

DIE ANWENDUNG DER METHODE DER DIMENSIONSANALYSE IN LANDTECHNISCHEN UNTERSUCHUNGEN

VON

G. SITKEI

Lehrstuhl für Landmaschinenbau, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 14. Mai 1971)
Vorgelegt von Prof. A. ZALKA

Einleitung

Zum Entwurf verschiedener Maschinen muß der Ingenieur bestimmte grundlegende Zusammenhänge oder Gesetzmäßigkeiten kennen. Diese Zusammenhänge können in zwei Arten aufgestellt werden: entweder aufgrund rein theoretischer Überlegungen und Ableitungen mit Hilfe der vorhandenen Prinzipien, oder aufgrund von experimentellen Messungen. Dabei müssen die Meßergebnisse mit Hilfe irgendeiner mathematischen Methode bearbeitet werden.

Aus den verschiedenen Bearbeitungsmethoden hat die funktionelle Bearbeitung den Vorteil, daß sie einen Zusammenhang zwischen mehreren Variablen liefert.

Wenn die Zahl der Variablen klein (2—4) ist, genügt im allgemeinen eine einfache graphische Darstellung und die zur so erhaltenen Kurve passende Gleichung kann in einfacher Weise aufgestellt werden.

Ist die Zahl der Variablen jedoch groß, kann eine direkte Analyse sehr umständlich sein. In solchen Fällen versucht man, den gesuchten Zusammenhang nicht zwischen den einzelnen Variablen sondern zwischen dimensionslosen Ähnlichkeitszahlen aufzustellen, deren Zahl geringer ist als jene der Variablen.

Die dimensionslose Darstellung hat außerdem den Vorteil, daß die Dimensionseinheiten beliebig ausgewählt werden können.

Die dimensionslosen Gruppen können als Ähnlichkeitszahlen betrachtet werden, die auch die Ähnlichkeitsbedingungen für den untersuchten Prozeß voraussagen. Die einzelnen Prozesse sind ähnlich, wenn die für den Prozeß charakteristischen Ähnlichkeitszahlen dieselben sind.

Die dimensionslosen Gruppen können entweder aus der den Prozeß beschreibenden Differentialgleichung oder mit Hilfe der Methode der Dimensionsanalyse bestimmt werden. Da die genaue Differentialgleichung für entwickelte Prozesse nur selten aufgestellt werden kann, bleibt nichts anderes übrig als die dimensionslosen Gruppen durch Dimensionsanalyse zu suchen. Die allgemeine Ähnlichkeitstheorie sagt aus, daß eine Funktion

$$f(y_1, y_2, y_3 \dots y_n) = 0$$

in der dimensionslosen Form

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots \pi_N) = 0$$

oder

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3 \dots \pi_N)$$

umgewandelt werden kann, wobei die Zahl der dimensionslosen Kennzahlen N gleich der Zahl der Variablen minus der Zahl der Dimensionen (m) ist:

$$N = n - m$$

Die obige Ähnlichkeitsgleichung kann als Produkt von Potenzfunktionen dargestellt werden, d. h.

$$\pi_1 = \text{konst } \pi_2^{n_2} \cdot \pi_3^{n_3} \dots \pi_N^{n_N} \quad (1)$$

Die Aufgabe der Dimensionsanalyse ist, zunächst die Ähnlichkeitszahlen $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N$ festzustellen. Der erste Schritt dazu ist, alle wichtigen Variablen in Betracht zu ziehen, die irgendeinen Einfluß auf den untersuchten Prozeß haben.

Der nächste Schritt ist, die Dimension der einzelnen Variablen festzustellen und in der Dimensionsmatrix zusammenzustellen.

Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichungen der Dimensionsmatrix dienen zur Zusammenstellung der Matrix der Ähnlichkeitszahlen. Aus dieser Matrix können die Ähnlichkeitszahlen einfach aufgeschrieben werden.

