ortsvektoren zugehörigen Werte über. Die LT behält also die durch die gegebenen Vierertensoren abgebildeten physikalischen Zusammenhänge unverändert bei, d. h. diese sind bezüglich der LT in ihrer Deutung als Konfigurationstransformation kovariant.

Mit dem mathematischen Verhalten der in Abhängigkeit von den Koordinaten veränderlichen Tensoren befaßt sich die *Tensoranalysis*. Hierher gehören z. B. *die Regeln der Differentiation* von Tensoren. Es läßt sich beweisen, daß die partiellen Ableitungen, die man durch Differentiation sämtlicher Komponenten eines Vektors der Ordnung α erhält, einen Tensor der Ordnung $(\alpha + 1)$ bilden.[2]

[2] EINSTEIN, A.: l. c., p. 9.

Der Fall $\alpha = 1$ entspricht einem Tensor 1. Ordnung mit $4^1 = 4$ Komponenten, d. h. einer (von Ort zu Ort veränderlichen) Vektorgröße, also einem Vierer-*Vektorfeld*, für welches das Symbol $\mathbf{v}$ $(\mathbf{x})$, d. h.

$$\begin{aligned} &v_s\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &s = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \tag{15}$$

gesetzt werden kann. Dies kommt vier Funktionen mit je vier Variablen, den Komponenten des veränderlichen Vierervektors gleich. Das nächstliegende Beispiel für das Vektorfeld im dreidimensionalen Raum liefert die Stärke des elektromagnetischen oder des Gravitationsfeldes bzw. in genauerer Formulierung: der *mathematische* Begriff des Dreier-Vektorfeldes bedeutet die Verallgemeinerung und Abstraktion derartiger *physikalischer* Felder.

Wie bei den in der vorigen Abhandlung des Verfassers betrachteten Dreier- und den in gleicher Weise benannten Vierervektoren besteht auch zwischen der Dreier- und der Vierer-Feldstärke das Verhältnis der wechselseitigen eindeutigen Entsprechung. Aus diesem Grunde kommt dem Begriff der *Vierer-Feldstärke* mittelbar physikalische Bedeutung zu, und ebendeshalb kann die Kategorie der Feldstärke auch in der vierdimensionalen Betrachtungsweise Anwendung finden. In der Theorie des vierdimensionalen *feldfreien* Raumes steht jedoch die Einführung des Begriffes der Feldstärke ebenso im logischen Widerspruch zu den Ausgangspostulaten der Theorie wie die des Begriffes der Kraft. Der Begriff der Vierer-Feldstärke kann also gleichfalls nur unter Aufgabe der ursprünglichen Einsteinschen Postulate und bei Annahme der Konzeption von der LT als Konfigurationstransformation *physikalisch* gedeutet werden.

Die partiellen Ableitungen der das Vierer-Vektorfeld beschreibenden Funktionen v_s nach den Koordinaten, d. h. die Größen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_s}{\partial x_r} = T_{rs} \\ &\text{mit } s = 1, 2, 3, 4 \\ &\text{und } r = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

bilden die 16 Komponenten eines Vierertensors zweiter Ordnung, des sog. *derivierten Tensors*. Es läßt sich nämlich nachweisen, daß sich diese Komponenten in der linearen Transformation ebenso transformieren wie die Produkte aus den Koordinatendifferentialen.

Hier muß nochmals betont werden, daß es sich bei dem Vierer-Vektorfeld, welches die real existenten physikalischen Felder beschreibt, und bei seinem derivierten Tensor um einen absolut *richtigen und realen* Begriff handelt, der als Verallgemeinerung des Begriffs des Differentialquotienten den vom Koordinatensystem unabhängigen homogen linearen funktionellen Zusammenhang zwischen den elementaren Veränderungen einerseits des gegebenen Ereignisvektors (x_1, x_2, x_3, x_4), andererseits der zugehörigen Vektorfeldwerte zum Ausdruck bringt. Der Gebrauch dieses Begriffes steht aber wieder im Widerspruch zum Axiomensystem des feldfreien Raumes, in dem auch der derivierte Tensor bloß eine Hypostase, ein mathematischer Begriff ohne physikalischen Inhalt bleibt, sofern die Ausgangspostulate aufrechterhalten werden.

Besonders auffallend ist es, wie Einstein in seiner Konzeption von der speziellen Relativitätstheorie den sog. *Divergenz-Begriff* der Vektor- und Tensoranalysis hypostasiert. In den eigentlichen physikalischen Feldern steht dieser Begriff für eine von Punkt zu Punkt veränderliche skalare Größe, die sog. Quellendichte des physikalischen Feldes, d. h. er gibt an, wieviele Vektorlinien (z. B. Kraftlinien) je Volumeinheit aus der elementaren Umgebung des gegebenen Raumpunktes austreten. Die Bezeichnung »Quelle« ist hier der Hydrodynamik entnommen und bietet einen Hinweis auf den materiellen Ursprung und Inhalt des Begriffes der Vektorlinien und des ganzen Vektorfeldes. Im elektromagnetischen und im Gravitationsfeld charakterisiert der Begriff der Divergenz die räumliche Verteilung (die Dichte) der elektrischen Ladungen bzw. der Massen, die das Feld erregen.

Mathematisch läßt sich beweisen, daß der Zahlenwert der Divergenz im dreidimensionalen Raum in jedem Punkt der Summe der Komponenten gleich ist, die an der Hauptdiagonale des derivierten Vektorfeldtensors stehen, d. h., daß

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{17}$$

ist. Dieser Skalar ist als Quellendichte im gegebenen Raumpunkt des gegebenen Vektorfeldes gegen die lineare Transformation invariant, gleichviel ob es sich um eine Koordinaten- oder um eine Konfigurationstransformation handelt.

Den mathematischen Begriff der Divergenz des Vierervektors beschreibt nach dem Muster des obigen Ausdrucks — logisch richtig — die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_4}{\partial x_4} = \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, 3, 4), \tag{18}$$

die gleichfalls in beiden Deutungen Lorentz-invariant ist. Da aber der Vektor $\mathbf{v}$ im feldfreien Raum keine *physikalische* Bedeutung haben kann, ergibt sich bei Einstein auch beim Gebrauch des Divergenzbegriffs ein Widerspruch zu den Ausgangspostulaten.

Ähnliche Feststellungen gelten für die — mathematisch wieder richtige — weitere Verallgemeinerung des Divergenzbegriffes, für die *Divergenz des Tensors*. Die Divergenz des Tensors zweiter Ordnung (T_{ik}) $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ ist kein Skalar mehr, sondern ein Vierervektor mit den Komponenten

$$\operatorname{div}_l (T_{ik}) = \frac{\partial T_{l1}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{l2}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{l3}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{l4}}{\partial x_4} = \frac{\partial T_{lr}}{\partial x_r}, \tag{19}$$

wobei $l = 1, 2, 3, 4$ und $r = 1, 2, 3, 4$.

Die Divergenz von Tensoren höherer Ordnung ist stets ein Tensor der um 1 niedrigeren Ordnung.

Ein wichtiges Element des Tensorenkalküls bildet die Unterscheidung zwischen symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren sowie deren Untersuchung. Sind die Tensorenkomponenten, die aus der Vertauschung zweier Indizes eines Tensors hervorgehen, einander stets gleich, dann liegt ein symmetrischer Tensor vor, sind sie dagegen einander entgegengesetzt gleich, dann spricht man von einem antisymmetrischen Tensor. Die Bedingung der Symmetrie lautet also

$$T_{ik} = T_{ki},$$

der Antisymmetrie hingegen (20)

$$T_{ik} = -T_{ki}.$$

Der symmetrische *Dreiertensor* zweiter Ordnung hat bloß 6 voneinander unabhängige Komponenten, u. zw. 3 in der Hauptdiagonale und weitere 3 oberhalb dieser [vgl. das Schema in (1)], denn die Komponenten unterhalb der Hauptdiagonale sind gleich groß, wie beispielsweise $T_{32} = T_{23}$. Nach den gleichen Überlegungen hat der *Vierertensor* 10 voneinander unabhängige Komponenten.

