

# DIE HYDRODYNAMISCHE BERECHNUNG DER WECHSELBELASTETEN ZYLINDRISCHEN GELENKE

Von  
J. CZÉGI

Lehrstuhl für Maschinenelemente, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 24. September 1970)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. MAGYAR

## 1. Einleitung

Aus dem Gesichtspunkt der Bemessung und der Betriebseigenschaften für Gleitlager ist der wichtigste Parameter die zwischen den Gleitflächen sich entwickelnde Ölfilmstärke, deren Festlegung die Grundlage einer jeden Lagerberechnung bildet. Das Ähnlichkeitsgesetz nämlich schreibt einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen der Sommerfeldzahl, der Reibungszahl, der Öldurchflußzahl und der Ölfilmstärke vor. Die Betriebserfahrungen und die laboratorischen Messungen nahezu eines Jahrhunderts beweisen, daß betriebs-sichere Funktion, sowie entsprechende Ermüdungs- und Verschleiß-Lebensdauer nur dann zu erwarten ist, wenn die Lagergleitflächen ständig vom ununterbrochenen Ölfilm getrennt sind, dessen Dicke nicht unter einen sicheren Minimalwert sinken darf. Im Falle der ortswise Unterbrechung der Ölschicht kann wohl eine unerlaubte Überwärmung, Abnutzung, vielleicht auch ein Fressen vorkommen. Diese Feststellung bezieht sich sowohl auf die statisch-, als auch auf die zeitveränderlich belasteten Lager.

Der hydrodynamische Druck im allgemeinen entsteht teils aus der Tangentialbewegung (*Keilwirkung*), teils aus der Normalbewegung (*Verdrängungswirkung*) der Lagerflächen. Für diesen Fall ist die Reynoldssche Gleichung, mit den Bezeichnungen der Abb. 1:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) - 6\eta \left[ (U_1 + U_2) \frac{dh}{dx} + 2V \right] = 0. \quad (1)$$

Das eine Teilproblem der zeitveränderlich belasteten Lager ist die Ölverdrängungswirkung. In diesem Spezialfall haben die Lagerflächen keine Tangentialgeschwindigkeit, dagegen die Dicke des Ölfilms vermindert sich zufolge der Belastung, wodurch eine relative Normalgeschwindigkeit entsteht und ein hydrodynamischer Druck erzeugt wird.

In der Praxis sind die Kolbenbolzen- und die Kreuzkopfbolzenlager der Kolbenmaschinen, sowohl die Gelenke der Mechanismen auf Grund der Ölverdrängung berechenbar, denn der aus der Keilwirkung entstehende hydrodynamische Druck so klein ist, daß er vernachlässigt werden kann. Die relativ



die Gl. (1) in Zylinderkoordinaten umschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + r^2 h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -12 \eta \psi r^3 \dot{\epsilon} \cos \varphi. \quad (2)$$

Die verwendeten Grenzbedingungen bei der Lösung der Differentialgleichung (2) sind:  $p = 0$  für  $\varphi_1 = \pm \pi/2$ , bzw.  $z = \pm b/2$ , deren physikalische Bedeutung darin liegt, daß der Anfangspunkt der Druckkurve in der

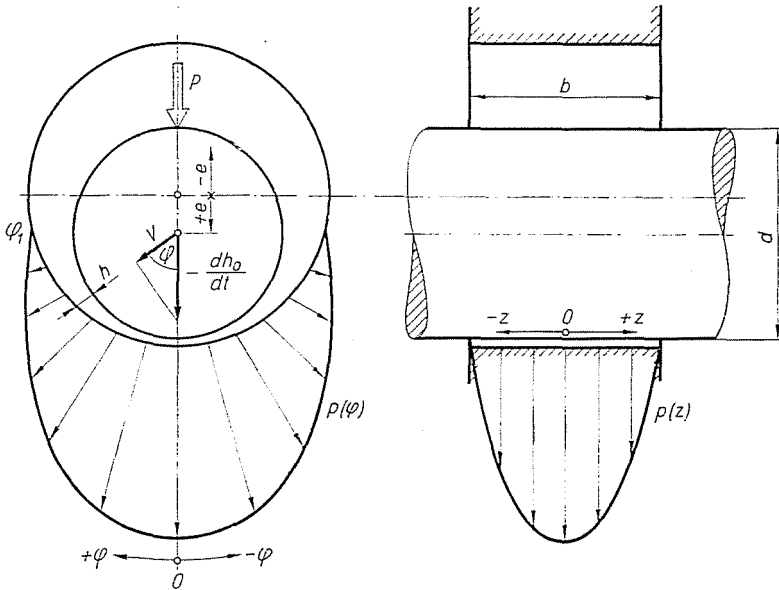


Abb. 2. Symmetrische Ölverdrängung im zylindrischen Gleitlager

Ebene senkrecht zur Belastung steht und auf der unbelasteten Seite des Lagers sich Kavitationsräume bilden. In der Praxis kann es vorkommen, daß der Lagerspalt nur teilweise mit Öl aufgefüllt ist ( $\varphi_1 < \pm \pi/2$ ), aber die Wirkung ist nur bei kleinen Exzentrizitäten bemerkbar.

Die speziellen Lösungen unter den Bedingungen:  $\partial p / \partial z = 0$  (unendlich breite Lager), bzw.  $\partial p / \partial \varphi = 0$  (unendlich schmale Lager) der Gl. (2) haben nur theoretische Bedeutung.

