DIE NÄHERUNGSWEISE BESTIMMUNG DER AIRYSCHEN SPANNUNGSFUNKTIONEN DURCH SEMIFINITE APPROXIMATION DER BIHARMONISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

Von

E. SZEREDAI

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 14. Juli, 1969)

Vorgelegt von Prof. Dr. M. FARKAS

1. Einleitung

Dieser Aufsatz erörtert eine Näherungslösung der biharmonischen Differentialgleichung. Die Randbedingungen der $\Delta^2 u = 0$ Gleichung sind für einen rechteckigen Parallelogrammbereich gegeben, und zwar an der Grenze des Bereiches der Funktionswert und der Ausdruck der Ableitung in Richtung der Normalen.

Die Methode, nach der wir die näherungsweise Lösung darstellen möchten, ist wie folgt: Die, durch eine Differentialgleichung bestimmte Funktion mit zwei Veränderlichen betrachten wir als von der einen Veränderlichen stetig abhängig, und die Abhängigkeit von der anderen Veränderlichen als diskret, wodurch die Annäherung der partiellen Differentialgleichung mit einem inhomogenen System von Differentialgleichungen ermöglicht wird. In der Richtung nämlich, in welcher das Modell finitisiert (als diskret betrachtet) wird, ersetzen wir die Ableitungen durch Differenzquotienten, die — wenn die Schrittlänge klein ist — die Ableitungen gut annähern. Diese Methode ist in der Fachliteratur als »Geraden-Methode« bekannt, und wurde bei der Lösung von mehreren ähnlichen Problemen angewendet, besonders von sowjetischen Forschern. MICHLIN [1] schreibt z. B. in einer Arbeit auch die biharmonische Gleichung auf diese Weise zu einem allgemeinen Differentialgleichungssystem um. Er publiziert aber nur das Gleichungssystem, und gibt keine Lösung.

In dieser Arbeit geben wir die Lösung des erhaltenen inhomogenen Differentialgleichungssystems unter Anwendung einer einfachen — zwischen zwei Matrizen vorhandenen — Beziehung.

Und zwar ist die Lösung des homogenen Teils in expliziter Form dargestellt, während wir die Lösung des inhomogenen Teils durch Iteration erhalten.

Um den Verlauf der Behandlung zu vereinheitlichen, wird das Differentialgleichungssystem 4. Ordnung als Matrizendifferentialgleichungssystem erster Ordnung angeschrieben. Die inhomogenen Randbedingungen werden nämlich in dieser Form am einfachsten befriedigt.

In diesem Aufsatz ist jede angewandte Hypermatrix explizit gegeben, Damit soll auch die Anwendbarkeit der Methode für das numerische Rechnen dokumentiert werden.

Schließlich möchten wir bemerken, daß wir uns bei der Anwendung der Hypermatrizen auf die grundlegenden Ergebnisse der Forschungen von EGERVÁRY stützten.

2. Umschreibung der biharmonischen Differentialgleichung zur gewöhnlichen Differentialgleichung

Es soll die Näherungslösung der folgenden biharmonischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

in einem

$$-b \leqq x \leqq b \qquad -a \leqq y \leqq a$$

rechteckigen Parallelogrammbereich bei folgenden Randbedingungen gesucht werden:

$$\begin{aligned} u \quad (b, y) &= \Psi_1(y) & u'_x \quad (b, y) &= \psi_1(y) \\ u(-b, y) &= \Psi_2(y) & u'_x(-b, y) &= \psi_2(y) \\ u \quad (x, a) &= \Phi_1(x) & u'_y \quad (x, a) &= \varphi_1(x) \\ u(x, -a) &= \Phi_2(x) & u'(x, -a) &= \varphi_2(x) . \end{aligned}$$

Es seien die hier gegebenen Funktionen $\Psi_i, \Phi_i, \psi_i, \varphi_i$ nach den eigenen Veränderlichen mindestens dreimal differenzierbar.

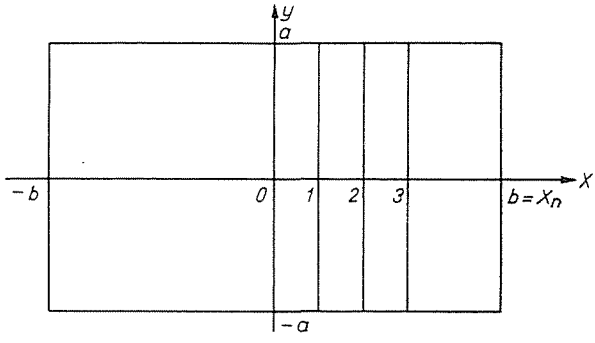

Abb. 1

Wie schon angedeutet, beruht die näherungsweise Lösung darauf, daß die partielle Differentialgleichung in der einen Richtung (x — Richtung) des Bereichs als diskret, in der anderen, auf diese senkrechten Richtung y als stetig betrachtet wird. In x — Richtung, in welcher wir das Modell als diskret betrachten, werden die Ableitungen durch die Differenzquotienten ersetzt. Teilen wir das Intervall $-b \leqq x \leqq b$ in $2n$ gleiche Teile und bezeichnen wir diese Strecke mit h:

$$x_i - x_{i-1} = h\,; \qquad nh = b\,.$$

Es sei bei der i-ten Teilung ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (n-3)$) die jetzt nur noch von y abhängige Funktion

$$u_i = u(x_i, y) = u_i(y)\,.$$

So erhält man für die partiellen Ableitungen folgende annähernde Ausdrücke

$$\frac{\partial^4 u(x_i, y)}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u_i}{\partial x^4} \approx \frac{1}{h^4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2})$$

$$\frac{\partial^4 u(x_i, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right) \approx \frac{1}{h^2}\frac{d^2}{dy^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})$$

$$\frac{\partial^4 u(x_i, y)}{\partial y^4} = \frac{d^4 u_i}{dy^4}$$

wo es nachweisbar ist, daß der Fehler der Approximation in der Größenordnung mit dem Quadrat des Schrittabstandes h übereinstimmt [2].

Wird die Ableitung nach y mit einem Akzent bezeichnet, lautet die Differentialgleichung für die i-te Teilungslinie

$$u_i^{IV} + \frac{2}{h^2}(u''_{i-1} - 2u''_i + u''_{i+1}) + \frac{1}{h^4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}) = 0,$$

wo i nicht die Werte $-n+1$; $-n+2$; $n-1$; $n-2$ annehmen darf. In diesem Falle kommen nämlich auch die Indizes $-n-1$; $-n$; n; $n+1$ vor, und zu diesen gehören entweder schon vorgeschriebene oder gar keine Funktionswerte. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen läßt sich das Problem jedoch durch Extrapolation lösen.

Betrachten wir nämlich im einzelnen, wie diese Differentialgleichungen aufzuschreiben sind.

Den Randbedingungen gemäß sind die Funktionswerte

$$u_n = u(x_n, y) = u(b, y) = \Psi_1(y)$$

$$u_{-n} = u(x_{-n}, y) = u(-b, y) = \Psi_2(y)$$

und die ersten und zweiten Ableitungen nach y

$$u'_n = \frac{\partial u(x_n, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(b, y)}{\partial y} = \frac{d\Psi_1}{dy}$$

$$u'_{-n} = \frac{\partial u(x_{-n}, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(-b, y)}{\partial y} = \frac{d\Psi_2}{dy}$$

$$u''_n = \Psi''_1 \qquad u''_{-n} = \Psi''_2 .$$

Aus der ersten partiellen Ableitung nach x können die Funktionswerte u_{n+1} und u_{-n-1} mit Hilfe der die Ableitung ersetzenden Differenzquotienten extrapoliert werden, wobei die Fehler der Approximation der Größenordnung h^2 sind:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u(x_n, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(b, y)}{\partial x} = \psi_1(y) \approx \frac{1}{2h}(u_{n+1} - u_{n-1})$$

$$\frac{\partial u_{-n}}{\partial x} = \frac{\partial u(x_{-n}, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(-b, y)}{\partial x} = \psi_2(y) \approx \frac{1}{2h}(u_{-n+1} - u_{-n-1})$$

und aus dieser sind

$$u_{n+1} = 2h\,\psi_1(y) + u_{n-1}$$

$$u_{-n-1} = 2h\psi_2(y) + u_{-n+1} .$$

Unter Anwendung dieser Gleichungen lautet die Differentialgleichung für $i = -n + 1$

$$u^{IV}_{-n+1} + \frac{2}{h^2}(\Psi''_2 - 2u''_{-n-1} + u''_{-n+2}) + \frac{1}{h^4}(2h\,\psi_2 - 4\Psi_2 + 7u_{-n+1} - 4u_{-n+2} + u_{-n+3}) = 0 .$$

Geordnet:

$$u^{IV}_{-n+1} + \frac{2}{h^2}(-2u''_{-n+1} + u''_{-n+2}) + \frac{1}{h^4}(7u_{-n+1} - 4u_{-n+2} + u_{-n+3}) = \frac{4}{h^4}\Psi_2 - \frac{2}{h^3}\psi_2 - \frac{2}{h^2}\Psi''_2 .$$

Auf ähnliche Weise erhält man die Differentialgleichung für die $-n + 2$-te Teilungslinie

$$u^{IV}_{-n+2} + \frac{2}{h^2}(u''_{-n+1} - 2u''_{-n+2} + u''_{-n+3}) + \frac{1}{h^4}(-4u_{-n+1} + 6u_{-n+2} - 4u_{-n+3} + u_{-n+4}) = -\frac{1}{h^4}\Psi_2 .$$