Der antisymmetrische *Dreiertensor* zweiter Stufe hat demgegenüber nur 3, ein ebensolcher *Vierertensor* hingegen bloß 6 voneinander unabhängige und von Null verschiedene Komponenten, denn in diesem Falle sind die Komponenten in der Hauptdiagonale gleich Null. Ist nämlich $k = i$, dann wird in (20)

$$T_{ii} = -T_{ii}, \text{ d. h. } 2T_{ii} = 0 \text{ bzw. } T_{ii} = 0. \tag{21}$$

Es läßt sich beweisen, daß jeder Tensor zweiter Ordnung als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors aufgefaßt werden kann. Nachweislich ist ferner sowohl die Symmetrie als auch die Antisymmetrie der Tensoren zweiter Ordnung gegen die lineare Koordinatentransformation invariant, d. h. unabhängig davon, in welchem KS die Komponenten des betreffenden Tensors angegeben sind. Die Symmetrieeigenschaften von *Vierertensoren* zweiter Ordnung sind mithin Lorentz-invariant.

In der theoretischen Physik spielt der antisymmetrische Dreiertensor eine wichtige Rolle. Er wird von Physikern häufig irrig mit dem Begriff des axialen Vektors identifiziert. Diese letztere Bezeichnung dient der Unterscheidung

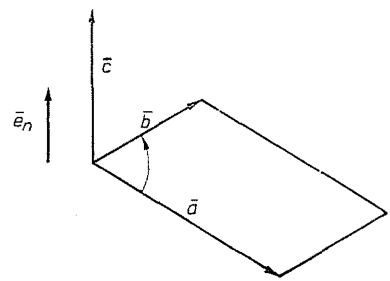

Abb. 1

von den sogenannten polaren, d. h. von den hier bisher betrachteten gewöhnlichen Vektoren. Die Unterscheidung ist in der Tatsache begründet, daß die beiden Vektorarten zu den Koordinatensystemen und zu deren Spiegelungstransformationen in unterschiedlichen Beziehungen stehen.

Das einfachste Beispiel für einen axialen Vektor in der dreidimensionalen Schreibweise bildet das sog. *vektorielle Produkt* aus zwei polaren Vektoren. Unter dem vektoriellen Produkt der polaren Dreiervektoren **a** und **b** — geschrieben $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ — ist ein Vektor **c** zu verstehen (s. Abb. 1), dessen Absolutwert der Fläche des Parallelogrammes gleich ist, welches die Vektoren **a** und **b** bestimmen, und der senkrecht auf der durch die beiden Vektoren bestimmten Ebene steht, so daß die Vektoren **a**, **b**, **c** in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Bezeichnet man also den normal auf der Ebene **a**, **b** stehenden Einheitsvektor dieses Richtungssinnes mit $\mathbf{e}_n$, dann gilt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = ab \sin (a, b)\mathbf{e}_n. \tag{22}$$

Drückt man die Vektoren **a** und **b** durch ihre Komponenten (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) in einem kartesischen Rechtssystem aus, dann sind

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= a_2b_3 - a_3b_2 \\ c_2 &= a_3b_1 - a_1b_3 \\ c_3 &= a_1b_2 - a_2b_1, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

wie sich leicht beweisen läßt, die Komponenten des vektoriellen Produkts. (Für Koordinatensysteme mit Linksdrehung gilt diese Formel nicht.)

Das vektorielle Produkt und allgemeiner: *der axiale Vektor ist auf jeden Fall ein Vektor (ein Tensor 1. Ordnung), seine Identifizierung mit einem antisymmetrischen Tensor zweiter Ordnung stellt somit einem auffallenden logischen Fehlgriff*, stellt die Umwandlung der wechselseitigen eindeutigen Entsprechung, d. h. die Umwandlung des Verhältnisses einer *Korrelation* zu dem einer *Identität* dar. Der antisymmetrische Tensor ist schließlich wie jeder Dreiertensor zweiter Ordnung eine Größe mit 9 Komponenten, die Vektoren ineinander überführt: eine lineare *Vektor-Vektor-Funktion* in dreidimensionaler Schreibweise, die dadurch, daß von ihren 9 Komponenten nur 3 frei wählbar sind, noch zu keinem *Vektor* wird.

Im Falle des vektoriellen Produkts wird diese irrige Identifizierung folgendermaßen begründet: Die in der Gleichung (23) aufscheinenden Vektorkomponenten sind im Grunde genommen Komponenten eines antisymmetrischen Dreiertensors zweiter Ordnung **T** gemäß

$$T_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \qquad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3. \tag{24}$$

Hierbei handelt es sich in der Tat um einen antisymmetrischen Tensor, denn für $i = k$ ist $T_{ii} = a_i b_i - a_i b_i = 0$ und nach dem Vertauschen der beiden Indizes $T_{ki} = a_k b_i - a_i b_k = -T_{ik}$.

Und schließlich schreiben sich die Komponenten des axialen Vektors $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ nach (23) und (24) zu

$$\begin{gathered} c_1 = T_{23} = -T_{32}, \; c_2 = T_{31} = -T_{13}, \\ c_3 = T_{12} = -T_{21}. \end{gathered} \tag{25}$$

Der in Rede stehende antisymmetrische Tensor **T** lautet mithin

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Dieser Tensor funktioniert nach der Formel (5), d. h. er ordnet *jedem* unabhängig veränderlichen Vektor **s** (s_1, s_2, s_3) den Bildvektor **v** (v_1, v_2, v_3) zu, u. zw. so, daß

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= c_3 s_2 - c_2 s_3 \\ v_2 &= -c_3 s_1 + c_1 s_3 \\ v_3 &= c_2 s_1 - c_1 s_2 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

wird. Hieraus ergibt sich nach (23), daß

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ts} = \mathbf{s} \times \mathbf{c}. \tag{28}$$

Aus dem Vergleich der Formeln (25) und (28) erhellt mit aller Deutlichkeit, daß sich im Begriff des axialen Vektors (des vektoriellen Produkts) **c** eine *ganz andere* Realität widerspiegelt als in dem zu ihm tatsächlich im Verhältnis der wechselseitigen eindeutigen Entsprechung stehenden Begriff des antisymmetrischen Tensors **T**. Die Einsteinsche Identifizierung der beiden Begriffe kann also keineswegs akzeptiert werden.

Der bekannteste Fall des vektoriellen Produktes im dreidimensionalen Raum ist das *Vektormoment* eines gegebenen Vektors **a** (z. B. das Impulsmoment, das Drehmoment der Kraft usw.). Dieses Moment ergibt sich als vektorielles Produkt aus dem Ortsvektor **r** (x_1, x_2, x_3) und dem gegebenen Dreiervektor **a** (a_1, a_2, a_3). (Seiner Größe nach das Produkt aus dem Absolutwert des Vektors **a** und seinem auf den Anfangspunkt bezogenen »Arm«.) Mathematisch läßt sich dies unter Berücksichtigung von (23) in die Form

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = (T_{23}, T_{31}, T_{12}) \tag{29}$$

bringen, wobei

$$T_{ik} = x_i a_k - x_k a_i \quad \text{mit} \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3. \tag{30}$$

Einstein hebt gerade bei Behandlung der Momente von Vektoren (irrig) hervor, daß die Deutung der antisymmetrischen Dreiertensoren zweiter Ordnung als axialer *Vektoren* im dreidimensionalen Raum zwar den Vorteil einer gewissen Anschaulichkeit hat, daß ihr jedoch der Nachteil anhaftet, die eigentliche Natur, das tiefere Wesen dieser Drei-Komponenten-Größe, ihren Tensorcharakter zu verdecken.[3]

Ohne Zweifel hat bei dieser logisch und mathematisch gleicherweise irrigen Bemerkung die Tatsache mitgespielt, daß die Vektoren und antisymmetrischen Tensoren in dieser »Viererwelt« selbst formal nicht mehr miteinander identifiziert werden können, sind doch hier die Vektoren Größen mit 4, die Tensoren hingegen Größen mit 6 unabhängigen Komponenten. Bildet man also beispielsweise aus den Komponenten der beiden *Vierervektoren* (a_1, a_2, a_3, a_4) und (b_1, b_2, b_3, b_4) analog der Formel (24), nach der die Komponenten des vektoriellen Produktes aus Dreiervektoren ermittelt werden, den antisymmetrischen Vierertensor

$$T_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \quad \text{mit} \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, 4, \tag{31}$$

dann erhält man für diesen 6 voneinander unabhängige Komponenten, eine Größe also, *die nicht als Vierervektor gedeutet werden kann*. Der aus den ersten

[3] Einstein, A.: l. c., pp. 12—13.