Die Druckfunktion unter der Voraussetzung von  $\partial p / \partial z = 0$  ist nach GÜMBEL [1] (1925):

$$p_{\infty} = \frac{6\eta\dot{\epsilon}}{\psi^2 \epsilon} \left[ \frac{1}{(1 - \epsilon \cos \varphi)^2} - 1 \right], \quad (3)$$

und die Belastungsfunktion ist in Form einer dimensionslosen Ähnlichkeitszahl auf Grund der Berechnungen von MEINERS [2] (1956) bzw. FULLER [3]

**Tabelle I**  
Berechnete  $S_n$ -Werte der

$b/d$	$\varepsilon$	0	0.1	0.2	0.3
0.25	Hays	0.19	0.27	0.38	0.54
	Holland	0.20	0.26	0.35	0.48
0.5	Hays	0.73	0.96	1.28	1.68
	Holland	0.72	0.91	1.24	1.68
	Meiners	0.72	0.91	1.26	1.70
	Hahn	0.82	1.1	1.48	1.95
	Someya	0.70	0.92	1.26	1.70
0.75	Hays	1.50	1.89	2.45	3.20
	Holland	1.53	1.92	2.55	3.35
1.0	Hays	2.35	2.95	3.82	4.9
	Holland	2.42	3.0	3.98	5.1
	Meiners	2.15	2.63	3.4	4.4
	Warner	2.0	2.55	3.19	4.4
1.5	Hays	4.0	4.9	6.1	7.7
	Holland	4.1	5.1	6.4	8.1
2.0	Holland	5.9	7.2	9.0	11.1
	Meiners	4.6	5.6	7.0	9.1

(1956):

$$S_n = \frac{P}{db} \frac{\psi^2}{\eta \dot{\varepsilon}} = 6 \left[ \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \arctg \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right] \quad (4)$$

Die OCVIKRSche Lösung [4] unter der Voraussetzung  $\partial p / \partial \varphi = 0$  ist:

$$S_n = \frac{\pi}{(1 - \varepsilon)^{5/2}} \left( \frac{b}{d} \right)^2,$$

die in der angelsächsischen Literatur trotz ihres bedeutenden Fehlers stark verbreitet ist.

HAHN [5] löste Gl. (2) durch ein numerisches Rechenverfahren, aber nur für das Breitenverhältnis  $b/d = 0.5$ . Demgegenüber schrieb HOLLAND [6] die Druckfunktion wie folgt vor:

$$p = c p_\infty \left[ 1 - \left( \frac{2z}{b} \right)^2 \right],$$

dann bestimmte er den zu den angegebenen  $b/d$  zugehörigen  $c$ -Wert aus der Kontinuitätsbedingung.

verschiedenen Autoren

0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
0.76	1.18	1.95	3.80	9.70	41.5	180
0.65	0.98	1.58	2.80	6.20	20.5	61.0
2.34	3.50	5.60	10.2	24.5	98	340
2.30	3.43	5.60	9.80	19.5	60.0	180
2.40	3.65	6.0	10.8	23.2	89.0	335
2.80	4.15	6.6	11.8	25.5	98.0	380
2.45	3.8	6.1	11.2	25.2	102	404
4.30	6.3	10.0	17.5	39	132	425
4.70	7.0	10.8	17.6	33.5	98	272
6.6	9.2	14.0	24.0	50.0	160	490
6.8	9.7	14.3	23.5	47.0	130	360
6.1	8.5	12.5	20.5	40.0	132	435
6.0	8.6	13.2	22.0	45.0	154	—
10.2	14.0	22	32.5	62	185	530
10.5	14.1	20.3	32.5	60	163	445
14.0	18.2	25.2	38.0	69	185	510
11.5	15.2	21.7	34	65	185	540

HAYS [7] ersetzte die Druckfunktion mit einer Doppel-Fourier-Reihe, danach bestimmte er die Koeffizienten der Reihe mit Hilfe der Variationsrechnung.

MEINERS [8] nahm an, daß der Einfluß des Breitverhältnisses auf die Sommerfeldzahl ist sowohl für die Ölverdrängung, als auch für die Tangentialbewegung derselbe, wodurch er die durch SASSENFELD-WALTHER [9] bestimmten Breitenfaktoren einfach übernahm und mit denen die auf  $b/d = \infty$  sich beziehende Gl. (4) multiplizierte, um die zum angegebenen  $b/d$  angehörige Sommerfeldzahl zu erhalten.

SOMEYA [10] wählte für die Druckfunktion ebenfalls einen Doppel-Fourier-Reihe und löste Gl. (2) durch das Koeffizientenvergleichsverfahren, aber bloß für das Breitenverhältnis  $b/d = 0.5$ .

Das Rechenverfahren von WARNER [11] ist dem Verfahren von [6] ähnlich, nur nahm er für die axiale Druckverteilung den hyperbolischen Cosinus anstatt der Parabel. Die  $S_n$ -Werte — bestimmt durch diese Methode — sind nur in der BOOKER's [12] Veröffentlichung für das Breitenverhältnis  $b/d = 1$  zu finden.

Zu Vergleichszwecken wurden die  $S_n$ -Werte der verschiedenen Autoren, die zu den gleichen  $\varepsilon$  und  $b/d$  gehören, in Tabelle 1 zusammengefaßt. Man kann wohl annehmen, daß die numerische Methode von HAHN die genauesten Werte hervorbrachte und somit dieselbe als Vergleichsgrundlage dienen können. Die Angaben von HAYS weisen mit der vorherigen eine sehr gute Übereinstimmung auf und auch die Annahme von MEINERS wurde dadurch bestätigt. Die Berechnungsergebnisse HOLLAND's in den Bereichen  $\varepsilon > 0.8$  und  $b/d < 1$  weichen wesentlich ab, was der sehr vereinfachten mathematischen Methode zuzuschreiben ist.