In derselben Weise werden die Differentialgleichungen für die Teilungslinien $n-2$ und $n-1$ angeschrieben:

$$u_{n-2}^{IV} + \frac{2}{h^2}(u''_{n-3} - 2u''_{n-2} + u''_{n-1}) + \frac{1}{h^4}(u_{n-4} - 4u_{n-3} + 6u_{n-2} - 4u_{n-1}) = -\frac{1}{h^4}\Psi_1$$

$$u_{n-1}^{IV} + \frac{2}{h^2}(u''_{n-2} - 2u''_{n-1}) + \frac{1}{h^4}(u_{n-3} - 4u_{n-2} + 7u_{n-1}) = \frac{4}{h^4}\Psi_1 - \frac{2}{h^3}\psi_1 - \frac{2}{h^2}\Psi''_1.$$

Werden folgende Vektoren und Matrizen eingeführt:

$$\mathbf{u}_{2n-1} = \begin{bmatrix} u_{-n+1} \\ u_{-n+2} \\ \vdots \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_{2n-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{2n-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{2n-1}(y) = \begin{bmatrix} \frac{4}{h^4}\Psi_2 - \frac{2}{h^3}\psi_2 - \frac{2}{h^2}\Psi_2'' \\ -\frac{1}{h^4}\Psi_2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -\frac{1}{h^4}\Psi_1 \\ \frac{4}{h^4}\Psi_1 - \frac{2}{h^3}\psi_1 - \frac{2}{h^2}\Psi_1'' \end{bmatrix}$$

äßt sich das Differentialgleichungssystem in

$$\mathbf{u}^{IV} + \frac{2}{h^2}\mathbf{C}_{2n-1}\mathbf{u}'' + \frac{1}{h^4}\mathbf{A}_{2n-1}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{2n-1}(y)$$

Matrizenform schreiben.

Es soll bemerkt werden, daß im Falle, wenn die biharmonische Differentialgleichung inhomogen ist,

$$\Delta^2 u(x, y) = l(x, y)$$

auch diese auf dasselbe System umgeschrieben werden kann, nur wird zur rechten Seite ein weiterer Vektor

$$\mathbf{l}_{2n-1}(y) = \begin{bmatrix} l(x_{-n+1}, y) \\ l(x_{-n+2}, y) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l(x_0, y) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l(x_{n-2}, y) \\ l(x_{n-1}, y) \end{bmatrix}$$

addiert.

3. Die Lösung der Matrizendifferentialgleichung

Die Lösung der Differentialgleichung beruht auf folgender Beobachtung: das Quadrat der Matrix $\mathbf{C}_{2n-1}$ stimmt — mit der Ausnahme der Elemente links oben und rechts unten — mit $\mathbf{A}_{2n-1}$ überein.

Es ist nämlich

$$C_{2n-1}^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

das heißt

$$\mathbf{A}_{2n-1} = \mathbf{C}_{2n-1}^2 + \mathbf{L}_{2n-1}$$

wo

$$\mathbf{L}_{2n-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Differentialgleichung läßt sich also folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{u}^{IV} + \frac{2}{h^2}\,\mathbf{C}_{2n-1}\,\mathbf{u}'' + \frac{1}{h^4}\,\mathbf{C}_{2n-1}^2\,\mathbf{u} = \mathbf{f}(y) - \frac{1}{h^4}\,\mathbf{L}_{2n-1}\,\mathbf{u}.$$

Wenn die rechte Seite durch 0 ersetzt wird, ist in solcher Anordnung die Lösung des homogenen Teils sehr einfach.

Die Matrix wird nämlich durch eine Ähnlichkeitstransformation diagonalisiert, und dadurch zerfällt das durch die Matrizengleichung repräsentierte System von Differentialgleichungen in voneinander unabhängige Differentialgleichungen.

Obwohl dieser Weg zur Lösung naheliegend und ansprechend ist, wollen wir ihn doch nicht wählen, weil dadurch die Befriedigung der Randbedingungen auf Schwierigkeiten stößt. Um die Randbedingungen zu befriedigen, schreiben wir also diese Differentialgleichung vierter Ordnung zu einem System

erster Ordnung um. Bezeichnen wir die unbekannte Funktion mit $\mathbf{u}_0$ und die Ableitungen der Reihe nach mit $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dy} = \frac{d\mathbf{u}_0}{dy} = \mathbf{u}_1$$
$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dy^2} = \frac{d\mathbf{u}_1}{dy} = \mathbf{u}_2$$
$$\frac{d^3\mathbf{u}}{dy^3} = \frac{d\mathbf{u}_2}{dy} = \mathbf{u}_3 .$$