3 Zeilen und Spalten dieses antisymmetrischen *Vierertensors* bestehende antisymmetrische *Dreiertensor* steht jedoch im Sinne der Formeln (24)—(26) im Verhältnis der wechselseitigen eindeutigen Entsprechung zu dem vektoriellen Produkt — dem axialen Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — aus den beiden Dreiervektoren, wie sie sich aus den jeweils ersten 3 Komponenten der beiden gegebenen Vierervektoren, d. h. aus $\mathbf{a}$ (a_1, a_2, a_3) und $\mathbf{b}$ (b_1, b_2, b_3) ergeben. Eben dieses Korrelativverhältnis ermöglicht es, dem antisymmetrischen Vierertensor gemäß (31) mittelbar einen physikalischen Sinn beizumessen — in all jenen Fällen, in denen auch der antisymmetrische Dreiertensor bzw. der zugehörige Dreiervektor $\mathbf{c}$ (T_{23}, T_{31}, T_{12}) einen physikalischen Sinn hat, wie beispielsweise im Falle der Vektormomente in der dreidimensionalen Schreibweise gemäß (29)—(30).

Auch dem nach dem Muster der Formel (30) aufgeschriebenen antisymmetrischen Vierertensor

$$T_{ik} = x_i a_k - x_k a_i \qquad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, 4 \tag{32}$$

kommt in diesem mittelbaren Sinne physikalische Bedeutung zu: jener *Dreiervektor* $\mathbf{M}$ (T_{23}, T_{31}, T_{12}) stellt das Moment des *Dreiervektors* $\mathbf{a}$ (a_1, a_2, a_3) dar, den mit (T_{ik}) das Verhältnis der wechselseitigen eindeutigen Entsprechung verknüpft. Das aber bildet noch keinen Grund, (T_{ik}) als Vierervektormoment zu bezeichnen, und ebenso unbegründet ist logisch jene Feststellung Einsteins, daß das Vektormoment selbst in der dreidimensionalen Betrachtung nicht mehr als Vektor, sondern als antisymmetrischer Tensor anzusehen sei. Die gleiche Folgerung stellt er — ebenso unbegründet — auch im Zusammenhang mit dem Begriff der Rotation.

Im dreidimensionalen Raum gibt es nämlich ein zweites Beispiel für den axialen Vektor, das gleichfalls einen realen physikalischen Inhalt besitzt. Es ist der Begriff der *Rotation* oder der Wirbeldichte *des Vektorfeldes*. Die Bezeichnung »Wirbel« ist (ähnlich der weiter oben benützten Bezeichnung »Quelle«) wieder der Hydrodynamik entlehnt: jedes Teilchen einer wirbelnden Flüssigkeit führt eine geschlossene, kreisende (im einfachsten Fall eine gleichförmig kreisende) Bewegung um eine bestimmte Drehachse aus. Die linearen Geschwindigkeitsvektoren der Teilchen bilden ein von Punkt zu Punkt veränderliches, kreisförmige Vektorlinien enthaltendes Vektorfeld. Die Wirbeldichte dieses Vektorfeldes ist durch jenes andere Vektorfeld (durch jenen von Ort zu Ort veränderlichen Vektor) bestimmt, welches in einem gegebenen Punkt seiner Größe nach der zweifachen Winkelgeschwindigkeit des um den betreffenden Punkt rotierenden Teilchens gleich ist, während seine Richtung nach der Rechtsschraubenregel in die Drehachse des Wirbels fällt.

Eine besonders wichtige Rolle kommt dem Rotationsbegriff bei jenen Feldern zu, die Träger und Übermittler physikalischer Kraftwirkungen sind, wie beispielsweise die magnetischen und elektrischen Felder. Vorzugsweise gilt dies für physikalische Felder, deren ponderomotorische Kraft, an den von ihr bewegten Teilchen an einzelnen geschlossenen Kurven entlangschreitend, eine von Null verschiedene Arbeit leistet. Solche Felder sind z. B. die Magnetfelder stromdurchflossener elektrischer Leiter, von deren Feldlinien diese in Form ringförmiger geschlossener Kurven umgeben sind. Der Absolutwert der Rotation (der Wirbeldichte) solcher physikalischer Felder ist in einem gegebenen Punkt um so höher (d. h. es werden um so mehr »Wirbellinien« erregt), je größer auf der äußerst kleinen geschlossenen Kurve, die den gegebenen Punkt umgibt, der Anteil jener Arbeitsleistung des physikalischen Feldes ist, der auf ein Einheitsstück der umschlossenen Fläche entfällt. Die Komponenten der Rotation als eines Vektors können, gleichviel in welche räumliche Richtung sie fallen, nach bestimmten Regeln rechnerisch erfaßt werden.

Nachweisbar ergeben sich die Komponenten der Rotation des Dreiervektorfeldes $\mathbf{v}$ (v_1, v_2, v_3) in einem bestimmten Punkt aus bestimmten Komponenten des antisymmetrischen Dreiertensors

$$F_{ik} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3\,. \tag{33}$$

Die Formel der Rotation aber lautet

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{v} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}). \tag{34}$$

In der vierdimensionalen Schreibweise kann der antisymmetrische Tensor analog zur Beziehung (33) in der Form

$$F_{ik} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, 4 \tag{35}$$

geschrieben werden. Dieser Tensor hat 6 voneinander unabhängige Komponenten, doch besagt dies nicht etwa, daß die Rotation ihren Vektorcharakter verloren hätte. Ebenso wie nicht der Tensor (T_{ik}) gemäß (32) selbst das Vektormoment bedeutet, sondern der zugehörige Dreiervektor (T_{23}, T_{31}, T_{12}), genauso bedeutet nicht der Tensor (F_{ik}) nach Formel (35), sondern der zugehörige Dreiervektor (F_{23}, F_{31}, F_{12}) eine Rotation. In diesem und *nur in diesem* Sinne hat (F_{ik}) eine physikalische Bedeutung!

In seinen Ausführungen zu den Maxwellschen, d. h. zu den Fundamentalgleichungen der Elektrodynamik, hält Einstein schon in der dreidimensionalen Betrachtungsweise fest, daß auch *die Intensität des magnetischen Feldes* nicht als Vektor, sondern als *antisymmetrischer Dreiertensor* zweiter Stufe zu deuten ist.[4] In der vierdimensionalen Betrachtungsweise weist er dann nach, daß die 3 räumlichen Komponenten der Intensität **E** des elektrischen Feldes, nämlich die Größen (E_x, E_y, E_z), sowie die 3 räumlichen Komponenten der Intensität **H** des magnetischen Feldes, nämlich (H_x, H_y, H_z), mathematisch als die 6 Komponenten des antisymmetrischen — bezüglich der Lorentz-Transformation invarianten — Vierertensors zweiter Stufe (F_{ik}) aufgefaßt werden kann. Hieraus gelangt er zu dem hypostasierenden Schluß, daß *dieses elektromagnetische Feld selbst — seinem Wesen nach — mit diesem antisymmetrischen Tensor identisch ist.*[5]

Genauer handelt es sich um den sog. »*Feldintensitätstensor*« (mit $i = \sqrt{-1}$)

