ÜBER DAS BEGRIFFSSYSTEM DER VIERERVEKTOREN IN DER RELATIVISTISCHEN MECHANIK

Von

T. Elek

Lehrstuhl für Philosophie, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 14. Juni 1969)

Der Begriff des Vektors im dreidimensionalen Raum stellt die reale Abstraktion bestimmter, durch einen Zahlenwert und eine Richtung determinierter physikalischer Größen, wie Verschiebung, Geschwindigkeit, Impuls, Beschleunigung, Kraft, usw. dar. Im kartesischen Koordinatensystem (im weiteren KS) können Vektoren am einfachsten durch ihre vertikalen Projektionen (Komponenten) auf die 3 Koordinatenachsen festgelegt und als Dreikomponentengrößen mit dem Symbol $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ angegeben werden. Diese Art der Bestimmung des Vektorbegriffes hält jedoch Einstein für zu empirisch, weshalb er eine abstraktere Definition sucht, die auch für die Vektoren des vier- und mehrdimensionalen Kontinuums zutrifft.

Diese abstraktere Definition fußt bei ihm auf der Überlegung, daß sich die Komponenten jedes beliebigen Vektors bei der dreidimensionalen linearen Transformation nach den gleichen Formeln transformieren lassen wie die Achsenprojektionen der einfachen Strecken (Verschiebungen oder Bogenelemente), d. h. wie die Differenzen der Endpunktkoordinaten.

Die im KS K angegebenen Komponenten des Dreier-Bogenelements $\mathbf{PQ} = \mathbf{dr}$ schreiben sich (als Differenzen der Koordinaten der Punkte P und Q) zu $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, ihre transformierten Komponenten in K' zu

$$\mathrm{d}x'_i = \alpha_{i1}\,\mathrm{d}x_1 + \alpha_{i2}\,\mathrm{d}x_2 + \alpha_{i3}\,\mathrm{d}x_3 \quad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{1}$$

wobei z. B. der Koeffizient α_{i1} die auf die Achse x_1 des früheren KSK entfallende Skalarkomponente des Einheitsvektors auf der x'_i-Achse des neuen KS K' bezeichnet. Die aus drei Summanden bestehende Summe auf der rechten Seite von (1) kann in der Form

$$\mathrm{d}x'_i = \alpha_{ir}\,\mathrm{d}x_r \tag{2}$$

geschrieben werden, in der i der sog. »charakteristische«, r hingegen der »summierende« Index ist. Der erstere wird zumeist mit einem aus der Mitte, der letztere mit einem vom Ende des Alphabets genommenen Buchstaben bezeichnet. Schließlich läßt sich beweisen, daß sich der allgemeine Dreiervektor **a** tatsächlich so transformiert wie das Bogenelement:

$$a_i' = \alpha_{ir} \cdot a_r. \tag{3}$$

Dieser Formel gleicht diejenige der »Rücktransformation« von K' auf K (der inversen Transformation)

$$a_i = \alpha_{ri} \cdot a_r', \tag{4}$$

in der wieder i der charakteristische, r hingegen der summierende Index ist.

Bemerkt sei hierzu noch, daß die neun Transformationskoeffizienten α_{ik} in der linearen Transformation kartesischer Koordinatensysteme voneinander nicht unabhängig sind, daß vielmehr zwischen ihnen ein Zusammenhang besteht, den die Gleichungen

$$\alpha_{i1}\alpha_{k1} + \alpha_{i2}\alpha_{k2} + \alpha_{i3}\alpha_{k3} = \alpha_{ir}\alpha_{kr} = 0 \quad (\text{wenn } i \neq k) \tag{5}$$

und

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2 = 1 \tag{6}$$

beschreiben.

Führt man die Weierstraß-Kroneckersche symbolische Zwei-Index-Größe δ_{ik} gemäß

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } i \neq k \\ 1, \text{ wenn } i = k \end{cases} \tag{7}$$

ein, dann kann statt (5) und (6)

$$\alpha_{ir} \cdot \alpha_{kr} = \delta_{ik} \tag{8}$$

geschrieben werden. Ebenso ist

$$\alpha_{ri} \cdot \alpha_{rk} = \delta_{ik}. \tag{9}$$

Aufgrund der in (2)—(4) festgelegten Regeln der linearen Transformation formuliert Einstein die Definition des Vektorbegriffes wie folgt: »Den Inbegriff dreier Größen, die für jedes kartesische Koordinatensystem definiert sind und sich transformieren wie Streckenkomponenten, nennt man einen Vektor«, um sogleich hinzuzufügen: »*So kann man die Bedeutung des Vektorbegriffes erfassen, ohne auf die geometrische Veranschaulichung rekurieren zu müssen.*«[1]

[1] EINSTEIN, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1956, p. 7.

Hier muß sogleich festgehalten werden, daß Einstein den Begriff der linearen Transformation allgemein und auch in dieser Hinsicht *einengend auf die Koordinatentransformation bezieht.* Die Transformationsgleichungen haben jedoch stets eine doppelte Deutung: bei unverändert an ihrer Stelle verharrenden Punkten beschreiben sie die Änderung der KS, bei unverändertem KS hingegen die Überführung von Punkten und Punktreihen ineinander (Punkt- oder Konfigurationstransformation). *Bei Konfigurationstransformationen* ist die Transformierte des Vektors wieder ein Vektor, der »Bildvektor« des gegebenen Vektors. Zwischen dem Bildvektor $\mathbf{a}'$ und dem ursprünglichen Vektor $\mathbf{a}$ besteht also in solchen Fällen ein funktioneller Zusammenhang, und die Transformationsformeln (2)—(4) drücken eben diese Vektor-Vektor-Funktion in der Weise aus, daß beide Vektoren die wechselseitige Abhängigkeit ihrer Komponenten voneinander in ein und demselben KS beschreiben. In der linearen Konfigurationstransformation schreiben sich die Komponenten des Bildvektors des allgemeinen, mit seiner Repräsentation im System K angegebenen Vektor $\mathbf{a}$ zu

$$a_i' = T_{ir}\, a_r. \tag{10}$$

Offenbar steht (10) in formaler Analogie zur Formel (3), bedeutet aber inhaltlich etwas anderes, nämlich den homogenen linearen funktionellen Zusammenhang zwischen den Repräsentationen des Vektors $\mathbf{a}$ und des ihn abbildenden Bildvektors $\mathbf{a}'$ in K. Die Koeffizienten der Konfigurationstransformation T_{ik} sind konstante Größen, sie unterliegen aber im allgemeinen keinen einschränkenden Zusammenhängen von der Art, wie sie gemäß (5)—(9) für die Koeffizienten α_{ik} der Koordinatentransformation bestehen. Die lineare Transformation bedeutet also in diesem Falle eine Tensorenoperation, die vom KS unabhängig (kovariant) ist. Die Komponenten der allgemeinen Vektoren transformieren sich auch in der Konfigurationstransformation ebenso (d. h. mit denselben Transformationskoeffizienten) wie die Streckenkomponenten. Die obige Definition des Vektorenbegriffes ist mithin auch für diesen Typus der Transformationen gültig.