Unter Betrachtung der Vorhergehenden benützten wir zu den weiteren Berechnungen im allgemeinen die Angaben von HAYS. Da in der Originalarbeit von HAYS von Tabelle 1 abweichende  $b/d$ -Werte zu finden sind, waren wir gezwungen graphische Interpolation zu benützen und deshalb haben wir zu Kontrollzwecken die  $S_n$ -Werte von MEINERS und von HOLLAND für die Breitenverhältnisse  $b/d > 1$  ebenfalls in Betracht gezogen.

#### 4. Die Bestimmung der Zapfenlage für periodische Kraftveränderung

Für zeitveränderliche Belastung ist die Sommerfeldzahl:

$$S_n(\varepsilon, b/d) = \frac{P(t)}{db} \frac{\eta^2}{\eta} \frac{1}{\dot{\varepsilon}} \quad (5)$$

Durch Trennung der Veränderlichen und nach ausgeführter Integration der Gl. (5) — falls die Anfangsbedingungen bekannt sind — kann die Änderung  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$  der relativen Exzentrizität in irgendeinem Zeitintervall  $t_2 - t_1$  bestimmt werden.

Wählt man die Kraftperiode zu  $2\pi$  (Abb. 3), da ergibt sich zur Berechnung ein dimensionsloser Ausdruck. Wird die zur Schwingungsdauer  $T$  ge-

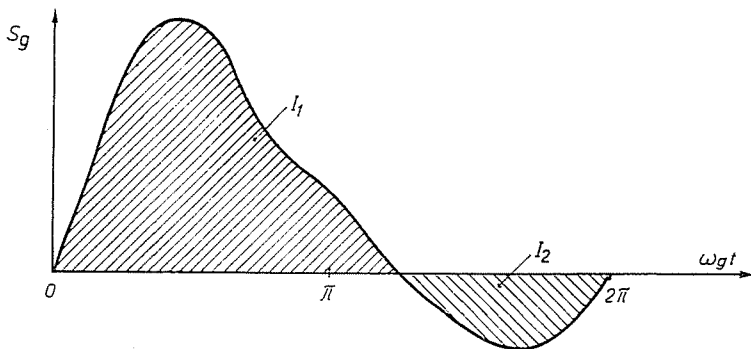


Abb. 3. Die Veränderung der erregenden Sommerfeldzahl für eine Periode

hörige erregende Kreisfrequenz  $\omega_g = 2 \pi/T$  und die erregende Sommerfeldzahl:

$$S_g = \frac{P}{db} \frac{\psi^2}{\eta \omega_g}$$

eingeführt, wird Gl. (5), nach der Trennung der Veränderlichen, wie folgt sein:

$$\int_{\omega_{t_1}}^{\omega_{t_2}} S_g d(\omega_g t) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} S_n(\varepsilon, b/d) d\varepsilon. \quad (6)$$

Die linke Seite der Gl. (6) drückt die unter der in Abb. 3 aufgezeichneten Kurve befindliche Fläche — nach der physikalischen Auslegung den Impuls

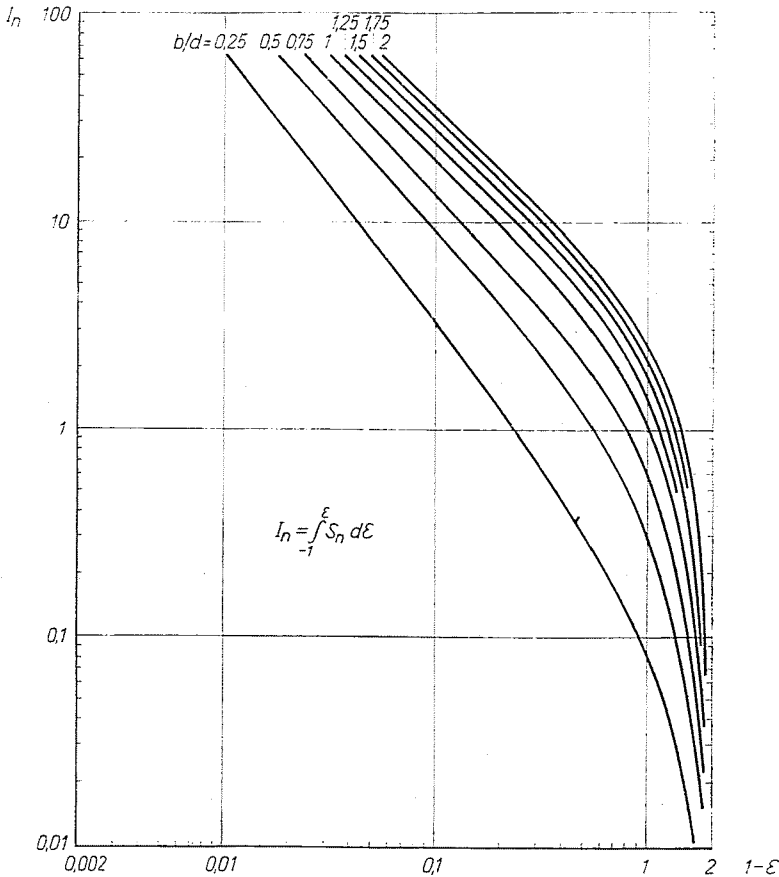


Abb. 4. Bestimmte Integralwerte der Sommerfeldzahl

der Lagerbelastung in dimensionsloser Form — binnen einem gewissen Zeitintervall aus, also:

$$I = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} S_n(\varepsilon, b/d) d\varepsilon. \quad (7)$$