Auf dem Gebiete der Landtechnik ergeben sich sehr viele verwickelte Prozesse, die heute noch mit exakten mathematischen Methoden nicht behandelt werden können. In solchen Fällen müssen die Zusammenhänge experimentell bestimmt werden. Die Meßergebnisse werden dabei nach irgendeiner Methode bearbeitet. Wenn die Bearbeitung nur Teil-Zusammenhänge und keine allgemeingültigen Beziehungen liefert, so werden die Meßergebnisse nur für bestimmte in den Versuchen vorkommenden Fälle gültig sein. Das bedeutet, daß die Versuche für andere Verhältnisse immer wiederholt werden müssen. Das erfordert aber viel Zeit und Geld. Liefert die Bearbeitung jedoch allgemeingültige Zusammenhänge, so können die abhängigen Variablen für beliebige Verhältnisse bestimmt werden.

In folgenden werden Beispiele auf dem Gebiete der Mechanik des Systems »Boden-Fahrzeug« gezeigt, die vom Verfasser in der letzten Zeit ausgearbeitet wurden. Schließlich wird ein kurzer Hinweis auf die früheren

Arbeiten des Verfassers gegeben, in denen allgemeingültige Lösungen für die betreffenden Vorgänge ebenso mit Hilfe der Methode der Dimensionsanalyse gefunden wurden.

Eine geschlossene Lösung auf dem Gebiete Mechanik des Systems »Boden-Fahrzeug« mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen

Die Mechanik des Systems »Boden-Fahrzeug« bereitet den Forschern sehr viele Schwierigkeiten. Der Grund liegt hier darin, daß sowohl die Reifenmechanik als auch die Bodenmechanik noch ziemlich wenig ausgearbeitet sind. Ein rein theoretischer Weg, die Kenngrößen der Reifen aus dem Reifenaufbau zu bestimmen, erscheint wegen der vielfältigen Einflüsse heute noch zu kompliziert zu sein. Die allgemeinen, auf der Elastizitätstheorie beruhenden Methoden der Bodenmechanik geben auch keine befriedigenden Ergebnisse. Daraus folgt, daß die theoretischen Methoden hier keine geschlossenen Lösungen liefern können.

Vor einigen Jahren hat der Verfasser versucht diese schwierigen Probleme aufgrund halbempirischer Methoden, u. a. der Dimensionsanalyse zu lösen [1—3].

Der erste Schritt war, die wichtigsten Kennzahlen von AS-Reifen und deren Ähnlichkeitsgesetze zu bestimmen.

Eine der wichtigsten Kenngrößen der Reifen ist die Tragfähigkeit. Die Tragfähigkeit eines Reifens hängt von folgenden Einflußgrößen ab:

$$Q = \varphi(V, f, p_i, H) \quad (2)$$

wobei V — das Reifenvolumen,
 f — die Einfederung des Reifens,
 p_i — der Innendruck,
 H — die Querschnittshöhe des Reifens ist.

Die Zahl der Variablen ist fünf, die der Dimensionen ist zwei, kp und m , und die der Ähnlichkeitszahlen ist $5 - 2 = 3$. Die Dimensionsmatrix der Gl. (2) hat die Form

	1	2	3	4	5
	Q	V	f	p_i	H
m	0	3	1	-2	1
kp	1	0	0	1	0

Die charakteristischen Gleichungen der Dimensionsmatrix sind:

$$3k_2 + k_3 - 2k_4 + k_5 = 0$$

$$k_1 + k_4 = 0.$$

Daraus folgt

$$k_4 = -k_1$$

$$k_5 = -2k_1 - 3k_2 - k_3$$

Mit diesen Werten lautet die Matrix der Kriterien

	1	2	3	4	5
	Q	V	f	p_i	H
π_1	1	0	0	-1	-2
π_2	0	1	0	0	-3
π_3	0	0	1	0	-1

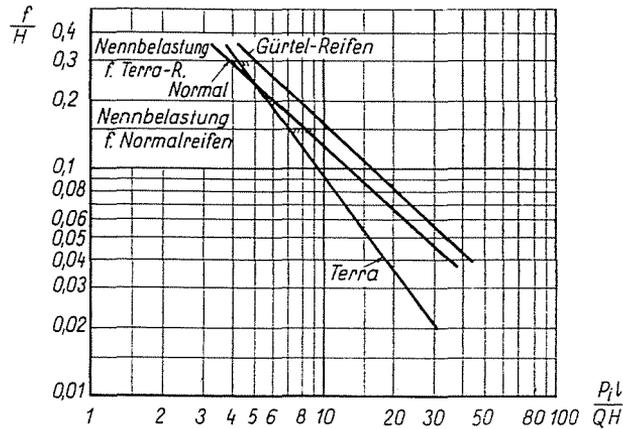


Abb. 1. Dimensionslose Darstellung der Reifeneindrückung

Mit ihrer Hilfe kann man die drei Kriterien anschreiben. Es ist

$$\pi_1 = \frac{Q}{p_i H^2}; \quad \pi_2 = \frac{V}{H^3}; \quad \pi_3 = \frac{f}{H}.$$