Auf die *Viererverktoren* übergehend, ändert Einstein die obige Definition in der Weise ab, daß er die Vektorentransformationen auf die Inertialsysteme mit den rechtwinkligen Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und mit der Zeitkoordinate $x_4 = ict$ ($i = \sqrt{-1}$) bezieht und an die Stelle des Streckenbegriffes den Begriff des *vierdimensionalen Raumzeitintervalls* (oder des Vierebogenelements) setzt. Dieses bedeutet den Grundtypus der Vierervektoren, im Grunde genommen die Viererverschiebung. Seine Komponenten sind identisch mit den Koordinatendifferentialen, sie können also durch die Schreibweise $\mathbf{ds}$ ($\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}x_4$) dargestellt werden. Das Quadrat seines Absolutwertes schreibt sich zu

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 - c^2\,(\mathrm{d}t)^2 = \\ &= (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 + (\mathrm{d}x_4)^2.\end{aligned} \tag{11}$$

Die Lorentz-Invarianz des Bogenelementquadrats leitet Einstein aus der Verallgemeinerung des Postulats von der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit c, d. h. aus dem für den Fall $(ds)^2 = 0$ aufgestellten Postulat ab.[2]

Diese Invarianz besteht hinsichtlich der Einsteinschen Klasse von *Inertialsystemen*, d. h. von Koordinatensystemen, die ausschließlich in einem von jeder beschleunigenden Wirkung freien Raumgebiete, dem sog. *feldfreien Raum* existieren und sich bewegen können. In den Inertialsystemen gibt es daher nur inertiale (geradlinige, gleichförmige) Bewegungen. Wie ich in früheren Arbeiten nachgewiesen habe, bedeuten diese Postulate so viel, daß sich die Lorentz-Invarianz des Bogenelementquadrats in der Einsteinschen Koordinatentransformation nur mit *nichtmateriellen* Wirkungen, mit der prästabilierten Harmonie der retardierten und avancierten Wirkungsausbreitung erklären läßt.[3]

Eine reale physikalische Erklärung für die Lorentz-Invarianz des Bogenelementquadrats vermag nur das von JÁNOSSY eingeführte Lorentz-Prinzip zu geben.[4] In dieser Interpretation bedeutet die Lorentz-Transformation (im weiteren *LT*) in erster Linie eine Konfigurationstransformation: in ihren Formeln spiegeln sich die objektiven Deformationen (die Längenkontraktion, die Dilatation der Schwingungszeiten und die Verschiebung der Phasen von Schwingungen an verschiedenen Stellen), die *bei der adiabatischen Beschleunigung* von physikalischen Systemen eintreten. Die *beschleunigten* Bewegungen werden hierbei naturgemäß nicht in den Einsteinschen Inertialsystemen, sondern in den sog. *Lorentz-Systemen*, d. h. in Koordinatensystemen beschrieben, in denen die Messung der Längen und Zeiten mit Hilfe von Lichtsignalen erfolgt, die von Spiegeln reflektiert werden. Die Lorentz-Systeme vollführen relativ zum materiellen Träger des Lichtes bzw. zu dem diesen repräsentierenden Koordinatensystem K_0 eine geradlinige, gleichförmige Bewegung, gewinnen jedoch ihre konstante Geschwindigkeit naturgemäß unter dem Einfluß von beschleunigenden Wirkungen. Das Licht pflanzt sich nur relativ zum Koordinatensystem K_0 isotrop, relativ zu den anderen Lorentz-Systemen hingegen *anisotrop* fort. Diese Anisotropie und die durch die Beschleunigung verursachten Deformationen bilden die Grundlage der Lorentz-Invarianz des Bogenelementquadrats.

In der Deutung nach dem Lorentz-Prinzip bedeutet freilich die *LT in zweiter Linie auch eine Koordinatentransformation*, jedoch keineswegs eine solche zwischen den Einsteinschen Inertialsystemen, sondern zwischen den physikalische Objekte repräsentierenden Lorentz-Systemen. Die Formeln der *LT*, die die Zustandsgrößen (vor allem die Bogenelemente) vor und nach der

[2] EINSTEIN, A., l. c., pp. 21—24.

[3] ELEK, T.: Relativitätstheorie und Atheismus. Periodica Polytechnica Elektrotechnik, **2**, 177 (1964).

[4] JÁNOSSY, L.—ELEK, T.: A relativitáselmélet filozófiai problemái (Die philosophischen Probleme der Relativitätstheorie). Verlag d. Ung. Akademie d. Wissenschaften, Budapest 1963, p. 125 (ungarisch).

adiabatischen Beschleunigung des physikalischen Systems ineinander überführen, *bedeuten* — wie gezeigt — *Tensorenoperationen*, die den Zusammenhang zwischen den beiden Zuständen *in jedem Lorentz-System* in der gleichen Weise beschreiben und damit zum Ausdruck bringen, daß es sich hier um objektive Deformationen handelt. In allen Versuchen zur Fundamentierung der speziellen Relativitätstheorie finden sich adiabatische Beschleunigungen, durch sie wird also nicht die Deutung als Einsteinsche Koordinaten-, sondern die Deutung als Konfigurationstransformation untermauert.[5]

Doch kehren wir zur obigen Definition des *Begriffs des allgemeinen Vierervektors* zurück, dem in erster Linie wieder nur in seiner Deutung als Konfigurationstransformation (in zweiter Linie in seiner Deutung als Koordinatentransformation zwischen den Lorentz-Systemen) ein physikalischer Inhalt zugeordnet werden kann, weil er hierbei — der vierdimensionalen Schreibweise entsprechend — in der Tat Größen zum Ausdruck bringt, die »einander abbildenden« physikalischen Objekten (der Struktur eines physikalischen Objektes vor und nach der Beschleunigung) zugehören, bzw. weil er deren ineinander transformierte Werte widerspiegelt. Einstein gerät hier in ein Dilemma: will er seinen eigenen Grundpostulaten treu bleiben, muß er *formal* an der Deutung des Vektorbegriffes nach der an Inertialsysteme gebundenen *Koordinatentransformation* festhalten. Will er hingegen seine Theorie auf die Mechanik und Elektrodynamik anwenden, dann *muß er* — wie noch gezeigt werden wird — *unauffällig auf die Deutung des Vierervektorbegriffes nach der Konfigurationstransformation übergehen*. Hieraus aber entwickelt sich eine ganze Serie logischer Widersprüche und theoretischer Schwächen: die effektiven *physikalischen* Resultate der Theorie lassen sich nur unter Verzicht auf das ursprüngliche System von Postulaten und unter Annahme des Lorentz-Prinzips deuten.