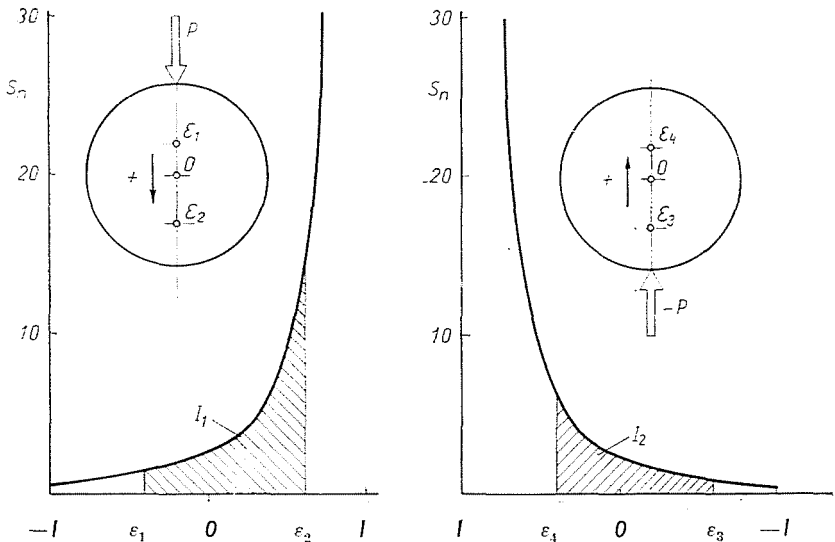


Abb. 5. Zusammenhang zwischen der Zapfenlage-Veränderung und dem Impuls für periodische Wechselbelastung

Die Sommerfeldzahl kann durch graphische Methode integriert werden. In Abb. 4 sind die Integralwerte:

$$I_n = \int_{-1}^{\varepsilon} S_n(\varepsilon, b/d) d\varepsilon$$

angegeben, aus denen der Integralwert, der zu beliebigen Grenzen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  gehört, mit dem Zusammenhang:

$$[I]_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} = [I_n]_{\varepsilon_2} - [I_n]_{\varepsilon_1}$$

berechenbar ist.

Im Falle der in Abb. 3 angegebenen periodischen Belastungsänderung bewegt sich der Zapfen ebenfalls periodisch. Unter Wirkung des Impulses  $I_1$  verändert sich die Zapfenlage gemäss Abb. 5 von  $\varepsilon_1$  auf  $\varepsilon_2$ , dann wird sie durch den in entgegengesetzter Richtung wirkenden Impuls  $I_2$  von  $\varepsilon_3$  auf  $\varepsilon_4$  verändert. Wenn von dem Anfangsabschnitt der Zapfenschwingung abgesehen wird — denn dies macht höchstens zwei Perioden aus — und die Untersuchun-



gen auf die stationäre Strecke sich beschränken, müssen die Bedingungen  $\varepsilon_3 = -\varepsilon_2$ , bzw.  $\varepsilon_4 = -\varepsilon_1$  erfüllt werden. Zur Berechnung stehen auf Grund der Gl. (6) zwei Integralgleichungen mit den Impulsen  $I_1$  und  $I_2$  zur Verfügung. Diese sind analytisch unlösbar, denn eben die Integralgrenzen sind unbekannt.

Für die Lösung wurde eine monographische Methode benützt. Zu jedem festgehaltenen  $\varepsilon_1$ -Wert und zu den zu ihm mit den Schritten  $\Delta\varepsilon$  gewählten