Die Multiplikation von $1/\pi_1$ und π_2 liefert eine neue Ähnlichkeitszahl

$$\pi'_1 = \frac{p_i \cdot V}{Q \cdot H}.$$

Die Untersuchung der entsprechenden Angaben zeigte, daß zwischen π'_1 und π_3 ein eindeutiger Zusammenhang besteht, d. h.

$$\frac{p_i V}{Q \cdot H} = \varphi \left(\frac{f}{H} \right) \quad (3)$$

der für Normal- und Gürtelreifen sowie für Terra-Reifen in Abb. 1 dargestellt ist. In dieser Darstellung ist zu erkennen, daß alle Reifen bei der Nenn-

belastung ($p_i V / QH = 7$) dieselbe Einfederung f/H haben. Für Normalreifen liegt die Nennbelastung immer bei $f/H = 0,15$. Mit Hilfe dieser Darstellung kann man entweder die Belastbarkeit eines Reifens oder die relative Einfederung des Reifens bei beliebiger Belastung und Innendruck bestimmen.

Der obige Zusammenhang gilt für feste Fahrbahn. Auf weichem Boden hängt die Einfederung des Reifens auch von der relativen Einsinkung des Reifens ab, d. h.

$$\frac{p_i V}{Q \cdot H} = \varphi \left(\frac{f}{H}, \frac{z}{R} \right) \quad (3a)$$

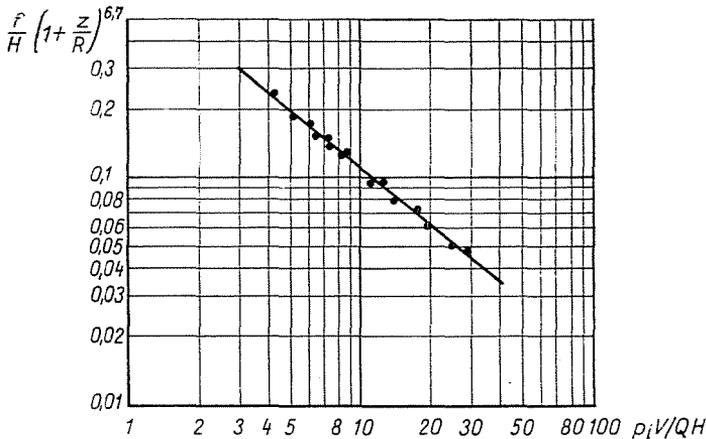


Abb. 2. Dimensionslose Darstellung der Reifeneindrückung unter Berücksichtigung der Einsinkung

wo z — die Einsinkung des Reifens,
 R — der Radius des Reifens ist.

Da die Einfederung des Reifens bei $z/R = 0$ nicht gleich Null ist, soll der Einfluß der Einsinkung in der Form $(1 + z/R)^m$ berücksichtigt werden, d. h.

$$\frac{f}{H} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^m = C \left(\frac{p_i V}{Q \cdot H}\right)^n \quad (4)$$

Gl. (4) stellt einen allgemeingültigen Zusammenhang für die Bestimmung der Eindrückung von AS-Reifen bei beliebiger Belastung, Innendruck und Einsinkung dar (Abb. 2).

Die Berührungsfläche zwischen Reifen und Boden ist ein wichtiger Parameter zur Kennzeichnung der Zugfähigkeit. Für die Bestimmung der Berührungsfläche F kann — ähnlich wie Gl. (3a) — ein dimensionsloser Zusammenhang aufgestellt werden. Auf nachgiebigem Boden gilt der folgende funktionelle Zusammenhang:

$$\frac{F}{D \cdot B} = f \left(\frac{p_i V}{Q \cdot H}, \frac{z}{D} \right) \tag{5}$$

wobei D den Reifendurchmesser und B die Reifenbreite bedeuten.