Damit lautet die Differentialgleichung:

$$\frac{d\mathbf{u}_3}{dy} + \frac{2}{h^2}\,\mathbf{C}_{2n-2}\,\mathbf{u}_2 + \frac{1}{h^4}\,\mathbf{C}_{2n-1}^2\,\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_{2n-1}(y) - \frac{1}{h^4}\,\mathbf{L}_{2n-1}\,\mathbf{u}_0 ,$$

und somit das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{u}_0' = \mathbf{u}_1$$
$$\mathbf{u}_1' = \mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{u}_2' = \mathbf{u}_3$$
$$\mathbf{u}_3' = -\frac{2}{h^2}\,\mathbf{C}_{2n-1}\,\mathbf{u}_2 - \frac{1}{h^4}\,\mathbf{C}_{2n-1}^2\,\mathbf{u}_0 + \mathbf{f}_{2n-1}(y) - \frac{1}{h^4}\,\mathbf{L}_{2n-1}\,\mathbf{u}_0 .$$

Unter Anwendung von Hypermatrizen erhält man folgende Form:

$$\frac{d}{dy}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_0\\ \mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{E} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{E}\\ -\frac{1}{h^4}\,\mathbf{C}_{2n-1}^2 & 0 & -\frac{2}{h^2}\,\mathbf{C}_{2n-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_0\\ \mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \mathbf{f}_{2n-1}(y) - \frac{1}{h^4}\,\mathbf{L}_{2n-1}\,\mathbf{u}_0\end{bmatrix} .$$

Es genügt natürlich, aus der Lösung $\mathbf{u}_0$ zu bestimmen.

Wenn die die allgemeinen Anfangsbedingungen befriedigende Lösung des in der obigen Anordnung bereits homogenen Differentialgleichungssystems berechnet ist, soll die homogene Anfangsbedingungen befriedigende partikuläre Lösung des inhomogenen Teils erstellt werden. Diese Lösung erhält man durch

die Variation der Konstanten. Im vorliegenden Falle wird dadurch Schwierigkeit verursacht, daß die unbekannte Funktion $\mathbf{u}_0$ auf der rechten Seite vorkommt. Wird jedoch statt $\mathbf{u}_0$ die Lösung des homogenen Teils geschrieben, so kommen auf der rechten Seite nur bekannte Funktionen vor. So läßt sich eine annähernde Lösung ermitteln; diese auf der rechten Seite anstatt $\mathbf{u}_0$ eingesetzt, erhält man eine bessere näherungsweise Lösung usw. Diese Iteration ergibt eine konvergente Reihe, welche im Limes zur exakten Lösung führt [3].

I. Die Lösung des homogenen Teils

Die unmittelbare Aufgabe ist also die Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\frac{d}{dy}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_0\\ \mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{E} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{E}\\ -\frac{1}{h^4}\mathbf{C}^2_{2n-1} & 0 & -\frac{2}{h^2}\mathbf{C}_{2n-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_0\\ \mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\end{bmatrix}.$$

Die Lösung soll folgenden Bedingungen befriedigen:

$$\mathbf{u}_0(a) = \begin{bmatrix}\Phi_1(x_{-n+1})\\ \Phi_1(x_{-n+2})\\ \vdots\\ \Phi_1(x_0)\\ \vdots\\ \Phi_1(x_{n-2})\\ \Phi_1(x_{n-1})\end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_1(a) = \begin{bmatrix}\varphi_1(x_{-n+1})\\ \varphi_1(x_{-n+2})\\ \vdots\\ \varphi_1(x_0)\\ \vdots\\ \varphi_1(x_{n-2})\\ \varphi_1(x_{n-1})\end{bmatrix}$$

$$u_0(-a) = \begin{bmatrix}\Phi_2(x_{-n+1})\\ \Phi_2(x_{-n+2})\\ \vdots\\ \Phi_2(x_0)\\ \vdots\\ \Phi_2(x_{n-2})\\ \Phi_2(x_{n-1})\end{bmatrix} \qquad u_1(-a) = \begin{bmatrix}\varphi_2(x_{-n+1})\\ \varphi_2(x_{-n+2})\\ \vdots\\ \varphi_2(x_0)\\ \vdots\\ \varphi_2(x_{n-2})\\ \varphi_2(x_{n-1})\end{bmatrix}.$$

Diese Bedingungen ergeben sich aus der Randbedingungen.

Durch eine Ähnlichkeitstransformation [4] diagonalisieren wir die Matrix $\mathbf{C}_{2n-1}$

$$-\mathbf{C}_{2n-1} = \mathbf{M} \left\langle 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \quad 4 \sin^2 \frac{2\pi}{2n} \quad \ldots \quad 4 \sin^2 \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right\rangle \mathbf{M},$$

wobei die Transformationsmatrix lautet:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{2n} & \sin \frac{2\pi}{2n} & \ldots & \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} \\ \sin \frac{2\pi}{2n} & \sin \frac{4\pi}{2n} & \ldots & \sin \frac{2(2n-1)\pi}{2n} \\ \vdots & & & \\ \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} & \sin \frac{2(2n-1)\pi}{2n} & \ldots & \sin \frac{(2n-1)^2\pi}{2n} \end{bmatrix}.$$

Die Tatsache der Diagonalisierung ermöglicht die Lösung dieses homogenen Matrizendifferentialgleichungssystems.