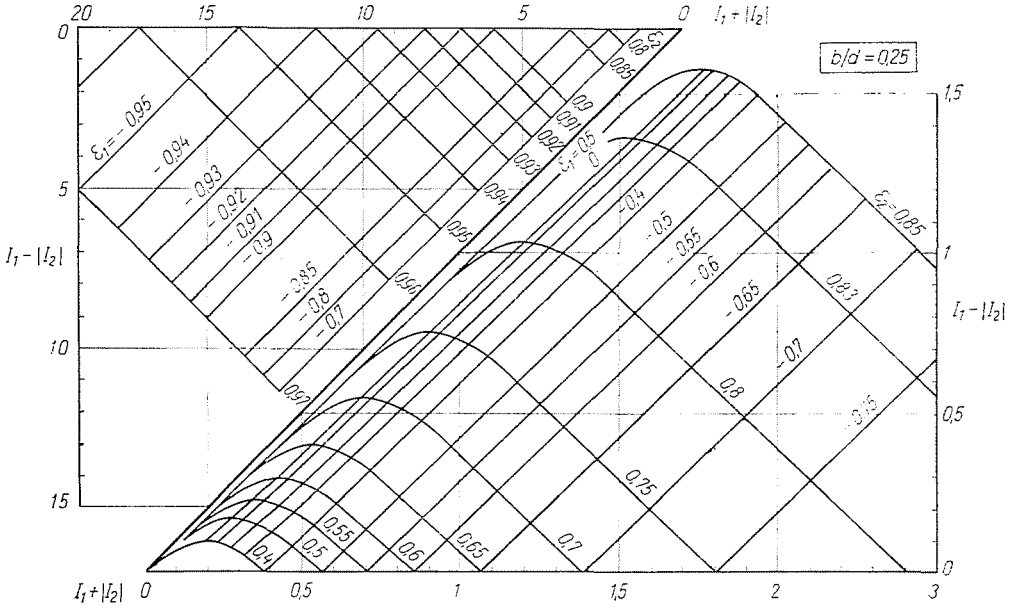
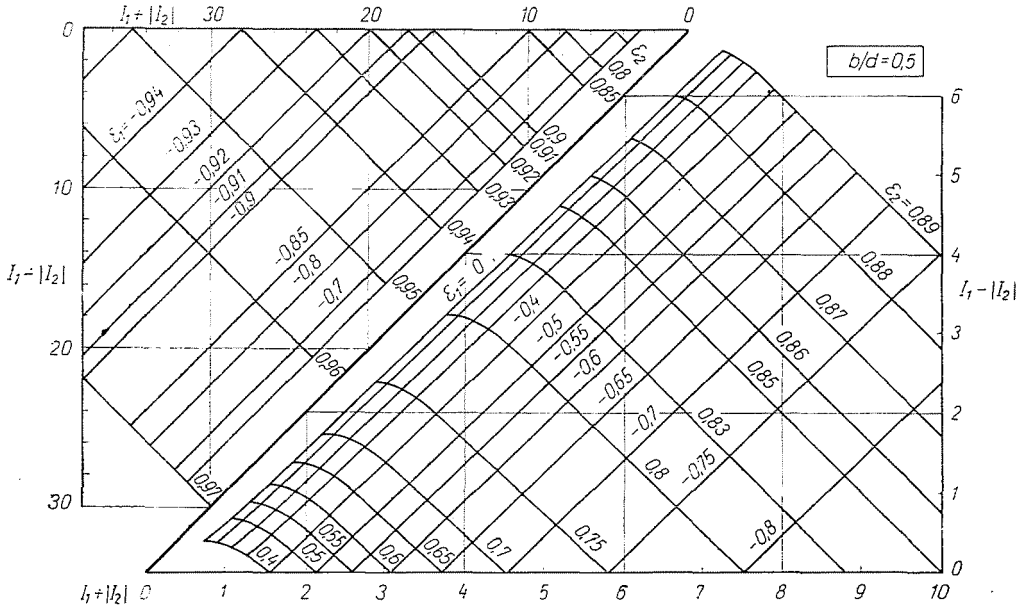
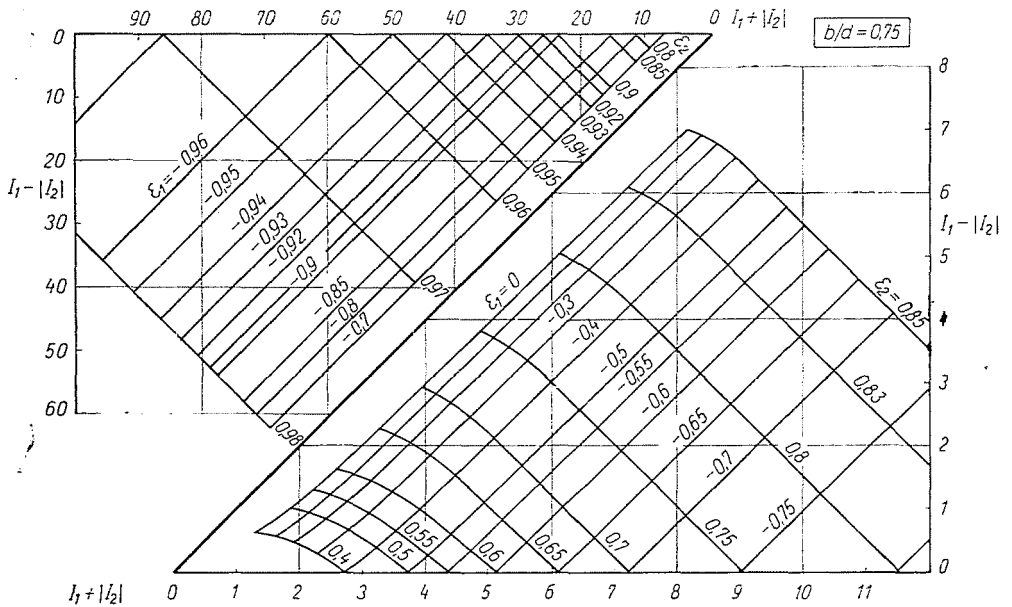


Abb. 6. Nomogramm für die Bestimmung  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  ( $b/d = 0,25$ )

Werten:  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + i \Delta\varepsilon$  wurden auf Grund der Angaben in Abb. 4 die Wertepaare  $I_1 + |I_2|$  und  $I_1 - |I_2|$  ausgerechnet.

Die Ergebnisse für die verschiedenen  $b/d$  Breitenverhältnisse sind in Abb. 6—11 zu finden.

Im Falle eines symmetrischen Impulses (z. B. sinusartige Belastungsveränderung) ist die Berechnung wesentlich einfacher, denn die zu den  $I_1 = -I_2 = I_0$  gehörigen  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_0$  maximalen Exzentrizitäten sind auch symmetrisch. Die Angaben auf den berechneten Zusammenhang:  $I_0(\varepsilon_0)$  für verschiedene  $b/d$  sind in Abb. 12 zu finden. HAYS [7] bestimmte die zeitliche Veränderung der Exzentrizität für sinusartige Belastungen verschiedener Größe durch Programmierung auf eine digitale Rechenanlage. Die sich daraus ergebenden maximalen Exzentrizitäten stimmen vollkommen mit den durch die Werte in Abb. 12 bestimmbaren Ergebnissen des hier beschriebenen einfachen Rechenverfahrens überein.