Aufgrund der Meßergebnisse ist Gl. (5) für verschiedene relative Einsenkungen z/D in Abb. 3 dargestellt. Hier hat man wieder eine allgemeingültige Darstellung für beliebige Verhältnisse. Außerdem läßt diese Darstellung einige sehr wichtige Erkenntnisse abziehen. Z. B. haben alle Reifen bei der Nennbelastung dieselbe relative Berührungsfläche (für feste Fahrbahn $F/DB = 0,18$) und daraus kann die Berührungsfläche einfach berechnet werden.

Der mittlere Druck in der Berührungsfläche spielt eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Einsenkung der Reifen. Für die einzelnen Reifen nimmt der mittlere Druck (definiert als $p_m = Q/F$) in Abhängigkeit von der Tragfähigkeit etwas zu, wie es aus der Abb. 4 ersichtlich ist. Hier benutzt man ein dimensionsloses Druckverhältnis und dadurch wird der Zusammenhang für beliebige Innendrucke gültig.

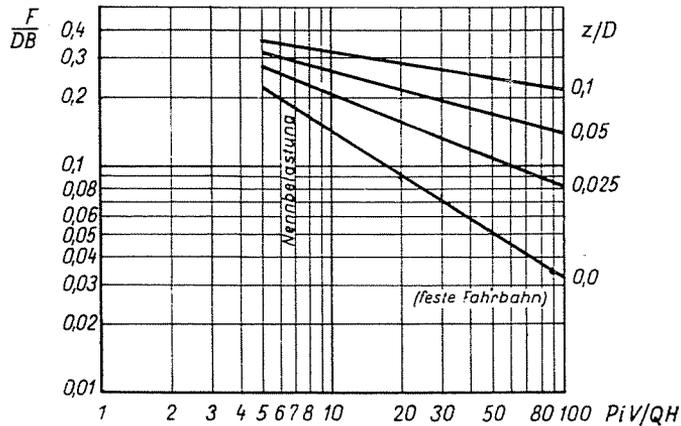


Abb. 3. Dimensionslose Darstellung der Berührungsfläche

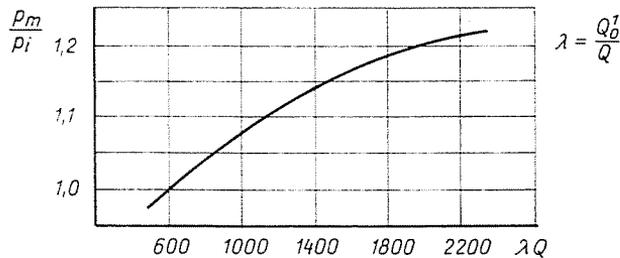


Abb. 4. Der mittlere Druck in der Berührungsfläche. Q_0^1 — Tragfähigkeit bei 1,0 atü

Mit Hilfe der Abb. 3 und 4 kann die Änderung des mittleren Druckes in der Berührungsfläche abhängig von der relativen Einsinkung konstruiert werden. Eine solche Darstellung in dimensionsloser Form ist in Abb. 5 zu sehen. Der Nennbelastung entspricht der Wert von $p_i V / QH = 7$.

Der nächste wichtige Schritt war, die relative Einsinkung des Reifens abhängig von Reifen- und Bodenkenngrößen zu bestimmen. Auf Grund der

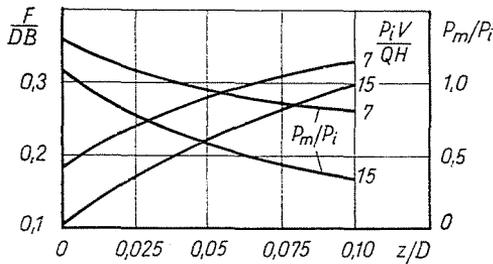


Abb. 5. Berührungsfläche und mittlerer Druck, abhängig von der relativen Einsinkung

Analyse der Einflußgrößen wurde der dimensionslose Zusammenhang in folgender Form aufgeschrieben:

$$\frac{z}{D} = f\left(\frac{p_i V}{Q \cdot H}, \frac{p_m}{k}, S\right) \quad (6)$$

wobei S — der Schlupf des Rades,
 k — Bodenkennzahl, die aus Druck-Stempel-Messungen nach der SAAKJANSchen Formel bearbeitet zu entnehmen ist.