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Diese Größe (F_{ik}) ist, wie sich unschwer nachweisen läßt, in der Tat ein Tensor, denn ihre Komponenten transformieren sich in der Lorentz-Transformation tatsächlich ebenso wie die Produkte aus den Koordinatendifferentialen, d. h. gemäß Gl. (7). Weiterhin kann bewiesen werden, daß (F_{ik}) in der Tat einen vom KS unabhängigen, Lorentz-invarianten *homogen linearen funktionellen Zusammenhang* zwischen zwei Virervektoren, d. h. zwischen der Vierer-Stromdichte und der sog. Lorentzschen Vierer-Kraftdichte herstellt. Der Feldintensitäts-Vierertensor hat also keine hypostasierte, sondern eine materiell *physikalische* Bedeutung: er stellt nicht das geistige Wesen, sondern die begriffliche Abbildung der im elektromagnetischen Feld auftretenden elektrodynamischen Wechselwirkungen und Zusammenhänge dar. Seine *physikalische Bedeutung* geht auch aus jenem Verhältnis der wechselseitigen eindeutigen Enstsprechung hervor, welches zwischen ihm und den Dreiervektoren der magnetischen und der elektrischen Feldintensität besteht: (F_{ik}) repräsentiert gemäß Fl. (36) das elektromagnetische Feld, wie es durch die Feldintensitäts-Dreiervektoren

$$\mathbf{H}\ (F_{23}, F_{31}, F_{12}) \text{ und } \mathbf{E}\ (iF_{14}, iF_{24}, iF_{34}) \tag{37}$$

charakterisiert ist. Den Zusammenhang zwischen den Feldintensitäts-Dreiervektoren **H** und **E** beschreiben die bekannten *Maxwellschen Gleichungen*, die, wie bekannt, gleichfalls *kovariant in bezug auf die Lorentz-Transformation* sind. Die Lorentz-Invarianz des Feldintensitäts-Vierertensors (F_{ik}) gemäß

[4] EINSTEIN, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956, p. 15.

[5] EINSTEIN, A.: l. c. pp. 26/27.

(36) ermöglicht es somit, die Maxwellschen Gleichungen in neue, verhältnismäßig einfache Vierertensor-Gleichungen zu übertragen. Hierzu bedarf es aber der Einführung des Begriffes des *Vierertensors der Stromdichte.*

Es bezeichne ϱ die Volumdichte der elektrischen Ladung (die auf die Volumeinheit entfallende Ladung), $\mathbf{V}$ (V_1, V_2, V_3) hingegen die Strömungsgeschwindigkeit der Ladung (als Dreiervektor). Dann ist der *Dreiervektor*

$$\varrho \frac{\mathbf{V}}{c} = s \tag{38}$$

die *Stromdichte*, weil er mit der die Flächeneinheit in der Einheit der Zeit durchfließenden Ladung proportionell ist. Auf dieser Grundlage gelangt Einstein zum *Vierervektor der Stromdichte*

$$s_1 = \varrho \frac{V_1}{c}, \quad s_2 = \varrho \frac{V_2}{c}, \quad s_4 = \varrho \frac{V_3}{c}, \quad s_3 = \varrho \frac{ic}{c} = i\varrho . \tag{39}$$

In diesen Gleichungen bezeichnet ϱ nach der Einsteinschen Koordinatentransformationsdeutung den im System K gemessenen, d. h. den »Bewegungs«-Wert der Ladungsdichte. Bei Anwendung der Lorentz-Transformation stellt sich heraus, daß zwischen dem »Ruhwert« ϱ_0 und dem »Bewegungswert« ϱ der Ladungsdichte in dem mit der Ladung mitbewegten System K' der Zusammenhang

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{40}$$

besteht, daß also der Vierervektor der Stromdichte mit dem Vierervektor $\mathbf{u}$ der Geschwindigkeit durch die Beziehung

$$s_i = \frac{1}{c} \varrho_0 u_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{41}$$

verknüpft ist. Da es sich bei u_i um einen Vierervektor, bei c und ϱ_0 um Konstanten handelt, ist in der Tat auch s_i ein Vierervektor.

Die 1. Gruppe der Maxwellschen Gleichungen (die Formel des magnetischen Feldes des elektrischen Stromes) kann also die Form der Tensorgleichung

$$\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_r} = 4\pi s_i , \tag{42}$$

die zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen hingegen (die Formel der elektromagnetischen Induktion) die Form

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0 \tag{43}$$

annehmen.

Die Formel (42) bedeutet — den Werten $i = 1, 2, 3, 4$ entsprechend — 4 Gleichungen, wobei auf der linken Seite jeder dieser Gleichungen — gemäß den Werten $r = 1, 2, 3, 4$ — eine viergliedrige Summe steht. Aus der Formel (43) ergeben sich gleichfalls 4 Gleichungen, weil die Indizes i, k, l, die hier zyklisch abwechselnd aufscheinen, vier aus den Elementen 1, 2, 3, 4 auswählbaren Zahlendreiern, d. h. den Kombinationen (1, 2, 3,) (2, 3, 4), (3, 4, 1) und (4, 1, 2) entsprechen. Die vierdimensionale Betrachtungsweise liefert somit hier ohne Zweifel relativ einfache und elegante mathematische Formeln.

Da es sich aber bei der Welt der Inertialsysteme um die *feldfreie* Vierer-Welt handelt, widerlegen das elektromagnetische *Feld* — repräsentiert durch den Tensor (F_{ik}) — sowie die ponderomotorischen Krafteinwirkungen, die dieses Feld auf elektrisch geladene physikalische Objekte ausübt, im Verein mit den so ausgelösten Beschleunigungen von neuem die *Einstein*sche (mit den Inertialsystemen verknüpfte) Koordinatentransformationsdeutung und führen mit logischer Zwangsläufigkeit zur Auffassung der Lorentz-Transformation als Konfigurationstransformation. Da jedoch Einstein hier an der Koordinatentransformationsdeutung festzuhalten versucht, *entstehen hieraus erneut Hypostasen.*

Einstein unterstreicht nämlich, *indem er sie als ernsten methodischen Fortschritt bezeichnet,* jene Deutung des Begriffs des Feldintensitätstensors, nach der *das elektrische und das magnetische Feld durch das Relativitätsprinzip ihre Sonderexistenz einbüßen.* Was wir für ein reines magnetisches Feld halten, ist nach Einstein lediglich die Projektion des Tensors (F_{ik}) auf ein Inertialsystem, in dem $E_x = E_y = E_z = 0$, so daß die vierte Zeile und Spalte des Tensors ausschließlich Komponenten vom Wert Null enthalten. In einem anderen Inertialsystem K′ hingegen, welches in bezug auf K gleichförmig geradlinig bewegt ist, enthält der gleiche Tensor auch schon ein elektrisches Feld: hier verschwindet weder die 4. Zeile, noch die 4. Spalte. Ebenso: beobachten wir in einem Inertialsystem K* ein reines elektrisches Feld, ist also $H_x^* = H_y^* = H_z^* = 0$ [verbleiben also im Tensor (F_{ik}) die 4. Zeile und die 4. Spalte], dann existiert in einem anderen Inertialsystem K^{**} auch schon das magnetische Feld.

Nach Einstein ist also die relative Selbständigkeit des getrennt für sich betrachteten elektrischen und magnetischen Feldes so zu verstehen, daß es ein Inertialsystem gibt, auf welches der Tensor (F_{ik}) nur ein elektrisches oder nur ein magnetisches Feld projiziert, während sich *derselbe* Tensor in den sonstigen Inertialsystemen dem Beobachter als einheitliches elektromagnetisches Feld manifestiert.