Abb. 7. Nomogramm für die Bestimmung  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  ( $b/d = 0,5$ )Abb. 8. Nomogramm für die Bestimmung  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  ( $b/d = 0,75$ )

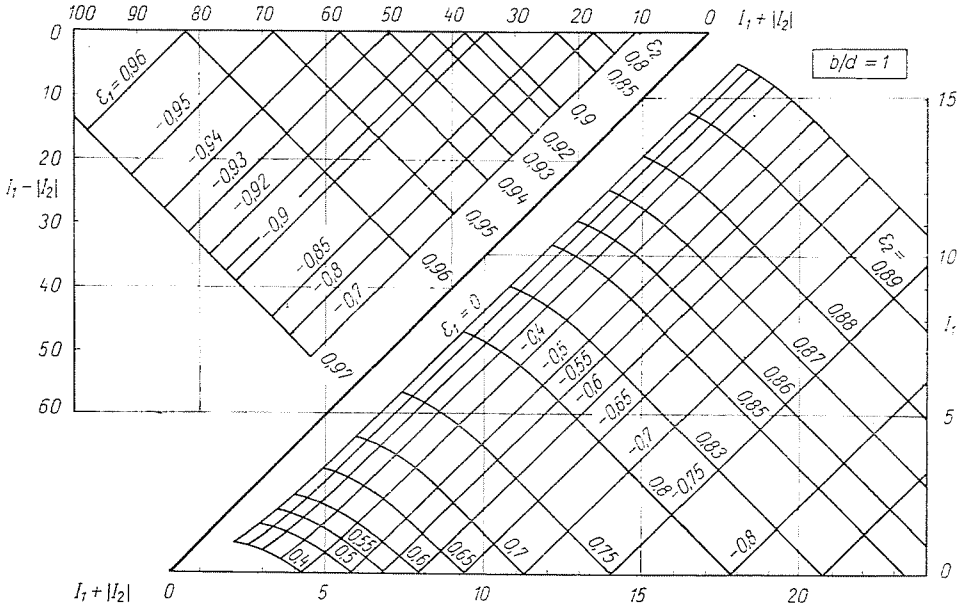


Abb. 9. Nomogramm für die Bestimmung  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  ( $b/d = 1$ )

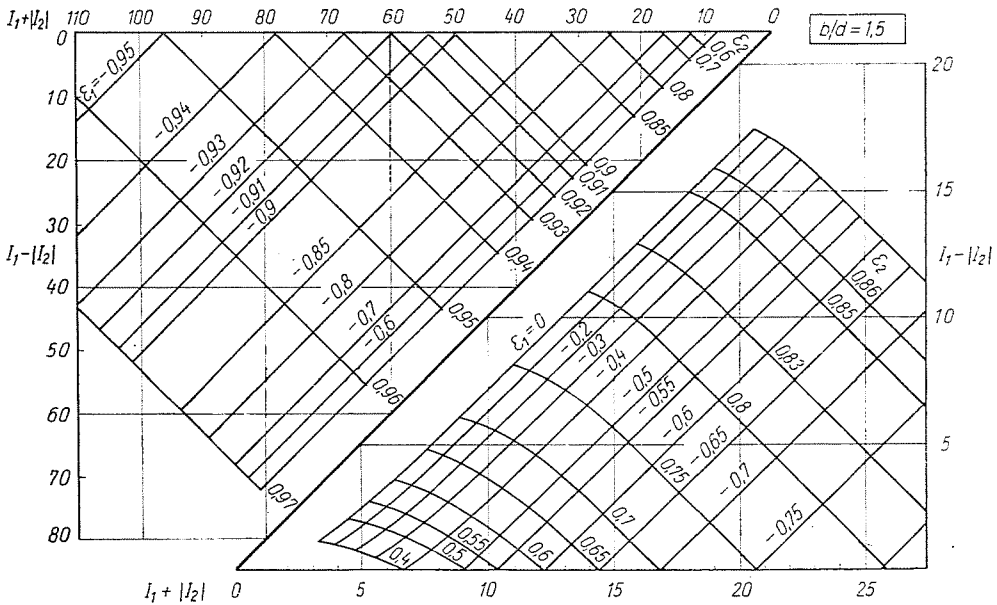


Abb. 10. Nomogramm für die Bestimmung  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  ( $b/d = 1,5$ )