Im Laufe unserer Reifenuntersuchungen wurde gefunden, daß die relative Einsinkung für gezogene Reifen, wo der Schlupf eine untergeordnete Rolle spielt, in folgender Form aufgeschrieben werden kann:

$$\frac{z}{D} = \text{konst} \left(\frac{p_m}{k}\right)^n.$$

Die Meßergebnisse auf Lehmboden sind in Abb. 6 gezeigt. Wie man sieht, hängt die relative Einsinkung des Reifens in geringem Maße auch von dem Belastungsgrad ($p_i V / QH$) ab. Der mehrbelastete Reifen hat eine größere Abplattung und damit eine gleichmäßigere Druckverteilung, infolgedessen eine etwas kleinere relative Einsinkung.

Bei angetriebenen Rädern muß auch die Schlupf-Einsinkung, insbesondere auf leichten Böden, berücksichtigt werden. Die Beobachtungen haben

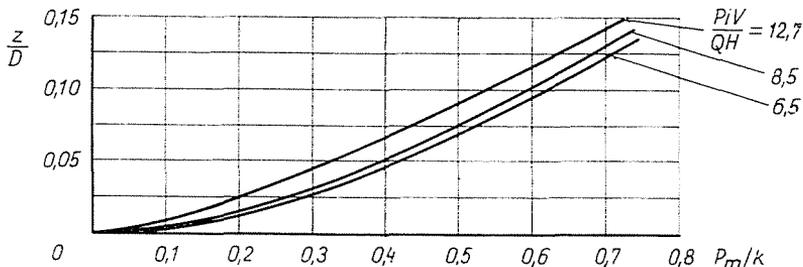


Abb. 6. Relative Einsinkung als Funktion der dimensionslosen Zahl p_m/k

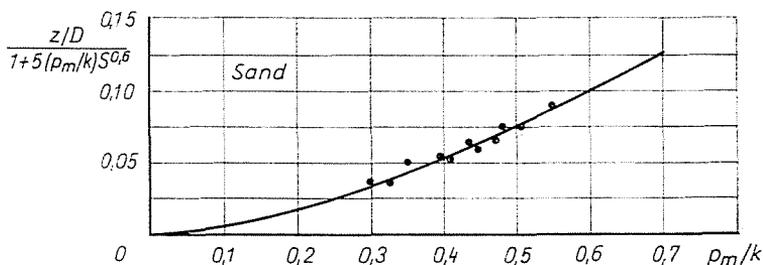


Abb. 7. Die relative Einsinkung des Reifens unter Berücksichtigung des Schlupfes

gezeigt, daß die Schlupf-Einsinkung auch von der in der Spur zurückbleibenden Tragfähigkeit des Bodens (k -Wert) abhängt, daher scheint es zweckmäßig, die allgemeine Einsinkungsformel in folgender Form zu benutzen:

$$\frac{z}{D} = C_1 \left(\frac{P_m}{k} \right)^n \cdot \left[1 + C_2 \frac{P_m}{k} S^m \right] \quad (6a)$$

wobei C_1 und C_2 bestimmte Konstanten sind. Gl. (6a) ist für Sandboden graphisch in Abb. 7 dargestellt. Die vertikale Achse ist dabei um den Schlupf-Einsinkungsanteil reduziert. Schließlich sind noch die Zugfähigkeit und die Verluste (Rollwiderstand) des Reifens abhängig von der relativen Einsinkung oder der Kennzahl p_m/k zu bestimmen. Die Umfangskraft setzt sich aus der Zugkraft und dem Rollwiderstand zusammen. Wenn man diese Kräfte mit dem Adhäsionsgewicht dividiert, ergibt sich die dimensionslose Gleichung

$$\mu = z + q \quad (7)$$

wobei μ — der Kraftschlußbeiwert,
 z — der Triebkraftbeiwert,
 q — der Rollwiderstandsbeiwert ist.