Im vierdimensionalen »feldfreien Raum« ist die lineare Transformation identisch mit der allgemeinen Lorentz-Transformation (*LT*). Ihre Formeln sind für die Variante der Koordinatentransformation die gleichen, wie die unter (3) und (4) angegebenen, für die Konfigurationstransformation hingegen wie die unter (10) figurierende, bloß können sowohl die charakteristischen als auch die Summationsindizes die Werte 1, 2, 3, 4 annehmen. Eine Analogie zu den Transformationsformeln der Dreiervektoren besteht auch insofern, als die Koeffizienten α_{ik} bzw. T_{ik} auch jetzt konstante Werte haben und von den Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) unabhängig sind. Aus der Invarianz des Bogenelementquadrats gemäß (11), d. h. aus der Gleichung

$$(ds)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 + (\mathrm{d}x_4)^2 = \\ = (\mathrm{d}x_1')^2 + (\mathrm{d}x_2')^2 + (\mathrm{d}x_3')^2 + (\mathrm{d}x_4')^2 \tag{12}$$

[5] T.: Elek, Über den optischen Rotationseffekt und seine Konsequenzen für die Philosophie. Periodica Polytechnica, Elektrotechnik **1**, 49—79 (1966).

läßt sich ableiten, daß die Zusammenhänge (7)—(9) auch für vier Indizes Gültigkeit haben. Die Koeffizienten T_{ik} der Konfigurationstransformation sind also in der *LT* identisch mit den Koeffizienten α_{ik} der Koordinatentransformation.

Die ersten Grundtypen des Vierervektors sind das Vierer-Bogenelement und der *Vierer-Ortsvektor*. Der Dreier-Ortsvektor des Punktes $P(x_1, x_2, x_3)$ bedeutet bekanntlich den Vektor $\mathbf{OP} = \mathfrak{r}_P$, wobei O den Nullpunkt des gegebenen kartesischen Koordinatensystems bezeichnet. Die Komponenten des Dreier-Ortsvektors sind identisch mit den räumlichen Koordinaten des Punktes *P*. Analog hierzu können wir den Zahlenvierer $\mathfrak{r}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — gebildet aus den Raum- und Zeitkoordinaten eines »Weltpunktes« (eines elementaren Ereignisses) in *K* — einen »*Vierer-Ortsvektor*«, einen »*Koordinatenvektor*« oder einen »*Ereignisvektor*« nennen.

Die *allgemeine* Definition des Vierervektors lautet nun also: einen Vierervektor stellt jene Größe $\mathfrak{a}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ dar, deren vier Komponenten sich in der *LT* nach dem Muster der Bogenelementkomponenten (Koordinatendifferentiale), d. h. nach den Gleichungen (3) und (4) transformieren, aber natürlich so, daß $i = 1, 2, 3, 4$ und $r = 1, 2, 3, 4$.

Der Absolutwert des Vierervektors errechnet sich aus der Formel

$$|\mathfrak{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}\,. \tag{13}$$

Anhand von (12) und von (3)—(4) läßt sich beweisen, daß der Absolutwert jedes Vierervektors — ebenso wie derjenige des Viererbogenelements — gegen die Lorentz-Transformation invariant ist, u. zw. gleichviel, ob es sich um eine Koordinaten- oder um eine Konfigurationstransformation handelt. Sind also

$$\mathfrak{a}'(a_1', a_2', a_3', a_4')$$

die transformierten Vektorkomponenten, dann gilt $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{a}'|$, d. h. es ist

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = (a_1')^2 + (a_2')^2 + (a_3')^2 + (a_4')^2. \tag{14}$$

In der Deutung als Koordinatentransformation erscheint dieser Zusammenhang trivial, denn die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ sind einander gleich, in der Deutung als Konfigurationstransformation ist er es indessen keineswegs, denn er besagt, daß der Vierervektor $\mathfrak{a}$ und der ihm entsprechende Bildvektor $\mathfrak{a}'$ den gleichen Absolutwert haben. Mit anderen Worten, bei adiabatischer Beschleunigung bleiben nicht nur die Bogenelemente eines physikalischen Systems, sondern auch alle anderen, durch Vierervektoren charakterisierbaren Eigenschaften *ihrem Absolutwert nach* unverändert, d. h. Lorentz-invariant. Die *physikalische* Erklärung hierfür liefert ebenso wie im Falle des Bogenelement-

Quadrats $(ds)^2$ das gemeinsame Auftreten der beiden einander kompensierenden Wirkungen, d. h. das gemeinsame Auftreten der durch die Beschleunigung ausgelösten relativistischen Effekte und der anisotropen Lichtgeschwindigkeitsänderungen.

Die nächste einfachste Art des Vierervektors ist nach dem Bogenelement und dem Vierer-Ortsvektor die *Vierergeschwindigkeit* des materiellen Punktes, die nach dem Muster der Dreiergeschwindigkeit mit der Ableitung der Koordinaten nach der Zeit definiert werden kann.

Im System K schreiben sich die 3 Komponenten der Dreiergeschwindigkeit V zu

$$V_1 = \frac{dx_1}{dt}, \qquad V_2 = \frac{dx_2}{dt}, \qquad V_3 = \frac{dx_3}{dt}. \tag{15}$$

Hier beziehen sich die Maßzahlen der Koordinatendifferentiale $dx_i (i = 1, 2, 3)$ und des Zeitdifferentials dt auf die Längen- bzw. Zeiteinheiten im System K. Aufgrund der Formel $x_4 = ict$ ergäbe sich für die vierte Komponente der Vierergeschwindigkeit ein

$$V_4 = ic. \tag{16}$$

Die Größe (V_1, V_2, V_3, V_4) ist jedoch kein Vektor, weil sich ihre Komponenten nicht auf die gleiche Art und Weise transformieren wie die Koordinatendifferentiale. Es sei nämlich K' das KS jenes Massenpunktes, der sich relativ zum System K mit der Dreiergeschwindigkeit von

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \tag{17}$$

bewegt. In der Einsteinschen Konzeption von der Koordinatentransformation besitzt das System K' eine »Eigenzeit«, die »in einem anderen Rhythmus abläuft« als die »Eigenzeit« des Systems K.