Mathematisch sind diese Überlegungen bei einer Deutung nach den Gesetzen der Koordinatentransformation ohne Zweifel korrekt. Führt man nämlich am Tensor (F_{ik}) bzw. an den Komponenten (E_x, E_y, E_z) und $(H_x,$

H_y, H_z) die bekannte Lorentz-Transformation durch, dann zeigt sich daß

$$\text{bei } E_x = E_y = E_z = 0 \text{ zwar } E'_x = 0, \text{ aber } E'_y \neq 0, \ E'_z \neq 0$$

und (44)

$$\text{bei } H_x = H_y = H_z = 0 \text{ zwar } H'_x = 0, \text{ aber } H'_y \neq 0, \ H'_z \neq 0.$$

Wörtlich lauten die physikalischen Schlußfolgerungen, die Einstein aus den Gleichungen (44) zieht, wie folgt: »Existiert in bezug auf K nur ein magnetisches Feld (**H**), aber kein elektrisches (**E**), so existiert in bezug auf K′ gleichwohl ein elektrisches Feld (**E**′), welches auf eine relativ zu K′ ruhende Masse wirkt. Ein in bezug auf K ruhender Beobachter wird diese Kraft als *Biot-Savart*sche bzw. *Lorentz*sche elektromotorische Kraft deuten. Es erscheint also auch diese elektromotorische Kraft mit der reinen Feldwirkung zu einer Wesenseinheit verschmolzen.«[6]

Nach der elektrodynamischen Konzeption Einsteins ist es also ausschließlich der Begrenztheit und Einseitigkeit der experimentellen Physik zuzuschreiben, daß der Beobachter in K die hier auftretende Kraft auf die Wirkung des magnetischen Feldes in K zurückführt, während der Beobachter in K' die gleiche Wirkung als die des elektrischen Feldes in K' auffaßt. Diesen Widerspruch vermag seiner Ansicht nach nur die theoretische Physik oder genauer die relativistische Elektrodynamik zu lösen, die beide Arten des Feldes als Manifestationen ein und derselben Wesenseinheit, des Tensors (F_{ik}) in den verschiedenen Koordinatensystemen deutet.

Einstein ließ keinen Zweifel darüber, woher er die soeben erwähnte »*reine Feldwirkung*« ableitete. An mehreren Stellen betont er, im Hinblick auf die mechanische (trägheitsbestimmende) Wirkung des leeren »feldfreien« raumzeitlichen Kontinuums müsse vorausgesetzt werden, daß *auch der leere Raum Feldeigenschaften besitzt*, die denjenigen des elektromagnetischen Feldes analog sind.[7] Den gleichen Gedanken formuliert er an anderer Stelle mit den Worten: »Felder sind physikalische Zustände des Raumes«.[8] Diese Gedanken, in denen sich implizite die Feststellung verbirgt, auch der leere »feldfreie Raum« selbst sei ein wirksames physikalisches Feld, diese Gedanken lassen die theoretischen und logischen Schwächen des Begriffssystems der Einsteinschen speziellen Relativitätstheorie, die schließlich zum absurden Begriff des »feldfreien Feldes« führen, offenkundig zutage treten.

Auf Grund der Deutung nach der Konfigurationstransformation, zu der die Einführung des Begriffes der beschleunigenden ponderomotorischen Kraftwirkung — wie oben nachgewiesen — ohnehin mit logischer Zwangsläufigkeit hinführen muß, läßt sich die unzertrennliche Einheit von elektri-

[6] EINSTEIN, A.: l. c., p. 27.
[7] EINSTEIN, A.: l. c., p. 36.
[8] EINSTEIN, A.: Mein Weltbild, Querido-Verlag, Amsterdam, 1934, p. 237.

schem und magnetischem Feld, wie sie auch im Tensor (F_{ik}) zum Ausdruck gelangt, auf materialistische Weise deuten. Im Sinne der Maxwellschen Gleichungen [(42) und (43)] besteht nämlich zwischen den Meßgrößen der Intensität des elektrischen Feldes, der elektrischen Stromdichte und der Intensität des magnetischen Feldes *in einem und demselben Koordinatensystem* das Verhältnis der gegenseitigen Abhängigkeit und Bedingtheit. Dieser organische Zusammenhang ist Lorentz-invariant, d. h.

1. er existiert unabhängig vom Koordinatensystem (innerhalb der Klasse der Lorentzschen Koordinatensysteme) und er bleibt

2. auch bei vorsichtiger Beschleunigung des physikalischen Systems bestehen, von dem er bestimmt und getragen wird.

In der dem Lorentz-Prinzip entsprechenden Deutung nach der Konfigurationstransformation liefern also das E_x *und — nach erfolgter Transformation — des* E'_x *usw. die Komponenten der Intensität des elektrischen (bzw. magnetischen) Feldes in ein und demselben Koordinatensystem, u. zw. mit den Werten, wie sie dem Zustand eines die elektrische Ladung enthaltenden materiellen Systems vor seiner Beschleunigung (Q) bzw. nach dieser (Q') zugehören.*

Nimmt man mit Jánossy[9] an, daß die Komponenten (E'_x, E'_y, E'_z), (H'_x, H'_y, H'_z) die im Punkt (x, y, z) und zum Zeitpunkt t des gegebenen Koordinatensystems gültigen Werte darstellen, dann sind an die Stelle der Komponenten (E_x, E_y, E_z), (H_x, H_y, H_z) jene Werte zu setzen, die — der üblichen Lorentz-Transformation entsprechend — in den Punkten bzw. zum Zeitpunkt

$$x' = \frac{x + Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = , \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \dfrac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{45}$$

gelten. Mit anderen Worten: die in (x', y', z', t') gültigen Werte der elektrischen und magnetischen Intensitäten in dem der ursprünglichen (d. h. der im gegebenen KS ruhenden) Ladungsverteilung Q zugehörigen Feld hängen mit den in (x, y, z, t) gültigen Werten der Intensitäten jenes Feldes zusammen, welches der nach der Lorentz-Transformation auf die Geschwindigkeit V beschleunigten Ladungsverteilung Q' entspricht. Ähnlich lassen sich auch die Transformationsformeln zur Überführung der Ladungs- und Stromdichte in Q (als Funktionen der Raum- und Zeitkoordinaten) in die Ladungs- und Stromdichte in Q' ableiten:

$$\left.\begin{aligned} s'_x &= \frac{s_x + V/c \cdot \varrho}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad s'_y = s_y, \quad s'_z = s_z, \\ \varrho' &= \frac{\varrho + V/c \cdot s_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

[9] Jánossy, L.—Elek, T.: Die philosophischen Probleme der Relativitätstheorie. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1963, pp. 71/78 (ungarisch).

Jánossy beschreibt — unter Berufung auf die Resultate von W. Heitler — als einfachsten Fall jene bei der Beschleunigung einer einzigen kleinen Ladungswolke vor sich gehenden physikalischen Vorgänge, die das Feld der ursprünglich ruhenden Ladungswolke stören und schließlich zur Deformierung, zur Lorentz-Transformation der beschleunigten Wolke und des zugehörigen Feldes und zugleich zur relativistischen Änderung der trägen Masse des Objektes führen, von dem die Ladung getragen wird.[10] In diesen Vorgängen spielt jene Kraft, mit der die elektrische Ladungswolke auf sich selbst wirkt, eine wichtige Rolle.[11] Diese Kraft tritt nicht auf, wenn die Ladungwolke in Ruhe ist oder eine geradlinige, gleichförmige Bewegung vollführt. Bei Beschleunigung hingegen tritt sie auf, u. zw. in der der Kraftrichtung entgegengesetzten Richtung, d. h. indem sie deren Wirkung herabsetzt.

Eben das Auftreten dieser rückwirkenden Kraft liefert auch die *physikalische* Erklärung für die bekannte relativistische Massenänderung: in ihrer Wirkung geschwächt, löst die beschleunigende Kraft eine geringere Beschleunigung aus, als zu erwarten wäre, was sich in den Versuchen als Zunahme der Masse des ladungtragenden physikalischen Objekts (z. B. des Elektrons) manifestiert. Jánossy weist weiterhin nach, daß sich aus diesen Versuchen wichtige logische Schlüsse auf die Struktur der Ladungsträger, des Elektrons, des Positrons und des Protons, aber auch auf die Struktur der ihnen zugehörigen elektromagnetischen Felder ziehen lassen: vor allem eben die Folgerung, daß diese Objekte keineswegs als *starre, punktförmige Kugeln* angesehen werden können, daß es sich im Gegenteil um *Ladungswolken handelt, die durch die beschleunigenden Kräfte deformiert werden können.* Die während der Beschleunigung auftretende, auf sich selbst rückwirkende Kraft der Ladungswolke verrichtet Arbeit, die in Form der im elektromagnetischen Feld sich akkumulierenden, aus ihm teils zurückgewinnbaren, teils ausstrahlenden Energie in Erscheinung tritt.