Die charakteristische Gleichung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems hat die Form

$$\varrho^4 + \frac{2}{h^2} c \varrho^2 + \frac{1}{h^4} c^2 = \left(\varrho^2 + \frac{1}{h^2} c \right)^2 = 0,$$

wo c eine bekannte und ϱ die unbekannte Konstante ist. Hieraus ergeben sich für ϱ zwei unterschiedliche zweifache Wurzeln

$$\varrho = \pm \frac{1}{h} \sqrt{-c}.$$

Die allgemeine Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist die lineare Komposition der folgenden voneinander linear unabhängigen vier Funktionen:

$$\operatorname{ch} \frac{y}{h} \sqrt{-c}; \qquad y \operatorname{ch} \frac{y}{h} \sqrt{-c}; \qquad \operatorname{sh} \frac{y}{h} \sqrt{-c}; \qquad y \operatorname{sh} \frac{y}{h} \sqrt{-c}.$$

Die allgemeine Lösung des Matrizendifferentialgleichungssystems ergibt sich auf dem Grund der Analogie, indem wir die Konstanten c durch die Matrix $\mathbf{C}_{2n-1}$ ersetzen und die folgende, sogenannte Wronskische Matrix bilden:

$$\mathbf{W}(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^*(y) \\ \frac{d}{dy}\mathbf{w}^*(y) \\ \frac{d^2}{dy^2}\mathbf{w}^*(y) \\ \frac{d^3}{dy^3}\mathbf{w}^*(y) \end{bmatrix}$$

wobei die erste Zeile lautet:

$$\mathbf{w}^*(y) = \left[\operatorname{ch}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}} \quad y\operatorname{ch}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}} \quad \operatorname{sh}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}} \right.$$
$$\left. y\operatorname{sh}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}} \right].$$

Diese ist die Resolventenmatrix des zu lösenden Differentialgleichungssystems.

Zur Vereinfachung der Rechentechnik werden einige neue Bezeichnungen eingeführt.

Die Diagonalform der Matrix $\operatorname{ch}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}}$ lautet:

$$\operatorname{ch}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}} = \mathbf{M}\left\langle \operatorname{ch}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{\pi}{2n}\right) \quad \operatorname{ch}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{2\pi}{2n}\right) \quad \dots \right.$$
$$\left. \dots \quad \operatorname{ch}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right\rangle \mathbf{M}.$$

Bezeichnen wir die Diagonalmatrix auf der rechten Seite durch $\mathbf{G}(y)$:

$$\mathbf{G}(y) = \left\langle \operatorname{ch}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{\pi}{2n}\right) \quad \operatorname{ch}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{2\pi}{2n}\right) \quad \dots \right.$$
$$\left. \dots \quad \operatorname{ch}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right\rangle.$$

Auf ähnliche Weise läßt sich die Matrix $\operatorname{sh}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}}$ aufschreiben:

$$\operatorname{sh}\frac{y}{h}\sqrt{-C_{2n-1}} = \mathbf{M}\mathbf{H}(y)\,\mathbf{M},$$

mit

$$\mathbf{H}(y) = \langle \operatorname{sh}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{\pi}{2n}\right) \quad \operatorname{sh}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{2\pi}{2n}\right) \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \operatorname{sh}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\rangle .$$

Die Ableitung der Matrix $\operatorname{ch}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}}$ nach y ist:

$$\frac{d}{dy}\operatorname{ch}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}} = \mathbf{M} < \frac{2}{h}\sin\frac{\pi}{2n}\operatorname{sh}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{\pi}{2n}\right) \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \frac{2}{h}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}\operatorname{sh}\left(\frac{2y}{h}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) > \mathbf{M}.$$

Wird die aus Konstanten bestehende Diagonalmatrix $\mathbf{N}$ eingeführt,

$$\mathbf{N} = \langle \frac{2}{h}\sin\frac{\pi}{2n} \quad \frac{2}{h}\sin\frac{2\pi}{2n} \quad \ldots \quad \frac{2}{h}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} \rangle$$

so läßt sich die vorstehende Ableitung in folgender einfacher Form schreiben:

$$\frac{d}{dy}\operatorname{ch}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}} = \mathbf{MNH}(y)\,\mathbf{M}$$

und in gleicher Weise

$$\frac{d}{dy}\operatorname{sh}\frac{y}{h}\sqrt{-\mathbf{C}_{2n-1}} = \mathbf{MNG}(y)\,\mathbf{M}.$$