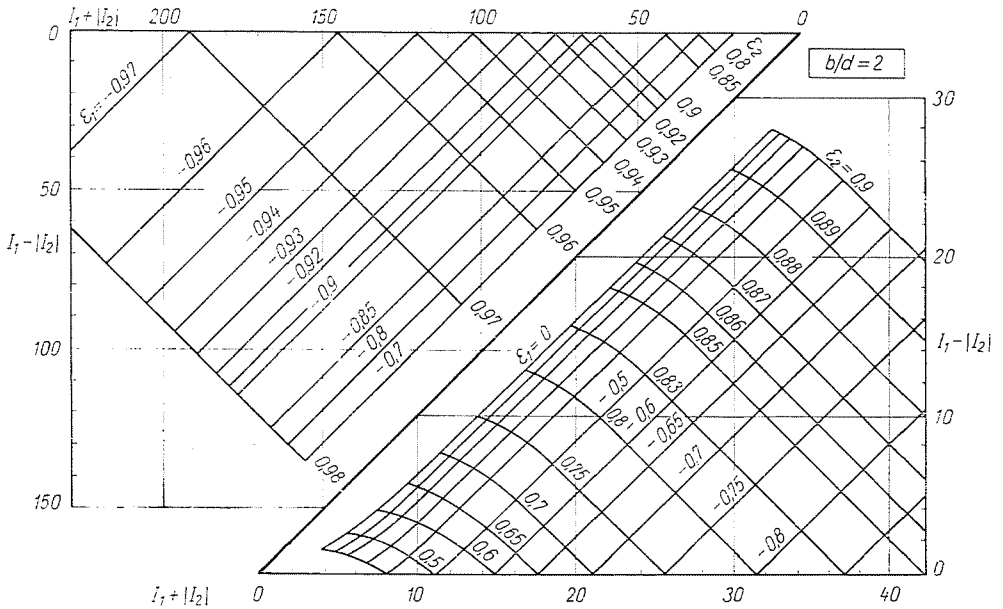


Abb. 11. Nomogramm für die Bestimmung  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  ( $b/d = 2$ )

### 5. Die Grenzen der Verwendung für oszillierende und sich drehende wechselbelastete Lager

Schon aus der Arbeit von MEINERS [8] stellte es sich heraus, daß in pendelnden Lagern von der Keilwirkung ein ganz geringer hydrodynamischer Druck entsteht. GUPTA und PHELAN [13], indem sie die Pendelbewegung mit Wechselbelastung variierten, berechneten die Zapfenbahn mit einem numerischen Rechenverfahren und stellten fest, daß die tangential oszillierende Bewegung keinen Einfluß auf die maximale Exzentrizität hat.

Aber nicht nur die oszillierenden, sondern in besonderen Fällen auch die sich drehenden wechselbelasteten Lager können auf Grund der schon klargelegten Ölverdrängungswirkung berechnet werden. Beweisbar ist, daß wenn die die Keilwirkung beeinflussende effektive Winkelgeschwindigkeit  $\omega_e \leq \leq 0.5 \omega_g$  ist, der Fehler der relativen Exzentrizität  $< 3\%$ , bzw. wenn  $\omega_e \leq \omega_g$ , dann der Fehler  $< 8\%$  ist.

Als Beispiel geben wir bekannt die Verwendung des Rechenverfahrens beim Kolbenbolzenlager des Dieselmotors Typ 6LD315 der Láng Maschinenfabrik (Budapest). Die Hauptabmessungen des Lagers sind:  $d = b = 185$  mm,  $\psi = 0.5 \cdot 10^{-3}$ . Die Viskosität bei Betriebstemperatur:  $\eta = 34.4 \cdot 10^{-8}$  kpsec/cm<sup>2</sup>. Die erregende Kreisfrequenz:  $\omega_g = 26.2$  sec<sup>-1</sup>.

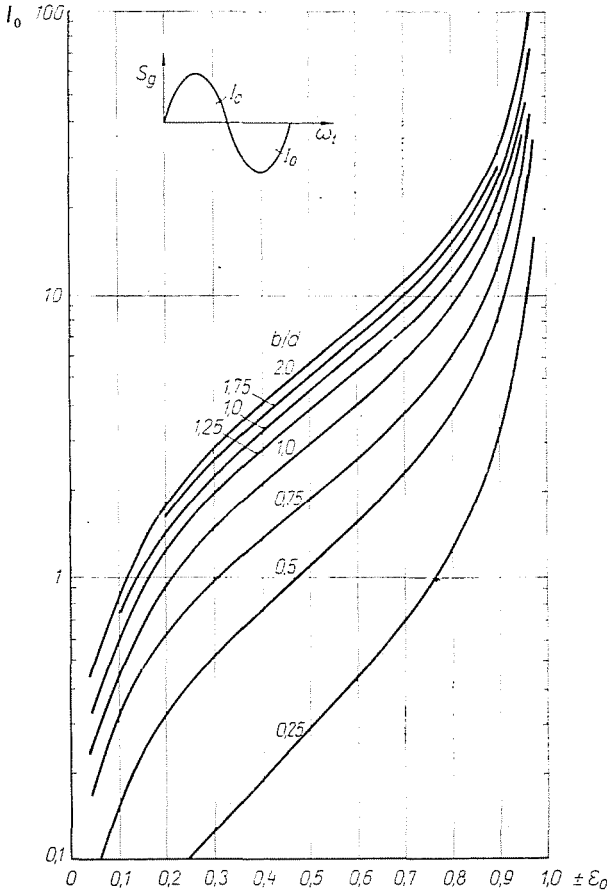


Abb. 12. Zusammenhang des symmetrischen Impulses mit der maximalen relativen Exzentrizität

An der Abb. 13 ist die Veränderung der Belastung binnen einer Periode zu sehen. Um die erregende Sommerfeldzahl aus der Belastung zur erhalten, muß die mit dem Faktor  $\psi^2/db \eta \omega_g = 8.6 \cdot 10^{-8}$  multipliziert werden. Die positive und negative Impuls, berechnet aus der unter der Belastungskurve befindlichen Fläche:  $I_1 = 5.1$  und  $I_2 = -1.15$ . Zu den Werten  $I_1 + |I_2| = 6.25$  und  $I_1 - |I_2| = 3.95$  können die maximale ( $\epsilon_2 = 0.70$ ) und die minimale ( $\epsilon_1 = -0.11$ ) relative Exzentrizitäten aus dem Bild 9 genommen werden. Am Bild 13 ist es sichtbar, daß  $\epsilon_2$  bei der Kurbelstellung  $\omega t = 282^\circ$  und  $\epsilon_1$  bei  $\omega t = 435^\circ$  sich ergibt. Beliebig ausgehend von diesen zwei Punkten und ausrechnend die Teilimpulse, die zu den  $\Delta\omega t$  breiten Streifen unter der Belastungskurve gehören, die Veränderung der Exzentrizität kann mit Hilfe der Gl. (8) und der Abb. 4 für die ganze Periode aufgezeichnet werden (Abb. 13b).