Wird nicht ein einziger Ladungsträger, sondern ein aus mehreren Ladungsträgern bestehendes physikalisches System, z. B. ein aus einem positiven und einem negativen Ladungsträger zusammengesetztes System (wie es auch das Atom ist) beschleunigt, treten innere Kräfte auf, die mit der äußeren beschleunigenden Kraft gleichgerichtet sind, die also deren Wirkung erhöhen. Je größer die Bindungsenergie zwischen den beiden Ladungsträgern (je größer also die zu ihrer Trennung erforderliche Arbeit ist), um so leichter läßt sich das aus ihnen zusammengesetzte System mit Hilfe einer gegebenen äußeren Kraft beschleunigen. Hierbei tritt die Verminderung der

[10] HEITLER, W.: The Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1944, zitiert in JÁNOSSY, L.—ELEK, T.: Die philosophischen Probleme der Relativitätstheorie, zit. Ausgabe, pp. 75/76 (ungarisch).

[11] S. hierzu beispielsweise das Buch von POGÁNY, B.: Das elektromagnetische Feld, Athenaeum Verlag, Budapest, 1927, pp. 384/424. (ungarisch).

trägen Masse des Systems, der *Massendefekt*, d. h. die Erscheinung ein, daß die Masse des aus zwei Ladungsträgern bestehenden Systems kleiner ist als die Summe der getrennt für sich (außerhalb des Systems) vorhandenen Massen der beiden Ladungsträger. Ähnlich kommt es zum Massendefekt in physikalischen Systemen aus Protonen und Neutronen (in Atomkernen), in denen die zwischen den Teilchen auftretenden Kräfte durch das Yukawasche Mesonenfeld vermittelt werden, wobei sich in diesem Feld auch die Bindungsenergien zwischen den Teilchen konzentrieren.

Wie sich also zeigt, lassen sich die relativistischen Änderungen der Masse eines einzelnen Ladungsträgers und die beim Entstehen von Systemen aus mehreren Ladungsträgern auftretenden Massendefekte durch materielle physikalische Wechselwirkungen erklären. Einstein jedoch gibt auch hier die subtile und hypostasierte Erklärung, das Wesen der Erscheinung liege darin, daß Masse und Energie nur verschiedene Äußerungsformen derselben Sache seien, daß träge Masse nichts anderes sei als latente Energie.[12]

Und weiter: Nach der Einsteinschen Deutung besteht zwischen der »Ruhmasse« m_0 und der »bewegten Masse« m der Unterschied, daß jene in dem mit dem Massenpunkt mitbewegten Koordinatensystem K', diese hingegen *zugleich* in jenem System K gültig ist, relativ zu dem sich der Massenpunkt mit der angegebenen Geschwindigkeit bewegt. Bei Einstein handelt es sich also (in erster Annäherung) nicht darum, daß sich die träge Masse eines *beschleunigten* Systems *genetisch* vergrößert, sondern im Gegenteil: nach Einstein muß die träge Masse eines physikalischen Systems *in dem mit ihm mitbewegten Koordinatensystem* wegen der *strukturellen* Eigenschaften des Raumzeitkontinuums von ihrer Geschwindigkeit relativ zu einem anderen Koordinatensystem ebenso unabhängig bleiben wie die Länge des Stabes.[13]

Bei den tatsächlich durchgeführten Messungen ergibt sich jedoch das m_0 nicht als Ergebnis der Messung durch einen mit dem Teilchen mitbewegten Beobachter. Im Gegenteil: Sowohl das m_0 als auch das m mißt ein im Koordinatensystem des Laboratoriums (der Erde) befindlicher Beobachter *vor* bzw. *nach* der Beschleunigung des Teilchens. Erst wenn wir Einstein glauben, daß die Masse des Teilchens in dem mit ihm mitbewegten Koordinatensystem auch nach der Beschleunigung die Größe beibehält, die sie vor der Beschleunigung hatte, weil dies aus den *strukturellen* Eigenschaften des Raumzeitkontinuums folgt, erst dann können wir die Einsteinsche Deutung der relativistischen Massenänderung akzeptieren.

Letzten Endes aber gerät Einstein — wie gezeigt — an diesem Punkt von neuem in Widerspruch zu seinem eigenen Ausgangspunkt, denn obwohl er das Auftreten von *Kraftwirkungen* und mit diesen von beschleunigten Bewe-

[12] EINSTEIN, A.: Grundzüge der Relativitästheorie, Ed. cit., p. 30, und Mein Weltbild, Ed. cit. p. 225.
[13] Vgl. Ungarische Zeitschrift für Physik, Bd. III. pp. 444/445 (1965).

gungen voraussetzt, muß er dennoch den *genetischen* Charakter der Entstehung der relativistischen Massenzunahme anerkennen. Freilich tut er dies auf eine Art und Weise, daß daraus bei ihm *keine materielle Genese wird.* Die relativistische Massenzunahme entstammt hier ebenso den »Feldeigenschaften« des leeren Raumes wie die Geschwindigkeitszunahme: der leere Raum verfügt über die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten, d. h. über einen Energiegehalt, und zu dessen Lasten vollzieht sich die Zunahme der Masse.[14]

Dieser energetistische Standpunkt äußert sich vornehmlich in jenem Hypostasieren der Begriffe Masse und Energie, das sich *aus der Einstein*schen *Deutung* eines an sich überaus nützlichen, synthetisierenden Begriffes, des *Vierer-Energietensors* (mit einer anderen Bezeichnung des Energie-Impulstensors) für die relativistische Elektrodynamik ergibt.

Berechnen wir nun Impuls und Energie *je Volumeinheit* im elektromagnetischen Feld, d. h. die *Impuls- und Energiedichte!* Hierzu müssen wir vor allem die Dichte der ponderomotorischen Kraft kennen, die das elektromagnetische Feld auf die bewegte Ladung ausübt, d. h. die auf die Ladung in der Volumenheit wirkende Kraft *(die Lorentzsche Kraftdichte)* kennen. Der Dreiervektor dieser Dichte setzt sich bekanntlich aus je einem das elektrische Feld **E** und das magnetische Feld **H** beschreibenden Glied zusammen, es ist also

$$\mathbf{f} = \varrho\mathbf{E} + \frac{\varrho}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{H}], \tag{47}$$

wenn ϱ die elektrische Ladungsdichte je Volumeinheit, **V** die Dreier-Strömungsgeschwindigkeiten der Ladungsträger, c die Lichtgeschwindigkeit, **E** die elektrische, **H** die magnetische Feldstärke bezeichnet.

Nachweislich läßt sich *die Form des Vierervektors* der Lorentzschen Kraftdichte mit Hilfe des Feldintensitätstensors (F_{ik}) gemäß (36) und der Stromdichte s_i nach Gl. (41) in der Form

$$f_i = F_{ir}s_r \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{48}$$

ausdrücken. Mit dem Symbol $\mathbf{F} = (F_{ik})$ können wir auch

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{s} \quad (49$$

schreiben, wobei allerdings sowohl **f** als auch **s** *Vierervektoren* bezeichnen. Ein Vergleich mit der Formel (5) zeigt, daß der Feldintensitätstensor — wie bereits gezeigt — in der Tat den Lorentz-invarianten funktionellen Zusammenhang zwischen der Lorentzschen Vierer-Kraftdichte und der Vierer-Stromdichte beschreibt.

[14] EINSTEIN, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie, Ed. cit., p. 36.