Anhand von Versuchsergebnissen ist Gl. (7) abhängig von der relativen Reifeneinsinkung in Abb. 8 dargestellt. In derselben Abbildung ist auch der Rollwirkungsgrad ($\eta_e = z/\mu$) aufgetragen. Gl. (7) kann ebenso auch abhängig von p_m/k dargestellt werden, da zwischen z/D und p_m/k ein eindeutiger Zusammenhang (Abb. 6) besteht.

Das oben beschriebene Verfahren stellt eine allgemeingültige Lösung der Mechanik »Boden-Fahrzeug« dar. Eine genauere Lösung kann unter Berücksichtigung von weiteren Einflußgrößen erzielt werden.

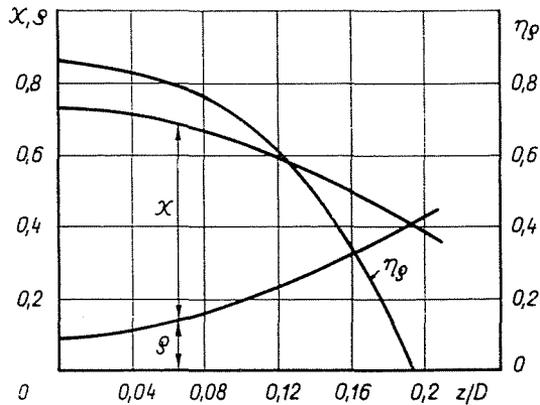


Abb. 8. Triebkraft- und Rollwiderstandsbeiwert, abhängig von der relativen Einsinkung

Weitere Beispiele

Der Verfasser hat auch in früheren Arbeiten [4—6] die Methode der Dimensionsanalyse mit Erfolg benutzt. Dabei wurde ein interessantes Problem aufgeworfen. Die Ähnlichkeitstheorie sagt nämlich aus, daß die Einflußgrößen als Variablen voneinander unabhängig sein müssen.

Man sollte eine allgemeingültige Formel zur Bestimmung der Wärmeübergangszahl und des Luftwiderstandes an berippten Zylindern mit Luftführung (Bekleidung) aufstellen. In gekrümmten Kanälen tritt aber — neben der Hauptströmung — auch eine Querströmung auf und letztere muß bei der Bearbeitung in Betracht gezogen werden. Die Hauptströmung wird in Kanälen mit Rechteckquerschnitt durch den äquivalenten Durchmesser gekennzeichnet, während die Querströmung u. a. von dem Seitenverhältnis des Kanals abhängt. Die Seitenabmessungen bestimmen jedoch den äquivalenten Durchmesser eindeutig, d. h. sie sind keine unabhängige Variablen. In diesem Falle darf aber von diesem Gesetz der Ähnlichkeitstheorie abgesehen werden, da der äquivalente Durchmesser und die Kanal-Seitenabmessungen verschiedene Vorgänge kennzeichnen.

Mit diesen Überlegungen sahen die Ähnlichkeitsgleichungen für eine bestimmte Bekleidung folgendermaßen aus:

$$Nu = 0,136 \cdot \left(\frac{m}{d_e}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{D_m}\right)^{0,3} \cdot Re^{0,75}$$

$$\xi - 1 = 420 \left(\frac{m}{d_e}\right)^{-0,3} \cdot \left(\frac{h}{D_m}\right)^{0,41} \cdot Re^{-0,6}$$

wobei m — die Lückenbreite,
 h — die Rippenhöhe,
 D_m — der mittlere Durchmesser der Rippen,
 d_e — der äquivalente Durchmesser der Kanäle,
 ξ — der Widerstandsbeiwert ist.

Bei Untersuchungen der Zerstäubung und Eindringtiefe von freien Strahlen (z. B. Pflanzenschutz) kann die dimensionslose Darstellung ebenso mit Erfolg benutzt werden. Hierzu wurden die folgenden dimensionslosen Gleichungen abgeleitet und bearbeitet:

für den mittleren Tropfendurchmesser

$$\frac{d_m}{d_c} = C_1 \left(\frac{\rho_b}{\rho_k}\right)^a \cdot We^b \cdot Re^c$$

für die Eindringtiefe des Strahles

$$\frac{S}{d_c} = C_2 \left(\frac{\rho_b}{\rho_k}\right)^a \cdot Ho^b \cdot Re^c$$

wo ρ_b — die Dichte des ausgespritzten Stoffes,
 ρ_k — die Dichte des Mediums,
 d_m — der mittlere Tropfendurchmesser,
 d_c — der Durchmesser der Düsenbohrung,
 S — der vom Strahl zurückgelegte Weg,
 Ho — das Homochron-Kriterium,
 We — die WEBERSche Zahl ist.