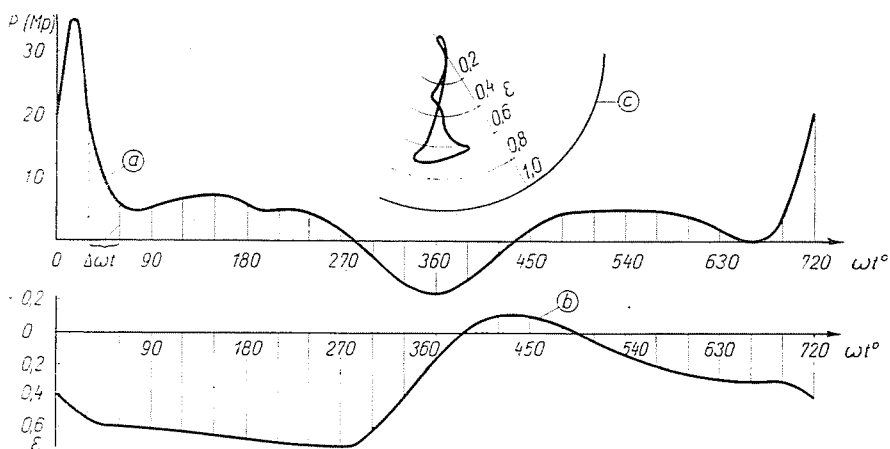


Abb. 13. Veränderung der Belastung und der relativen Exzentrizität für eine Periode beim Kolbenbolzenlager eines Dieselmotors

Wenn wir die relativen Exzentrizitäten, die zu den verschiedenen Pleuelstellungen gehören, in Polardiagramm darstellen, erhalten wir die Bahn des Zapfens innerhalb des Lagers (13c).

## 6. Zusammenfassung

Die minimale ( $\varepsilon_1$ ) und die maximale relative Exzentrizität ( $\varepsilon_2$ ) der periodisch wechselbelasteten Lager — falls das Verhältnis zwischen der effektiven Winkelgeschwindigkeit und der erregenden Kreisfrequenz:  $\omega_e/\omega_g \leq 0.5$  ist — ist auf Grund der Ölverdrängungstheorie berechenbar. Zwei Integralgleichungen können aufgeschrieben werden unter der Bedingung, daß das bestimmte Integral der Sommerfeldzahl nach  $\varepsilon$  mit dem dimensionslosen Impuls gleich sein muß. Zur Lösung wurde ein nomographisches Verfahren benützt. Für den symmetrischen Impuls bestimmte  $\varepsilon_{\max}$ -Werte stimmen gut mit den Ergebnissen von HAYS überein, die durch numerische Methode und mit Hilfe des Rechenmaschinenprogramms gewonnen wurden.

## Literatur

1. GÜMBEL, L.: Reibung und Schmierung im Maschinenbau. VDI-Verlag, Berlin 1925.
2. MEINERS, K.: Grundbegriffe der allgemeinen hydrodynamischen Tragfähigkeit der kreiszylindrischen Querlager. Ber. Inst. f. Maschinenelemente der Technischen Hochschule Hannover 1956.
3. FULLER, D. D.: Theory and practice of lubrication for engineers. J. Wiley Inc. New York 1956.
4. OCVIRK, F. W.—DU BOIS, G. B.: Analytical derivation and experimental evaluation of short bearing approximations of full journal bearings. NACA Tech. Rep. Nr. 1157 (1953).

5. HAHN, H. W.: Das zylindrische Gleitlager endlicher Breite unter zeitlich veränderlicher Belastung. Diss. Techn. Hochschule Karlsruhe 1957.
6. HOLLAND, J.: Beitrag zur Erfassung der Schmierverhältnisse in Verbrennungskraftmaschinen. VDI-Forsch.-Heft 475. Düsseldorf 1959.
7. HAYS, D. F.: Squeeze Films: A finite journal bearing with a fluctuating load. Trans ASME D. **83**, 579—586 (1961).
8. MEINERS, K.: Beiträge zur Gleitlagerberechnung. VDI-Forsch.-Heft 488. Düsseldorf 1961.
9. SASSENFELD, H.—WALTHER, A.: Gleitlagerberechnungen. VDI-Forsch.-Heft 411. Düsseldorf 1954.
10. SOMEYA, T.: Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden, unwuchtfreien Welle. Diss. Techn. Hochschule Karlsruhe 1962.
11. WARNER, P. C.: Static and dynamic properties of partial journal bearings. Trans. ASME D. **85**, 247—257 (1963).
12. BOOKER, J. F.: Dynamically loaded journal bearings—Mobility method of solution. Trans. ASME D. **87**, 537—546 (1965).
13. GUPTA, B. K.—PHELAN, R. M.: The load capacity of short journal bearings with oscillating effective speed. Trans. ASME D. **86**, 348—354 (1964).

Dr. József CZÉGI; Budapest XI., Műegyetem rkp. 3. Ungarn