Im Falle der ersten drei Indexe ergeben sich aus (48) tatsächlich die der Formel (47) entsprechenden Kraftdichte-Komponenten, während sich die 4. Komponente zu

$$f_4 = \frac{i}{c}\,\varrho(E_x V_1 + E_y V_2 + E_z V_3) = \frac{i}{c}\,\varrho(\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}) = \frac{i}{c}\,(\varrho\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}) \tag{50}$$

schreibt. Da der Absolutwert von $\varrho\mathbf{E}$ die Größe jener Kraft bezeichnet, die auf die Ladung je Volumeinheit wirkt, der Absolutwert von $\mathbf{V}$ hingegen die Größe jenes Weges angibt, den die bewegte Ladung in der Zeiteinheit zurücklegt, steht $(\varrho\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}) = W$ *für die Effektdichte des elektrischen, ja sogar des elektromagnetischen Feldes*, d. h. für die je Volum- und Zeiteinheit berechnete Energieübertragung der energieaufnehmenden Ladung:

$$f_4 = \frac{i}{c}\,W\,. \tag{51}$$

Nachweislich läßt sich die Lorentzsche Vierer-Kraftdichte als negative Divergenz (als »Vierer-Quellendichte«) eines aus dem (F_{ik}) gemäß Gl. (36) gebildeten symmetrischen Tensors $\mathbf{T} = (T_{ik})$ aufschreiben [vgl. (19)]:

$$f_l = -\,\mathbf{div}_l\,(T_{ik}) = -\,\frac{\partial T_{lr}}{\partial x_r} \qquad l = 1, 2, 3, 4 \quad \text{und} \quad r = 1, 2, 3, 4. \tag{52}$$

Der symmetrische Vierertensor

$$\mathbf{T} = (T_{ik}) = \frac{1}{4\pi}\left[F_{il}F_{kl} - \frac{\delta_{ik}}{2}(H^2 - E^2)\right], \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } i \neq k \\ 1, \text{ wenn } i = k \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, 4 \tag{53}$$

kann als Energietensor des elektromagnetischen Feldes bezeichnet werden, bildet doch — wie sich unschwer nachweisen läßt — die Energiedichte die physikalische Dimension jeder Komponente dieses Tensors.

Aus den Gleichungen (52) und (53) geht hervor, daß sich auch im Energietensor des elektromagnetischen Feldes nur bei jener Deutung reale physikalische Zusammenhänge spiegeln, bei der die Komponenten des Vierer-Feldstärkentensors und der Lorentzschen Vierer-Kraftdichte diese Bedeutung haben, d. h. in der Deutung nach der Konfigurationstransformation, in der das Lorentz-Prinzip zur Geltung gebracht wird.

Als symmetrischer Vierertensor mit zwei Indizes hat (T_{ik}) 10 voneinander unabhängige Komponenten. 6 dieser 10 Komponenten, u. zw. die in den ersten 3 Zielen und Spalten stehenden (mit entgegengesetzten Vorzeichen angesetzten) Komponenten sind mit den im elektromagnetischen Vakuumfeld auftretenden sog. Maxwellschen Spannungen, d. h. mit den Oberflächendichten der in Richtung der Kraftlinien auftretenden Zug- und der senkrecht auf diese verlaufenden Druckkräfte identisch. (Die Dimension der Oberflächen-Kraftdichte ist die gleiche wie die der Rauminhalt-Energiedichte.) Die Maxwellsche Spannung, die auf die Flächeneinheit der senkrecht auf die x-Achse stehenden Ebene wirkt, hat die Bezeichnung $\mathbf{p}_x$ (ein Dreiervektor) mit den Komponenten $\mathbf{p}_{xx}$, $\mathbf{p}_{xy}$, $\mathbf{p}_{xz}$. Ähnlich werden auch die Komponenten der Spannungen $\mathbf{p}_y$ und $\mathbf{p}_z$ bezeichnet.

Von den ersten 3 Komponenten der *vierten Zeile* läßt sich beweisen, daß es sich bei ihnen um die mit einer Konstanten multiplizierten Komponenten eines axialen Dreiervektors, namentlich des vektoriellen Produkts der Feldintensitäten **E** und **H** handelt. In der Elektrodynamik heißt der axiale Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \tag{54}$$

Poynting-Vektor. Physikalisch beschreibt er die Energiestromdichte im gegebenen Punkt des elektromagnetischen Feldes. Sein Absolutwert gibt die Energiemenge an, die die Flächeneinheit der Ebene **E**, **H** in der Zeiteinheit senkrecht durchströmt (durchstrahlt). Es gilt also schließlich, daß

$$T_{41} = \frac{i}{c} S_1, \quad T_{42} = \frac{i}{c} S_2, \quad T_{43} = \frac{i}{c} S_3. \tag{55}$$

Wegen der Multiplikation mit der Konstanten i/c haben diese Komponenten die Dimension der Volumenergiedichte.

Von einem geschlossenen elektrodynamischen (aus Ladungsträgern und elektromagnetischen Feldern bestehenden) System kann nachgewiesen werden, daß sich die Gleichung der Dreierkräfte, mit denen sein *inneres* elektromagnetisches Feld die Ladungsträger beansprucht, sofern das System von außen nicht durch ponderomotorische, durch die Maxwellschen Spannungen des *äußeren* elektromagnetischen Feldes geweckte Kräfte beansprucht wird, zu

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t},$$

schreibt, wobei

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c^2} \int\limits_{(v)} \mathbf{S}\, dv. \tag{56}$$

Zu integrieren ist hier über den Bereich des Volumens v, welches vom geschlossenen System eingenommen wird, während die Differenzierung nach der Zeit zu erfolgen hat.[15]

[15] Vgl. z. B. Pogány, B.: Az elektromágneses tér (Das elektromagnetische Feld). zit. Ausg., pp. 377/78.

Die an den Ladungsträgern angreifende ponderomotorische Kraft ist also gleich der Verminderung der Vektorgröße **G** in der Zeiteinheit, weshalb es begründet erscheint, den Vektor **G** als den *elektromagnetischen Dreierimpuls* des geschlossenen Systems zu bezeichnen. Die Summe des mechanischen und des elektromagnetischen Impulses bleibt somit innerhalb des Systems konstant, denn um den gleichen Wert, um den der eine abnimmt, wächst der andere. *Die elektromagnetische Impulsdichte* in einem gegebenen Punkt stellt also nun den auf die elementare Volumeneinheit entfallenden Dreierimpuls dar, d. h. nach (56) gilt

$$\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{G}}{dv} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}, \text{ d.h. } \mathbf{S} = c^2\,\mathbf{g}. \tag{57}$$

Schließlich ergibt sich aus (55)—(57) für die 3 ersten Komponenten *der 4. Spalte*

$$T_{14} = T_{41} = \frac{i}{c}\;S_1 = \frac{i}{c}c^2 g_1 = icg_1 \tag{58}$$

und ebenso

$$T_{24} = icg_2 \text{ und } T_{34} = icg_3.$$

Demnach braucht nur noch die Komponente T_{44} des Vierer-Energietensors gemäß (53) berechnet zu werden. Das Resultat dieser Berechnung ist

$$T_{44} = -\frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2). \tag{59}$$

Wie aus der Elektrodynamik bekannt, drückt dieser Zusammenhang, abgesehen vom negativen Vorzeichen, die *Energiedichte* des elektromagnetischen Feldes *je Raumeinheit* an.[16] Bezeichnen wir die Energiedichte mit U, dann ist.

$$T_{44} = -U. \tag{60}$$

Damit schreibt sich schließlich der Vierer-Energietensor zu

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -p_{xx} & -p_{xy} & -p_{xz} & icg_1 \\ -p_{yx} & -p_{yy} & -p_{yz} & icg_2 \\ -p_{zx} & -p_{zy} & -p_{zz} & icg_3 \\ \frac{i}{c}S_1 & \frac{i}{c}S_2 & \frac{i}{c}S_3 & -U \end{pmatrix} \tag{61}$$

[16] l. c., p. 172.

Nach dieser Formel steht der Energietensor **T** in korrelativer Beziehung zu folgenden Dreiervektoren: zu den Spannungen $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$, zur Energiestromdichte **S** (dem Poynting-Vektor) und zur Impulsdichte **g**, zu den Feldintensitäten **H**, **E** gemäß (53), zur Kraftdichte **f** und zur Leistungsdichte W gemäß (47)—(52) und schließlich im Sinne von (60) auch zur Energiedichte U (W und U sind skalare Größen). In der relativistischen Elektrodynamik ist also der Vierer-Energietensor ein äußerst wichtiger synthetisierender Begriff, dessen Änderungen nach dem Vierer-Koordinatenvektor **x** (x_1, x_2, x_3, x_4) die räumlichen und zeitlichen Änderungen des physikalischen, aus elektromagnetischem Feld und Ladungsträgern bestehenden Systems auf adäquate Weise widerspiegelt.