Der Zeitspanne dt im System K entspricht nach Einstein in K' eine Zeitspanne von

$$d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}\,. \tag{18}$$

Den Zeitparameter τ, dessen Differential die Formel (18) liefert, nennt Einstein die »*Ruhe- oder Eigenzeit des bewegten Massenpunktes*«,[6] weil sie der Eigenzeit des gemeinsam mit ihm (d. h. mit dem Massenpunkt) bewegten Systems K' gleich ist. Diese »Eigenzeit« ist Lorentz-invariant, d. h. unabhängig davon, mit welcher Geschwindigkeit V sich der Massenpunkt relativ zum

[6] EINSTEIN, A.: l. c., p. 29.

System K bewegt. (Die Änderung der Zeitspanne dt und der Geschwindigkeit V bewirken gemeinsam, daß dτ unverändert bleibt.)

Aus (16) geht hervor, daß die angenommene Komponente V_4 der »Vierergeschwindigkeit« in jedem Inertialsystem die gleiche Größe (ic) hätte, d. h. daß sie sich nicht ebenso transformieren würde wie dx_4. Führt man jedoch in die Formeln (15)—(16) statt des Zeitdifferentials dt des Systems K den Wert dτ des Systems K' ein, dann erhält man die Komponenten

$$u_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{V_i}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{19}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4).$$

Da die Größe dτ im Nenner Lorentz-invariant ist, transformieren sich die Komponenten u_i ebenso wie die Koordinatendifferentiale dx_i im Zähler. Die Größe $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ ist mithin im Sinne der obigen Definition ein Vierervektor, und ihn bezeichnet Einstein als den *vierdimensionalen Vektor der Geschwindigkeit.*[7] Diese Bezeichnung ist berechtigt, weil aus der Formel (19) hervorgeht, daß zwischen der Dreiergeschwindigkeit $\mathbf{V}(V_1, V_2, V_3)$ und der Vierergeschwindigkeit $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ im üblichen Geschwindigkeitsbereich $V < c$ das Verhältnis der wechselseitigen eindeutigen Entsprechung besteht. Solcherart ist auch der Begriff der Vierergeschwindigkeit eine Abbildung der konkreten Geschwindigkeit der Mechanik, d. h. einer *objektiven physikalischen* Größe, was die Überführung dieser Kategorie in die vierdimensionale Schreibweise begründet erscheinen läßt. Im Sinne von (19) stellt die Vierergeschwindigkeit schließlich die Derivierte der Viererverschiebung (des Bogenelements) nach der Zeitkoordinate τ in K' gemäß

$$\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}\tau}\,. \tag{20}$$

dar.

Nach EINSTEIN trägt jedoch der in der Formel (18) beschriebene Zusammenhang zwischen der Zeitspannen dτ in K' und der Zeitspanne dt in K sowie der Geschwindigkeit V keinen genetischen, sondern strukturellen Charakter, d. h. die mathematische Struktur des Raumzeit-Kontinuums ist es, die diesen Zusammenhang zwischen den »Eigenzeiten« der beiden KS zustande bringt. Ähnlich ist der in (19) beschriebene Zusammenhang zwischen Dreier- und Vierergeschwindigkeit struktureller Natur.

Im Gegensatz hierzu führt *die auf der Konfigurationstransformation fußende Deutung* diesen Zusammenhang auf genetische *physikalische Effekte*

[7] EINSTEIN, A.: l. c., p. 30.

zurück. Führen wir beispielsweise die Lorentz-Transformation durch, indem wir im Koordinatensystem K' eines Atoms verbleiben, dann gilt in (19) für die Dreiergeschwindigkeit des gegebenen Atoms $V' = 0$ und zugleich $V_1' = V_2' = V_3' = 0$, für die Vierergeschwindigkeit des Atoms also $(0, 0, 0, ic)$. Bei der Konfigurationstransformation schreiben sich die Komponenten der einander entsprechenden Vierergeschwindigkeiten in K' zu

$$(0,0,0,\text{ic}) \text{ und} \left(\frac{V_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{V_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{V_3}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right). \tag{21}$$

Im Sinne dieser Deutung wird also die Lorentz-Transformierte des im gegebenen *KSK' ruhenden* Atoms ein Atom sein, das im selben *KS* auf die Dreiergeschwindigkeit V beschleunigt ist, dessen Schwingungen sich jedoch — gemäß (18) — zugleich im Verhältnis von $1 : \sqrt{1 - V^2/c^2}$ objektiv verlangsamt haben und das in seiner Ausdehnung parallel zu V im Verhältnis von $\sqrt{1 - V^2/c^2} : 1$ verkürzt ist.

Was nun die Deutung der obigen Zusammenhänge nach den *Koordinatentransformationen der Lorentz-Systeme* anlangt, findet die Änderung der Vierergeschwindigkeitskomponenten ihre Erklärung in den gleichen physikalischen Effekten, wie wenn wir sie als Konfigurationstransformationen deuten. Hierbei sind freilich die Komponenten (u_1, u_2, u_3, u_4) und die aus diesen durch die Lorentz-Transformation gewonnenen Komponenten (u_1', u_2', u_3', u_4') die Abbildungen einer und derselben »auf der Stelle verharrenden« Vierergeschwindigkeit $\mathbf{u}$ in den *KS K* bzw. K', doch sind diese Komponenten in jeweils verschiedenen Maßeinheiten ausgedrückt, die sich voneinander durch die Lorentz-Deformation unterscheiden, die sie erfahren haben. Hier ist also keine Rede von den »Eigenräumen und Eigenzeiten« der beiden Koordinatensysteme.

In der Deutung nach der Konfigurationstransformation bedeuten $\mathbf{u}$ und $\mathbf{u}'$ naturgemäß zwei verschiedene Vierergeschwindigkeiten. Hier bleibt der Absolutwert der Vierergeschwindigkeit invariant [vgl. (13)—(14)], d. h. es ist

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'| = ic. \tag{22}$$

Weiterhin ist der in (20) ausgedrückte Zusammenhang zwischen den beiden Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{ds}$ bei beiden Deutungsarten kovariant, oder mit anderen Worten, *die Vektorengleichung, die die Vierergeschwindigkeit definiert, ist gegen die Lorentz-Transformation kovariant.*

Vom Begriff der Vierergeschwindigkeit gelangt Einstein zu dem des *Viererimpulses.*[8] Der *Dreierimpuls* ist bekanntlich gleich dem Produkt aus

[8] EINSTEIN, A.: l. c., p. 30.