Einfache dimensionslose Darstellung

Die einfache dimensionslose Darstellung hat auch in vielen Fällen einen wesentlichen Vorteil gegenüber der einfachen funktionellen Darstellung. Dazu sollen hier einige Beispiele gezeigt werden.

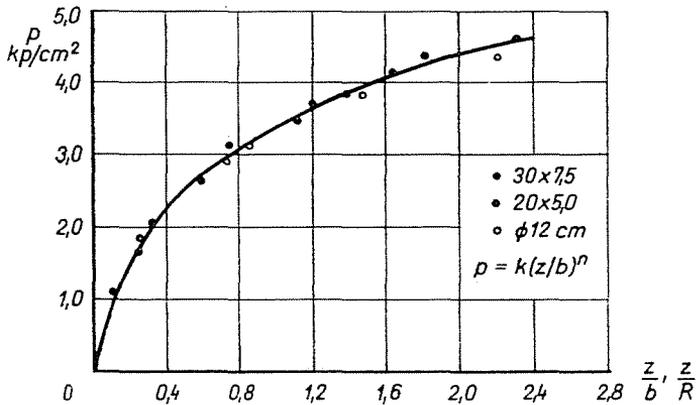


Abb. 9. Druck-Stempel-Diagramme für Lehmboden

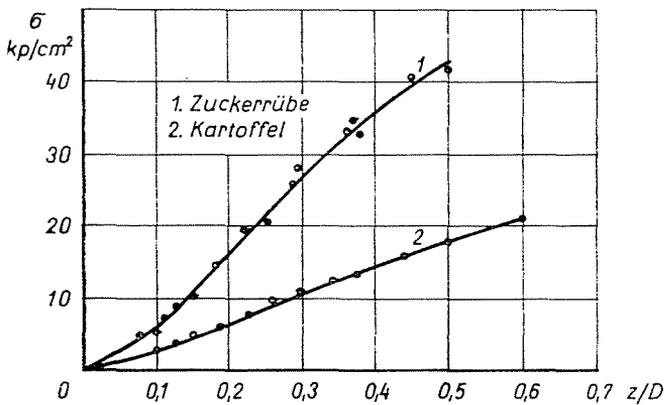


Abb. 10. Druck-Stempel-Diagramme für Zuckerrübe und Kartoffel

Zur Kennzeichnung der Materialeigenschaften (Festigkeit von Böden, Früchten, usw.) nimmt man Druck-Stempel-Diagramme auf. Das Ergebnis hängt aber von dem Stempeldurchmesser ab. Der Einfluß des Durchmessers kann dadurch beseitigt werden, daß man auf der horizontalen Achse die relative Einsinkung des Stempels (auf den Durchmesser bezogen) aufträgt. Solche Darstellung ist in Abb. 9 für Boden und in Abb. 10 für Zuckerrübe und Kartoffel zu sehen. Hier haben wir verschiedene Stempeldurchmesser benutzt, die Meßwerte liegen aber entlang einer Kurve.

Um die großen Getreidesilos festigkeitgerecht zu dimensionieren, haben wir die Zusammendrückbarkeit und das Dauerfließen von verschiedenen Getreiden (Weizen, Mais und Gerste) als Schüttgut untersucht [7]. Dabei wurden die gewöhnlichen Belastungs- und Entlastungskurven mit Dauerfließversuchen kombiniert aufgenommen (Abb. 11). Abhängig von dem Belastungs-