Der Energietensor ist wie jeder Vierertensor Lorentz-invariant, d. h. innerhalb der Klasse der *Lorentz-Systeme* unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Im gegebenen Fall besagt dies u. a., daß die negative Divergenz des Energietensors in jedem derartigen KS zur gleichen Viererkraftdichte **f** führt [vgl. (52)]. In allgemeinerer Fassung: die Struktur der Zusammenhänge zwischen den Zustandsgrößen eines aus Ladungsträgern und elektromagnetischem Feld bestehenden physikalischen Systems, wie sie sich im Energietensor spiegelt, ist Lorentz-invariant, d. h. unabhängig vom Koordinatensystem. In der Deutung Einsteins, die diese Lorentz-invarianz mit der *Koordinatentransformationen zwischen den Inertialsystemen* verknüpft, kann ihr jedoch wieder keine reale physikalische Bedeutung beigemessen werden, steht doch bei dieser Deutung die beschriebene Aufnahme der in den Komponenten T_{ik} figurierenden Feldintensitäten und anderen Vektoren im logischen Widerspruch zu den Postulaten des »feldfreien Raumes«.

Nach der Deutung, die die Formeln der Lorentz-Transformation als *Konfigurationstransformationen* betrachtet, beschreiben der ursprüngliche und der transformierte Energietensor die Zusammenhänge zwischen den Zustandsgrößen des aus Ladungsträgern und zugehörigen elektromagnetischen Feldern bestehenden physikalischen Systems vor und nach der Beschleunigung im gleichen Koordinatensystem. Was hier im wesentlichen unverändert bleibt, das ist die formale Seite der Zusammenhänge zwischen dem ursprünglichen und dem transformierten Energietensor sowie zwischen den ursprünglichen bzw. den transformierten anderweitigen Zustandsgrößen.

Die Einführung des Energietensorbegriffes steht auch im Einklang mit den Energie- und Impulserhaltungssätzen. Betrachtet man nämlich ein geschlossenes, isoliertes elektrodynamisches System, welches von keinerlei äußeren Kräften beansprucht wird, dann ist die Resultierende der ponderomotorischen Kräfte gleich Null, d. h. aus (52) hat man

$$\frac{\partial T_{lr}}{\partial x_r} = 0 \,. \tag{62}$$

Es läßt sich nachweisen, daß diese Formel in infinitesimaler Form (d. h. auf ein äußerst kleines Volumelement des elektrodynamischen Systems bezogen) sowohl den Energie- als auch den Impulserhaltungssatz in sich einschließt: der Energie- bzw. Impulsgehalt der im Volumelement enthaltenen *Materie* kann nur durch Zu- oder Ausströmen zu- bzw. abnehmen.

Nach den Ausgangspostulaten Einsteins ist jedoch das Kontinuum im Bereich um das gegebene physikalische System absolut feldfrei (immateriell), was philosophisch so viel besagt, daß das in Rede stehende elektrodynamische System nur zu einem Energie- und Impulsaustausch mit der geistigen Substanz fähig ist. Hier erschließt sich auch der folgende weitere innere logische Widerspruch der Einsteinschen Theorie:

Die Anerkennung der Richtigkeit des Satzes, aus dem geschlossenen elektrodynamischen System könne es eine Energie- und Impulsausströmung geben, die vom feldfreien Kontinuum aufgenommen werde, widerspricht jenem Ausgangspostulat, nach dem dieses Kontinuum absoluter Natur ist, d. h. auf die physikalischen Systeme nur einseitige Wirkung auszuüben vermag und von ihnen keinerlei Gegenwirkung dulden kann. Es stellt sich demnach auch aus der relativistischen Elektrodynamik heraus, daß die Einsteinschen Postulate der speziellen Relativitästheorie zur Deutung der realen *physikalischen* Erscheinungen ungeeignet ist!

Im Gegensatz zu Einstein muß schließlich von neuem folgendes betont werden:

1. In der Welt der Inertialsysteme kann weder die Existenz von Ladung tragenden, noch die von elektrisch neutralen *Massenpunkten*, noch die Existenz von physikalischen Körpern und Systemen gesetzt werden, die aus solchen Massenpunkten bestehen, weil alle diese Objekte durch ihre elektromagnetischen und Gravitations- sowie sonstigen Wirkungen den postulierten »feldfreien« Charakter des gegebenen Bereichs aufheben.

2. In der Welt der Inertialsysteme kann auch das Auftreten von *Geschwindigkeitsänderungen und Kraftwirkungen* nicht gesetzt werden, hat doch in diesem Bereich Einstein selbst die Ausschließlichkeit der gleichförmig geradlinigen Bewegungen postuliert. Das Auftreten von Kraftwirkungen ist hier nur auf eine Art und Weise denkbar, u. zw. aufgrund der inakzeptablen Newton-Einsteinschen Hypothese, *daß das leere feldfreie Kontinuum selbst physikalische Wirkungen* auf die Massenpunkte und die physikalischen Körper *ausübt* (sie durch ponderomotorische Kräfte angreift).

3. In der Welt der Inertialsysteme verfügen *Begriffe*, wie (träge) Masse, Massendichte, Impuls, Impulsdichte, Beschleunigung, Kraft, Kraftdichte, Energie, Energiedichte, Energie-Stromdichte, Energietensor, Effekt, Effektdichte, elektrische und magnetische Feldstärke, Quellen- und Wirbeldichte usw. wegen des Gesagten über keinerlei physikalischen Inhalt, weshalb sie nur mit einer hypostasierten platonischen Interpretation ausgestattet werden

können (mit einer Deutung, die von der physikalischen Wirksamkeit des leeren Kontinuums ausgeht).

4. In der Welt der Inertialsysteme verfügen auch jene Sätze, die die Zusammenhänge zwischen den aufgezählten physikalischen Begriffen festlegen (wie etwa der Satz von der Erhaltung der Energie und des Impulses), über keinen realen physikalischen Inhalt.

5. Das ganze Begriffssystem der Vierer-Inertialsysteme fußt auf der Einsteinschen hypostasierten Deutung der Lorentz-Invarianz des Vierer-Bogenelementquadrats als Koordinatentransformation. Aus diesem Grunde fehlt der Lorentz-Invarianz sämtlicher auf die gleiche Weise gedeuteter Vierervektoren und Vierertensoren, aber auch der Kovarianz der mit ihrer Hilfe formulierten Feldgleichungen, Bewegungsgleichungen und aller anderen mathematisch formulierten physikalischen Gesetzte der Lorentz-Transformation gegenüber und schließlich, aber nicht zuletzt auch der gleichen Deutung aller relativistischen Effekte jeder reale physikalische Inhalt. Alle diese Zusammenhänge können nur aufgrund der auf der Konfigurationstransformation fußenden Auffassung, aufgrund des Lorentz-Prinzips eine reale, d. h. eine Erklärung finden, die sich auf die Berücksichtigung der zwischen materiellen Systemen auftretenden physikalischen Wechselwirkungen stützt. Es ist somit die Umstellung vom Einsteinschen Begriff der Inertialsysteme auf die Lorentz-Systeme erforderlich.

6. In seinem auf die Einsteinschen Postulate gegründeten Aufbau vermag das Gebäude der speziellen Relativitätstheorie auch die Probe auf seine innere logische Vollkommenheit keineswegs zu bestehen. Die Anwendung der Theorie der Vierervektoren und Vierertensoren auf die relativistische Mechanik und Elektrodynamik führte über die ursprünglichen Postulate hinaus und hatte zur Folge, daß auch Einstein selbst in die auf der Konfigurationstransformation beruhende Auffassung einschwenkte. *Dieser logischen Inkonsequenz* sind die in der relativistischen Mechanik und Elektrodynamik *tatsächlich erzielten Erfolge* der Theorie zu verdanken. Zur Vermeidung sowohl der logischen Widersprüche als auch der platonisierenden Mystifikation muß also die Theorie von Anfang an auf das Fundament der mit dem gleichen mathematischen Apparat arbeitenden, auf der Konfigurationstransformation fußenden Auffassung, d. h. auf das Lorentz-Prinzip aufgebaut werden.

Prof. Dr. Tibor Elek, Budapest XI, Műegyetem rkp. 3, Ungarn