Masse und Dreiergeschwindigkeit eines Massenpunktes. Nach diesem Muster schreiben sich die Komponenten des Viererimpulses in K zu

$$G_i = mV_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{23}$$

bzw. mit (19) zu

$$G_i = m\sqrt{1 - V^2/c^2} \cdot u_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{24}$$

d. h. mit der Bezeichnung

$$m\sqrt{1 - V^2/c^2} = m_0 \tag{25}$$

zu

$$G_i = m_0 u_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{26}$$

oder in Gestalt einer Vektorengleichung zu

$$\mathbf{G} = m_0 \mathbf{u}. \tag{27}$$

Hier ist m_0 die sog. »Ruhmasse« des materiellen Punktes, denn bei einem Geschwindigkeitswert von $V = 0$ ergibt sich im System K aus (25) tatsächlich, daß $m = m_0$ ist. Nach der Auffassung Einsteins ist der Wert der Ruhmasse des materiellen Punktes konstant, d. h. in dem mit ihm mitbewegten System K' bleibt er stets m_0, gleichviel mit welcher Geschwindigkeit er sich relativ zu einem anderen, dem Koordinatensystem K, bewegt. Wegen der Invarianz von m_0 ist auch $m_0\mathbf{u}$ ein Vierervektor, transformiert es sich doch ebenso wie $\mathbf{u}$, d. h. ebenso wie $\mathbf{ds}(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$. Zwischen dem Dreier- und dem Viererimpuls besteht — sofern $V < c$ — wieder das Verhältnis der wechselseitigen eindeutigen Entsprechung, eine Tatsache, die dem Begriff des Viererimpulses wieder einen physikalischen Sinn verleiht und die Benützung derselben physikalischen Kategorie in der vierdimensionalen Schreibweise begründet erscheinen läßt.

Nach der Auffassung Einsteins trägt jedoch der Zusammenhang (25) zwischen der Masse m und der Geschwindigkeit V wiederum nicht genetischen, sondern strukturellen Charakter. Für ihn sind es eigentlich die *mathematischen* Zusammenhänge zwischen den Größen u_i und V_i gemäß (19), die die relativistische Änderung der Masse bewirken, und nicht irgendwelche *physikalische* Effekte. Dazu bedeutet die Formel (25), die den mathematischen Zusammenhang zwischen m und V beschreibt, keine stetige Funktion, sie stellt also nicht die Abbildung irgendeines *physikalischen* Vorganges dar, sondern verknüpft lediglich die in den verschiedenen Systemen K gültigen *diskreten* Masse- und Geschwindigkeitswerte miteinander. Einstein führt somit die relativistischen Änderungen der Masse letztlich wieder auf die »Eigenräume und Eigenzeiten« der verschiedenen Koordinatensysteme zurück.

Die *Deutung* des Viererimpulses im Sinne der *Konfigurationstransformation* vermeidet diesen spekulativen Gedankengang von neuem. Bleiben wir wieder im *KS K'* des gegebenen Massenpunktes, in welchem dessen Vierergeschwindigkeit $(0, 0, 0, ic)$ und somit der Viererimpuls $(0, 0, 0, m_0 ic)$ ist. In der Konfigurationstransformation ergeben sich demnach für die entsprechenden Viererimpulse auf Grund der Formel (21)

$$(0,0,0,\mathrm{m}_0 ic)\,\text{und}\left(\frac{m_0 V_1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ \frac{m_0 V_2}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ \frac{m_0 V_3}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ \frac{m_0\, ic}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right). \qquad (28)$$

In diesem Sinne ist also die Lorentz-Transformierte des im gegebenen *KS K'* *ruhenden* Massenpunktes im gleichen *KS* der auf die Dreiergeschwindigkeit V beschleunigte materielle Punkt mit der zugleich im Verhältnis von $1 : \sqrt{- V^2/c^2}$ objektiv angewachsenen Masse.

Wieder dürfen wir feststellen, daß der Absolutwert des Viererimpulses bei der Deutung im Sinne der Konfigurationstransformation Lorentz-invariant bleibt, daß also

$$|\mathfrak{G}| = |\mathfrak{G}'| = i\, m_0\, c \qquad (29)$$

und daß *die Vektorgleichung (27), die den Viererimpuls definiert,* auch in dieser Deutung *gegen die Lorentz-Transformation kovariant bleibt.*

Weiterhin darf festgestellt werden, daß die Deutung im Sinne der Koordinatentransformation zwischen den Lorentz-Systemen die Änderung der Komponenten des auf der Stelle verharrenden Viererimpulsvektors auf dieselben *physikalischen* Effekte zurückführt wie die Deutung im Sinne der Konfigurationstransformation. In *dieser* Deutung der Koordinatentransformation gemäß ist also wieder keine Rede von den angeblichen »Eigenräumen und Eigenzeiten« der Koordinatensysteme.

In der Einsteinschen Deutung im Sinne der Koordinatentransformation treten durch die Einführung der Begriffe »Viererbeschleunigung« und »Viererkraft« weitere theoretische und zugleich logische Schwächen auf. In der klassischen Mechanik spiegelt sich im Begriff der Kraft qualitativ die Ursache der Änderung der Geschwindigkeit des Massenpunktes d. h. die Einwirkung anderer materieller Objekte auf ihn. Quantitativ errechnet sich die Kraft als Produkt aus Masse und Beschleunigung (zweites Newtonsches Bewegungsgesetz des Massenpunktes).

Die Einführung der Begriffe Beschleunigung und Kraft ist jedoch — gleichviel, ob es sich um die »Dreier«- oder um die »Vierer«-Beschleunigung bzw.-Kraft handelt — *in der Welt der Inertialsysteme logisch unzulässig,* kann doch der materielle Punkt in keinem Inertialsystem eine andere als die gleichförmige Translationsbewegung ausführen.