Nach Berechnung der Derivierten höheren Grades schreibt man die Wronskische Matrix in folgender Form:

$$\mathbf{W} = \langle \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M} \rangle \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{G}y & \mathbf{H} & \mathbf{H}y \\ \mathbf{NH} & \mathbf{NH}y + \mathbf{G} & \mathbf{NG} & \mathbf{NG}y + \mathbf{H} \\ \mathbf{N}^2\mathbf{G} & \mathbf{N}^2\mathbf{G}y + 2\mathbf{NH} & \mathbf{N}^2\mathbf{H} & \mathbf{N}^2\mathbf{H}y + 2\mathbf{NG} \\ \mathbf{N}^3\mathbf{H} & \mathbf{N}^3\mathbf{H}y + 3\mathbf{N}^2\mathbf{G} & \mathbf{N}^3\mathbf{G} & \mathbf{N}^3\mathbf{G}y + 3\mathbf{N}^2\mathbf{H} \end{bmatrix} \langle \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M} \rangle .$$

Nach Berechnung der Resolventenmatrix folgt die Befriedigung der Randbedingungen: die Werte für $\mathbf{u}_0$ und $\mathbf{u}_1$ sind an den Stellen $+a$ und $-a$ gegeben. Es sei

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0(a) \\ \mathbf{u}_0(-a) \\ \mathbf{u}_1(a) \\ \mathbf{u}_1(-a) \end{bmatrix}.$$

Die Resolventenmatrix befriedigt die Randbedingungen, wenn die Wronskische Matrix von der rechten Seite mit dem Spaltenvektor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^* \mathbf{W}(a) \\ \mathbf{E}_1^* \mathbf{W}(-a) \\ \mathbf{E}_2^* \mathbf{W}(a) \\ \mathbf{E}_2^* \mathbf{W}(-a) \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{U}_0$$

multipliziert wird, wo

$$\mathbf{E}_1^* = [\mathbf{E}\ 0\ 0\ 0] \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_2^* = [0\ \mathbf{E}\ 0\ 0]$$

sind.

Wenn nämlich $+a$ bzw. $-a$ in $\mathbf{W}$ eingesetzt, und von der linken Seite mit $\mathbf{E}_1^*$ bzw. $\mathbf{E}_2^*$ multipliziert wird, ist unmittelbar zu ersehen, daß die angeschriebene Lösung die Randbedingungen befriedigt [5].

Führen wir die Bezeichnung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^* \mathbf{W}(a) \\ \mathbf{E}_1^* \mathbf{W}(-a) \\ \mathbf{E}_2^* \mathbf{W}(a) \\ \mathbf{E}_2^* \mathbf{W}(-a) \end{bmatrix} = \mathbf{X}$$

ein, somit läßt sich der praktisch interessierende Vektor $\mathbf{u}_0$ wie folgt, aufschreiben:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{E}_1^* \mathbf{W}(y) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{U}_0.$$

Wir möchten wiederholt bemerken, daß es — um den homogenen Teil der Matrizendifferentialgleichung zu lösen — nicht unbedingt erforderlich ist, die Differentialgleichung zu einem System umzuschreiben. Die Lösung ist auch mit Hilfe einfacherer Mittel zu erreichen. Bei der Lösung des inhomogenen Teils werden aber die Randbedingungen am einfachsten so befriedigt, wenn statt einer Differentialgleichung mit einem Differentialgleichungssystem gerechnet wird.

So gingen wir wegen der einheitlichen Erörterung schon bei der Lösung des homogenen Teils von der Gleichung vierter Ordnung auf ein System erster Ordnung über.

Zur vollen Lösung des homogenen Teils, werden die Matrix $\mathbf{X}$ und deren Reziproke in expliziter Form angegeben.

Bei der Aufschreibung werden die Beziehungen

$$\mathbf{G}(-a) = \mathbf{G}(a) \quad \text{und} \quad \mathbf{H}(-a) = -\mathbf{H}(a)$$

und bei der Berechnung der Reziproken

$$\mathbf{G}^2(a) - \mathbf{H}^2(a) = \mathbf{E}$$

benutzt.

Weil die Hypermatrix aus — hinsichtlich der Multiplikation — austauschbaren diagonalen Blöcken besteht, kann $\mathbf{X}^{-1}$ in Analogie zu den Reziproken von gewöhnlichen Matrizen gebildet werden. Unter den unten vorkommenden Matrizen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ sind $\mathbf{G}(a)$ und $\mathbf{H}(a)$ zu verstehen.

$$\mathbf{X} = \langle \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M} \rangle \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \mathbf{G} & a\mathbf{G} & \mathbf{H} & a\mathbf{H} \\ \mathbf{G} & -a\mathbf{G} & -\mathbf{H} & a\mathbf{H} \\ \mathbf{NH} & \mathbf{G}+a\mathbf{NH} & \mathbf{NG} & \mathbf{H}+a\mathbf{NG} \\ -\mathbf{NH} & \mathbf{G}+a\mathbf{NH} & \mathbf{NG} & -\mathbf{H}+a\mathbf{NG} \end{vmatrix} \langle \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M} \rangle ;$$