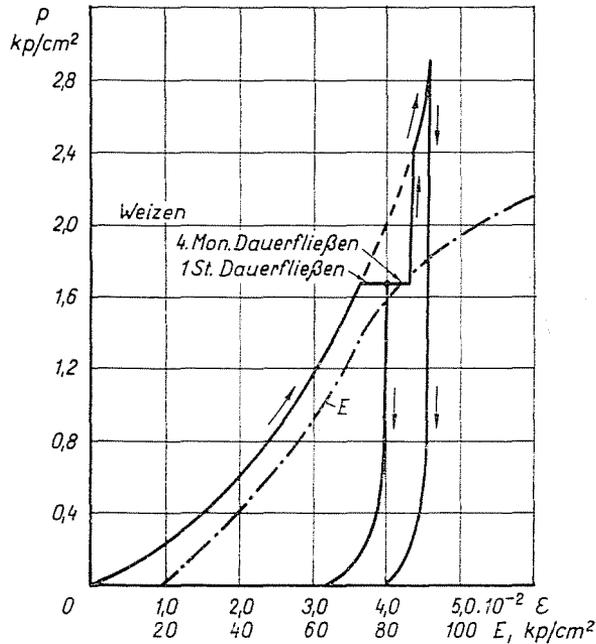


Abb. 11. Belastungs- und Entlastungskurve in Dauerfließversuchen

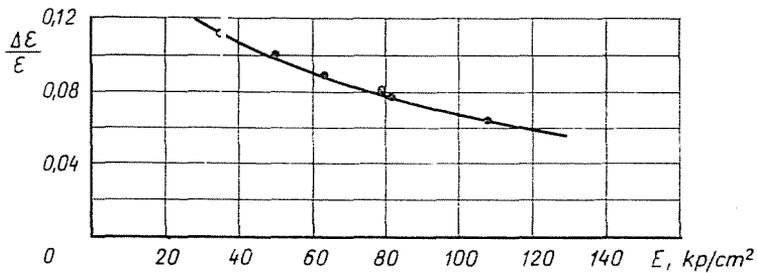


Abb. 12. Das relative Dauerfließen abhängig von dem Elastizitätsmodul für verschiedene Getreide

grad und der Getreideart erhält man z. B. für das einstündige Dauerfließen ganz verschiedene Werte. Wird aber der relative Wert des Dauerfließens abhängig von dem Elastizitätsmodul E aufgetragen (Abb. 12), erhält man eine Kurve unabhängig vom Belastungsgrad und Getreideart. Nimmt man noch die Erkenntnis dazu, daß das einstündige Dauerfließen 55—60% des Maximalwertes ausmacht, kann das Dauerfließen praktisch für beliebige Verhältnisse bestimmt werden.

Zusammenfassung

In der letzten Zeit wurde die Methode der Dimensionsanalyse bei vielen technischen Problemen zur Klärung der allgemeinen Gesetzmäßigkeiten erfolgreich benutzt. Diese Methode bietet auch bei landtechnischen Untersuchungen große Möglichkeiten. Im Beitrag wird die Methode der Dimensionsanalyse kurz beschrieben und an Beispielen aus der Mechanik des Systems »Boden-Fahrzeug« dargestellt. Weitere Beispiele werden kurz besprochen.

Literatur

1. SITKEI, G. und SÖHNE, W.: Beziehungen zwischen den Kenngrößen von AS-Reifen auf fester Fahrbahn. *Grundlagen der Landtechnik* **19**, 29—32 (1969).
2. SITKEI, G.: Das Verhalten von AS-Reifen auf nachgiebigem Boden. *Grundlagen der Landtechnik* **19**, 33—36 (1969).
3. SITKEI, G.: Die Kennzahlen von AS-Reifen und die Probleme der Bereifung. ISTVS-Tagung in Essen, Vol. III. S. 23—43, 1969.
4. SITKEI, G.: Neue Ähnlichkeitsgleichung für die Berechnung der berippten Zylinder von luftgekühlten Motoren. *Schlepper und Landmaschinen*, Nr. 4, 1963 (Moskau).
5. SITKEI, G.: Ähnlichkeitsgleichung für die Berechnung des mittleren Tropfendurchmessers und der Eindringtiefe von Kraftstoffstrahlen. *Acta Technica Acad. Sci. Hung.* **45**, S. 289—296 (1964).
6. SITKEI, G.: Kraftstoffaufbereitung und Verbrennung bei Dieselmotoren. Springer Verlag Berlin, 1964.
7. SITKEI, GY.: Die Zusammendrückbarkeit von landwirtschaftlichen Stoffen. *Járművek és Mezőgazdasági Gépek* **17**, 414—417 (1970).

Dr. György SITKEI, Budapest XI., Bertalan Lajos u. 1, Ungarn