Den Wert der Komponenten der Dreierbeschleunigung im Koordinatensystem K liefert bekanntlich die Differentiation der Dreier-Geschwindigkeitskomponenten nach der Zeit, in Gleichungen ausgedrückt:

$$A_1 = \frac{dV_1}{dt}, \quad A_2 = \frac{dV_2}{dt}, \quad A_3 = \frac{dV_3}{dt} . \tag{30}$$

Ergänzte man diese Reihe auf Grund der Formel (16) durch den Komponenten $A_4 = \frac{dV_4}{dt} = 0$, erhielte man keinen Vierervektor. Auch die »Viererbeschleunigung« $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ wird erst dann zu einem Vierervektor, wenn die Differentiale der Geschwindigkeitskomponenten nicht durch das Zeitdifferential in K, sondern durch das Zeitdifferential in K' (dem gemeinsam mit den materiellen Punkten bewegten Koordinatensystem) dividiert wird, wenn also

$$a_i = \frac{du_i}{d\tau} \quad (i = 1, 2, 3, 4) . \tag{31}$$

Die Komponenten du_i im Zähler transformieren sich nämlich ebenso wie u_i, d. h. letzten Endes ebenso wie die Koordinatendifferentiale dx_i. Da nun aber das $d\tau$ im Nenner Lorentz-invariant ist, transformiert sich auch das $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3, a_4)$ auf die gleiche Weise, es ist somit *mathematisch* tatsächlich ein Vierervektor. Im Sinne der Formeln (30)—(31) besteht zwischen der Dreierbeschleunigung $\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3)$ und der Viererbeschleunigung $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3, a_4)$ (sofern $V < c$) wieder das Verhältnis der wechselseitigen eindeutigen Entsprechung, und dies läßt es wieder begründet erscheinen, den Begriff der Beschleunigung in die vierdimensionale Schreibweise zu übertragen. Die Vektorengleichung, die die Beschleunigung definiert, lautet also schließlich

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{du}}{d\tau} . \tag{32}$$

Nehmen wir der Einfachheit halber den Fall, daß der Massenpunkt eine beschleunigte Bewegung auf der Achse x_1 des Systems K ausführt, wobei diese mit der Achse x_1' des Systems K' identisch sein soll, dann erhalten wir aus (19) für die Vierergeschwindigkeit des Massenpunktes in K

$$u_1 = \frac{V_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \tag{33}$$

während sich die Komponenten der Viererbeschleunigung des Massenpunktes in K zu

$$a_1 = \frac{A_1}{(1 - V^2/c^2)^2}, \quad a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{i}{c} \frac{VA_1}{(1 - V^2/c^2)^2} \tag{34}$$

errechnen.

Berechnen wir nun anhand der bekannten Formeln der Lorentz-Transformation die Komponenten der Vierergeschwindigkeit und -beschleunigung des Massenpunktes in dem mit ihm mitbewegten System K', d. h. seine »Ruhegeschwindigkeit« und »Ruhebeschleunigung«, dann gelangen wir zu dem Ergebnis

$$u_1' = u_2' = u_3' = 0, \quad u_4' = ic \tag{35}$$

und

$$a_1' = \frac{A_1}{(\sqrt{1 - V^2/c^2})^3}, \quad a_2' = a_3' = a_4' = 0\,. \tag{36}$$

Das Koordinatensystem K' des relativ zum Inertialsystem K beschleunigt (veränderlich schnell) bewegten Massenpunktes ist in der Einsteinschen Konzeption naturgemäß nur für eine ganz kurze Zeitspanne als Inertialsystem anzusehen, können doch Inertialsysteme per definitionem nur gleichförmig, geradlinig bewegt sein.

Die Berechnung der Komponenten der Beschleunigung des Massenpunktes im System K', d. h. ihrer *Dreier*-Ruhebeschleunigung für diesen Fall[9] ergibt (bei $V \ll c$):

$$A_1' = a_1' = \frac{A_1}{(\sqrt{1 - V^2/c^2})^3}, \quad A_2' = A_3' = 0\,. \tag{37}$$

Für einen mit der *konstanten Dreier-Ruhebeschleunigung* $A_1' = A_0$ angenommenen, an der Achse $x_1 = x_1'$ entlang bewegten Massenpunkt schreibt sich die Dreierbeschleunigung in K nach (37) zu

$$A_1 = A_0 (\sqrt{1 - V^2/c^2})^3, \quad A_2 = A_3 = 0\,. \tag{38}$$

Die Dreierbeschleunigung im System K bleibt demnach in diesem Falle nicht konstant, sie hängt vielmehr von der Massenpunktgeschwindigkeit V relativ zum System K ab: sobald $V = 0$ ist, wird $A_1 = A_0$, d. h. in diesem Augenblick ist die Beschleunigung in K ebensogroß wie in K'. Mit der fortdauernden Zunahme der Geschwindigkeit V in K nimmt die Dreierbeschleunigung A_1 in K (d. h. das Tempo des Anwachsens der Geschwindigkeit) ab, und nähert sich V der Lichtgeschwindigkeit c, strebt die Beschleunigung A_1 dem Nullwert zu. Das ist gleichbedeutend mit der Feststellung, daß sich die Geschwindigkeit des beschleunigten Massenpunktes in K der Lichtgeschwindigkeit asymptotisch nähert, die sie erst nach unendlich langer Zeit erreicht, wobei ihre Beschleunigung in K auf Null absinkt.

[9] LAUE, M.: Die Relativitätstheorie, Bd. I., Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1961, pp. 65—67.

Die Einsteinsche Deutung im Sinne der Koordinatentransformation mündet an diesem Punkt mit logischer Notwendigkeit in die Deutung im Sinne der Konfigurationstransformation, gerät aber unterdessen in einen unzulässigen Widerspruch zu den Grundvoraussetzungen und Postulaten, von denen ihr Schöpfer ausgegangen war. Sobald wir nämlich in einem Inertialsystem eine *beschleunigte* Bewegung zugestehen, müssen wir auch akzeptieren, daß sich in der Welt der Inertialsysteme unterschiedliche Geschwindigkeitswerte nicht nur aus der Relativierung zu den verschiedenen Koordinatensystemen ergeben können, daß vielmehr auch *die Geschwindigkeit ein und desselben Massenpunktes in ein und demselben Koordinatensystem unterschiedliche Werte annehmen kann.* Diese aber können nur das Resultat einer beschleunigenden Einwirkung sein und zeigen insofern die Zustände eines bewegten Massenpunktes oder eines aus Massenpunkten bestehenden materiellen Systems vor und nach der Beschleunigung an. Dann aber müssen mit der zwingenden Notwendigkeit der Logik auch die beiden Schlußfolgerungen gezogen werden, daß

1. keine ausgezeichnete Klasse von Koordinatensystemen existiert, in welcher es nur geradlinige, gleichförmige Bewegungen gibt, d. h. aus dem jegliche beschleunigende Krafteinwirkung ausgeschlossen ist, weshalb denn auch statt des entmaterialisierten Begriffs der Einsteinschen Inertialsysteme der Begriff der Lorentz-Systeme zu benutzen ist, für die die Einsteinschen Ausgangspostulate keine Gültigkeit haben; und daß

2. die relativistischen Effekte — so beispielsweise die Lorentz-Kontraktion des bewegten Stabes — eben mit der Änderung der auf das nämliche System K bezogenen Geschwindigkeit des beschleunigten materiellen Systems zusammenhängt.