$$\mathbf{X}^{-1} = \langle \mathbf{M}\ \ \mathbf{M}\ \ \mathbf{M}\ \ \mathbf{M} \rangle \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -(\mathbf{GH}^2+a\mathbf{NH}^3-a^2\mathbf{N}^2\mathbf{G}) & a^2\mathbf{N}^2\mathbf{G}-\mathbf{GH}^2-a\mathbf{NH}^3 & a\mathbf{GH}^2-a^2\mathbf{NH} & a^2\mathbf{NH}-a\mathbf{GH}^2 \\ \mathbf{NG}^2\mathbf{H}+a\mathbf{N}^2\mathbf{G} & -(\mathbf{NG}^2\mathbf{H}+a\mathbf{N}^2\mathbf{G}) & -(\mathbf{GH}^2+a\mathbf{NH}) & -(\mathbf{GH}^2+a\mathbf{NH}) \\ -(\mathbf{G}^2\mathbf{H}+a\mathbf{NG}^3+a^2\mathbf{N}^2\mathbf{H}) & a^2\mathbf{N}^2\mathbf{H}+\mathbf{G}^2\mathbf{H}+a\mathbf{NG}^3 & a\mathbf{G}^2\mathbf{H}+a^2\mathbf{NG} & a\mathbf{G}^2\mathbf{H}+a^2\mathbf{NG} \\ \mathbf{NGH}^2-a\mathbf{N}^2\mathbf{H} & \mathbf{NGH}^2-a\mathbf{N}^2\mathbf{H} & a\mathbf{NG}-\mathbf{G}^2\mathbf{H} & \mathbf{G}^2\mathbf{H}-a\mathbf{NG} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left\langle \frac{1}{2}(a^2\mathbf{N}^2-\mathbf{G}^2\mathbf{H}^2)^{-1} \quad \frac{1}{2}(a^2\mathbf{N}^2-\mathbf{G}^2\mathbf{H}^2)^{-1} \quad \frac{1}{2}(a^2\mathbf{N}^2-\mathbf{G}^2\mathbf{H}^2)^{-1} \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}(a^2\mathbf{N}^2-\mathbf{G}^2\mathbf{H}^2)^{-1} \right\rangle \ \langle \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M}\ \mathbf{M} \rangle .$$

Es ist einfach zu beweisen, daß die Reziprokmatrix auch dann einen Sinn hat, wenn die Einteilung über alle Grenzen verfeinert wird.

Zum Beispiel sind die Elemente der Diagonalmatrix in der k-ten Reihe und Spalte unter Berücksichtigung von $b = nh$:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{2a}{h}\sin\frac{k\pi}{2n}\right) = \operatorname{ch}\left(2n\frac{a}{b}\sin\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Und wenn n über alle Grenzen wächst, ist das Argument der cosinus hyperbolicus Funktion:

$$\frac{a\sin\dfrac{k\pi}{2n}}{b\dfrac{1}{2n}} \to k\pi\frac{a}{b}.$$

Ein ähnliches Ergebnis erhält man bei den Elementen der Matrizen $\mathbf{H}(a)$ und $\mathbf{N}$.

II. Die Lösung des inhomogenen Teils

Wir suchen eine partikuläre Lösung des inhomogenen Teils, welche die homogenen allgemeinen Anfangsbedingungen befriedigt, das heißt, wo die Werte der Vektoren $\mathbf{u}_0$ und $\mathbf{u}_1$ an den Stellen $x = +a$ und $x = -a$ gleich 0 sind. Es ist auch zu beachten, daß auf der rechten Seite die unbekannte Funktion $\mathbf{u}_0$ vorkommt. Ersetzen wir $\mathbf{u}_0$ durch den Vektor $\mathbf{u}_0$ der Lösung des homogenen Teils, der weiterhin mit $\mathbf{u}_h$ bezeichnet wird. So ist auf der rechten Seite jede Funktion bekannt, und die gewünschte partikuläre Lösung läßt sich in folgender expliziter Form schreiben [3]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{W}(y)\,\mathbf{X}^{-1}\mathbf{z}.$$

Die Matrizen $\mathbf{W}(y)$ und $\mathbf{X}$ sind aus der Lösung schon bekannt, und $\mathbf{z}$ bedeutet folgenden Spaltenvektor:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^*\,\mathbf{W}(a)\int_a^y \mathbf{W}^{-1}(\eta)\,\mathbf{g}(\eta)\,d\eta \\ \mathbf{E}_1^*\,\mathbf{W}(-a)\int_{-a}^y \mathbf{W}^{-1}(\eta)\,\mathbf{g}(\eta)\,d\eta \\ \mathbf{E}_2^*\,\mathbf{W}(a)\int_a^y \mathbf{W}^{-1}(\eta)\,\mathbf{g}(\eta)\,d\eta \\ \mathbf{E}_2^*\,\mathbf{W}(-a)\int_{-a}^y \mathbf{W}^{-1}(\eta)\,\mathbf{g}(\eta)\,d\eta \end{bmatrix}.$$