Laue hat diese letztere Schlußfolgerung auch gezogen, hierbei jedoch übersehen, daß er damit in scharfen Widerspruch zur ersten der beiden soeben angeführten Folgerungen und zugleich zu den von ihm akzeptierten Einsteinschen Ausgangspostulaten geraten ist,[10] da er nicht wahrnimmt, daß er die Lorentz-Transformation im einen Fall als Koordinaten-, im anderen Fall als Konfigurationstransformation deutet.

Von der Deutung der *Viererbeschleunigung* als Konfigurationstransformation kann gleichfalls festgehalten werden, daß ihr Absolutwert *Lorentz-invariant* bleibt und daß weiterhin *die Vektorengleichung (32), die die Viererbeschleunigung definiert*, auch in diesem Falle *gegen die Lorentz-Transformation kovariant bleibt.*

Im Zusammenhang mit dem Begriff der Viererbeschleunigung müssen wir ferner bemerken, daß wir Widersprüche auch in der Konzeption Focks, des namhaftesten sowjetischen Theoretikers der Relativitätstheorie, finden. In seinem Buch über die Relativitätstheorie benutzt auch er wiederholt den

[10] Laue, M.: l. c., pp. 38—39 und 151.

Begriff der in der Welt der Inertialsysteme auftretenden Viererbeschleunigung,[11] um sodann auszuführen, warum in der Relativitätstheorie der Begriff des *»starren Körpers«* nicht anwendbar ist. Dieser Begriff bedeutete in der klassischen Mechanik einen festen Körper, dessen Form und Abmessungen durch keinerlei Krafteinwirkung verändert werden können. Trifft den starren Körper an einem Ende ein Stoß, dann macht sich dieser im gleichen Augenblick auch in der Verschiebung des anderen Endes bemerkbar. In Wirklichkeit pflanzt sich jedoch die Stoßwelle im festen Körper mit endlicher Geschwindigkeit (mit der für das betreffende Medium kennzeichnenden Schallgeschwindigkeit) fort, ein Umstand, der den Begriff des starren Körpers für die Relativitätstheorie, die das Prinzip der Nahewirkung aufgestellt hat, unbrauchbar macht. Fock betont jedoch, der Gebrauch des Begriffs des *festen Meßstabes* in der Relativitätstheorie sei dennoch begründet. »Dieser Begriff setzt nämlich nur die Existenz fester Körper voraus, deren Abmessungen und Form unter bestimmten äußeren Bedingungen (Fehlen von Beschleunigung und Stößen, konstanter Temperatur usw.) ungeändert bleiben«.[12] Ist jedoch das Fehlen von Beschleunigungen die entscheidende Voraussetzung für die Gültigkeit der in der speziellen Relativitätstheorie niedergelegten Einsteinschen Sätze, dann begeht auch Fock einen wesentlich logischen Fehler, wenn er den Begriff der in den Inertialsystemen auftretenden Viererbeschleunigung benutzt.

Wir dürfen somit nochmals festhalten, daß die im Lorentz-Prinzip zum Ausdruck gelangende *Konzeption im Sinne der Konfigurationstransformation* sowie die Deutung der *LT* als Koordinatentransformation zwischen den Lorentz-Systemen frei von diesen logischen Widersprüchen ist. Wer der speziellen Relativitätstheorie einen physikalischen Gehalt geben will, muß notwendig zu dieser Konzeption hinfinden und notwendigerweise in Widerspruch zu der Auffassung von der mit den Inertialsystemen verknüpften Koordinatentransformation gelangen, und dies selbst dann, wenn er es sich selbst nicht eingesteht. Bei der Ausarbeitung der relativistischen Mechanik und Elektrodynamik ist es auch Einstein selbst so ergangen. Deutlich geht dies schon aus der Einführung des nächsten Vierervektors, des Begriffs der Viererkraft, in die Theorie hervor.[13]

Die Komponenten der *Viererkraft* ergeben sich als die Differentialquotienten der Impulskomponenten im System K [unter Berücksichtigung der Formel (26)] zu

$$F_i = \frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m_0\, u_i)}{\mathrm{d}t} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{39}$$

[11] Fock, W. A.: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. Akademie Verlag, Berlin, 1960, pp. 66—67, 82—84, 116—117 und 121—123. (Das Original dieses Buches ist 1955 in Moskau in russischer Sprache erschienen.)

[12] Fock, W. A.: l. c., p. 120.

[13] Einstein, A.: l. c., pp. 27—35.

Der *Dreiervektor* $\mathbf{F}(F_1, F_2, F_3)$ ist hier identisch mit der aus der klassischen Mechanik bekannten *Newtonschen Kraft*, doch läßt sich beweisen, daß die Größe (F_1, F_2, F_3, F_4) kein Vierervektor ist! Einstein führt deshalb den modifizierten Kraftbegriff in Gestalt der Formel

$$K_i = \frac{\mathrm{d}G_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{F_i}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{40}$$

ein (»Minkowski-Kraft«), bei der es sich nun schon um einen — gegen die *LT* kovarianten — Vierervektor handelt, weil sie sich ebenso transformiert wie die Koordinatendifferentiale. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Größen $\mathrm{d}G_i$ im Zähler einen Vierervektor darstellen, die Größe $\mathrm{d}\tau$ im Nenner hingegen Lorentz-invariant ist.

Wieder sei hier bemerkt, daß auch zwischen den Begriffen der Dreierkraft $\mathbf{F}(F_1, F_2, F_3)$ und der Viererkraft $\mathbf{K}(K_1, K_2, K_3, K_4)$ — bei $V < c$ — das Verhältnis der wechselseitigen eindeutigen Entsprechung besteht. Wieder ist es dieser Umstand, der es ermöglicht, die Kategorie der Kraft auch in der vierdimensionalen Schreibweise zu benutzen. Auf ein anderes Blatt gehört es naturgemäß, daß Einstein, indem er den Satz von der Existenz einer in der Welt der Inertialsysteme auftretenden Viererkraft aufstellt, mit den Ausgangssätzen der Theorie von neuem in Widerspruch gerät. Hierauf kommen wir weiter unten noch zurück.