In dieser Formel wird durch $\mathbf{g}(y)$ der Spaltenvektor der rechten Seite der Differentialgleichung bezeichnet:

$$\mathbf{g}(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{f}_{2n-1}(y) - \dfrac{1}{h^4}\mathbf{L}_{2n-1}\mathbf{u}_h \end{bmatrix}.$$

Damit ist eine Näherungslösung der Differentialgleichung explizit dargestellt. Die folgende Näherungslösung erhält man, indem im Spaltenvektor $\mathbf{g}(y)\,\mathbf{u}_h$ durch $\mathbf{v}_0$ ersetzt, und das Verfahren noch einmal wiederholt wird, usw. Von der erhaltenen Iterationsreihe läßt sich nachweisen, daß sie konvergent ist und im Grenzwert die exakte Lösung liefert [3].

Schließlich soll der Vollständigkeit halber der Ausdruck von $\mathbf{W}^{-1}$ angegeben werden:

$$\mathbf{W}^{-1} = \langle \mathbf{M} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{M} \rangle \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{N}^4(2\mathbf{G} - \mathbf{NH}y) & \mathbf{N}^3(\mathbf{NG}y - 3\mathbf{H}) & \mathbf{N}^3\mathbf{H}y & \mathbf{N}(\mathbf{H} - \mathbf{NG}y) \\ \mathbf{N}^5\mathbf{H} & -\mathbf{N}^4\mathbf{G} & -\mathbf{N}^3\mathbf{H} & \mathbf{N}^2\mathbf{G} \\ \mathbf{N}^4(\mathbf{NG}y - 2\mathbf{H}) & \mathbf{N}^3(3\mathbf{G} - \mathbf{NH}y) & -\mathbf{N}^3\mathbf{G}y & \mathbf{N}(\mathbf{NH}y - \mathbf{G}) \\ -\mathbf{N}^5\mathbf{G} & \mathbf{N}^4\mathbf{H} & \mathbf{N}^3\mathbf{G} & -\mathbf{N}^2\mathbf{H} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left\langle \frac{1}{2}\mathbf{N}^{-4} \quad \frac{1}{2}\mathbf{N}^{-4} \quad \frac{1}{2}\mathbf{N}^{-4} \quad \frac{1}{2}\mathbf{N}^{-4} \right\rangle \langle \mathbf{M} \; \mathbf{M} \; \mathbf{M} \; \mathbf{M} \rangle .$$

4. Bemerkungen

Bei der praktischen Anwendung des hier vorgeführten Verfahrens ist folgendes zu beachten:

1. Die Lösung des homogenen Teils ist wegen der spektralen Zerlegung der vorkommenden Matrizen $\mathbf{C}_{2n-1}$ ganz einfach und explizit darstellbar.

2. Bei der Lösung des inhomogenen Teils ist die Matrix $\mathbf{W}^{-1}$ relativ einfach berechenbar, und die hier vorkommenden Determinanten sind konstant, was daraus folgt, daß der Koeffizient von $\mathbf{u}'''$ in der Matrizendifferentialgleichung gleich 0 ist. So sind für die Berechnung der bei der Variation der Konstanten vorkommende Integrale im wesentlichen nur die auf der rechten Seite vorkommende Funktionen maßgebend.

3. Bei dem Iterationsverfahren kommt die Näherungsfunktion lediglich an zwei Stellen vor, und daher ist zu hoffen, daß man nach ein bzw. zwei Iterationsschritten eine praktisch befriedigende Lösung erhält.

Die hier vorgeführte Methode dient zur Lösung homogener und inhomogener Differentialgleichungen in einem rechteckigen Bereich bei Randbedingungen, die an den Grenzen des Bereiches und in Richtung von dessen Normalen mindestens dreimal ableitbare Funktionen sind.

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird eine Näherungslösung der biharmonischen Differentialgleichung mit vorgeschriebenen Randbedingungen an den Grenzen eines rechteckigen Parallelogrammbereichs angegeben. Die Methode stellt eine Anwendung der sogenannten Geradenmethode dar. Die zu lösende partielle Differentialgleichung wird durch ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem ersetzt und für dessen Lösung wird die Matrizenrechnung angewandt.

Literatur

1. Michlin, S. G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik. Berlin 1962.
2. Panov, D. J.: Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzverfahren. Berlin 1955.
3. Bajcsay, P.: Anwendung der Matrizenrechnung zur Untersuchung von Systemen allgemeiner, expliziter, gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Periodica Polytechnica, Maschinen- und Bauwesen. 4, (1960).
4. Zurmühl, R.: Matrizen. Berlin 1964.
5. Rózsa, P.: Lineáris differenciál- és differenciaegyenletek általános kezdeti feltételeket kielégítő explicit megoldásáról. MTA. Mat. Kut. Intézetének Közleményei II (1957).

Erik Szeredai, Budapest XI., Műegyetem rkp. 3, Ungarn