Da der Wert der Ruhmasse m_0 konstant ist, kann (40) auch in der Form

$$K_i = \frac{d(m_0 u_i)}{d\tau} = m_0 \frac{du_i}{d\tau} = m_0 a_i \tag{41}$$

[vgl. (31)] oder als Vektorgleichung in der Form

$$\mathbf{K} = m_0 \mathbf{a} \tag{42}$$

geschrieben werden.

Beschränken wir uns wieder auf den Fall des Massenpunktes, der an den miteinander zusammenfallenden Achsen $x_1 = x_1'$ zweier Koordinatensysteme K und K' beschleunigt bewegt ist, dann gilt aufgrund von (34) und (36)

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{m_0 A_1}{(1 - V^2/c^2)^2}, \quad K_2 = K_3 = 0, \quad K_4 = \frac{i}{c} \frac{m_0 A_1 V}{(1 - V^2/c^2)^2}, \\ K_1' &= \frac{m_0 A_1}{(\sqrt{1 - V^2/c^2})^3}, \quad K_2' = K_3' = K_4' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Für den mit der konstanten Dreier-Ruhebeschleunigung A_0 bewegten Massenpunkt kann hingegen [vgl. (38)]

$$\left.\begin{aligned} &K_1 = \frac{m_0 A_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad K_2 = K_3 = 0, \quad K_4 = \frac{i}{c} \frac{m_0 A_0 V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ &\text{und} \\ &K_1' = m_0 A_0, K_2' = K_3' = K_4' = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

geschrieben werden.

Für die Komponenten der Dreierkraft ergibt sich in diesem Falle [vgl. (40)]

$$F_1 = K_1 \sqrt{1 - V^2/c^2} = m_0 A_0, F_2 = F_3 = 0 \tag{45}$$

und

$$F_1' = m_0 A_0, \qquad F_2' = F_3' = 0 ,$$

d. h.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' . \tag{46}$$

Hier muß wieder festgehalten werden, daß *auch die Deutung des Begriffs der Viererkraft im Sinne der Koordinatentransformation* — ebenso wie im Falle der Viererbeschleunigung — über sich selbst hinausweist, während der Begriff des Einsteinschen Inertialsystems notwendigerweise in denjenigen des Lorentz-Systems übergeht. Jene Koordinatensysteme K und K', in denen die beschleunigenden Wirkungen auftreten, sind Lorentz-Systeme. In der an diese angeknüpften *Koordinatentransformationsdeutung* sind die Komponenten der Viererkraft in K' und K (die im übrigen ihre wechselseitigen Lorentz-Transformierten darstellen) dem Wesen nach identisch mit den vor und nach der Beschleunigung gültigen Werten der Viererkraft, wie sie in dem durch das Koordinatensystem K' repräsentierten materiellem System auftritt. Die Überführung dieser Werte ineinander aber erfolgt durch die *Konfigurationstransformation.*

Für den Fall des Massenpunktes, der sich in K' mit der konstanten Dreier-Ruhebeschleunigung A_0 bewegt, gilt im Sinne von (44), daß die Transformierte in K der in K' auftretenden konstanten Viererkraft $(m_0A_0, 0, 0, 0)$ nicht konstant, sondern eine Funktion der veränderlichen Geschwindigkeit V des Massenpunktes in K ist. In dem Augenblick, in dem $V = 0$ wird, hat auch die Viererkraft in K den Wert $(m_0A_0, 0, 0, 0)$, wogegen »die Komponenten der Viererkraft in K« beim stetigen Ansteigen der Geschwindigkeit in K auf Werte von $V > 0$ die in der ersten Zeile von (44) aufgeschriebenen Werte annehmen. Das aber bringt auch die *Konfigurationstransformation* zum Ausdruck.

In der Deutung der Viererkraft im Sinne der Konfigurationstransformation bleibt wieder der Absolutwert der Kraft *Lorentz-invariant.* Weiterhin *bleibt* *die Vektorengleichung (42), die die Viererkraft definiert, der Lorentz-Transformation gegenüber kovariant.*

Ein Vergleich der Formeln (38) und (45)—(46) zeigt, daß sich die Beschleunigung des mit der Dreier-Ruhebeschleunigung A_0 an der x_1-Achse in Bewegung gesetzten Massenpunktes nach erfolgter Beschleunigung im Verhältnis von $(\sqrt{1 - V^2/c^2})^3 : 1$ vermindert, während die beschleunigende Kraft unverändert bleibt. Für den Wert der Masse nach erfolgter Beschleunigung erhalten wir also

$$m = \frac{m_0}{(\sqrt{1 - V^2/c^2})^3} . \tag{47}$$

Der Wert der trägen Masse des Massenpunktes ist hier für den Fall bestimmt, in dem die Richtung der auf den Massenpunkt einwirkenden Kraft mit der Bewegungsrichtung des Massenpunktes (d. h. mit der Achse x_1) zusammenfällt.

Wirkt hingegen die Kraft senkrecht auf die Bewegungsrichtung des Massenpunktes (d. h. also beispielsweise parallel zur Achse x_2), dann errechnet sich die Masse zu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} . \tag{48}$$

Die Masse des parallel zur Kraftrichtung bewegten materiellen Punktes gemäß (47) wird als *longitudinale*, diejenige des senkrecht auf ihn bewegten materiellen Punktes — gemäß (48) — hingegen als *transversale* Masse bezeichnet. Entsprechend schreiben sich die Werte der zweierlei Massen (mit v statt V) zu

$$m_l = \frac{m_0}{(\sqrt{1 - v^2/c^2})^3}, \quad m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{49}$$

Die träge Masse des bewegten materiellen Punktes, d. h. sein Widerstand gegen die beschleunigende Krafteinwirkung ist mithin *je nach der Richtung dieser Krafteinwirkung* unterschiedlich groß. Hieraus hat man

$$\frac{m_l - m_t}{m_0} = \frac{v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \approx \beta \frac{v^2}{c^2} , \tag{50}$$

worin $\beta = 1$, sofern $v \ll c$.

Die an Elektronen unternommenen Versuche bestätigen mit Fehlern von nur einigen Prozenten die Richtigkeit dieses Resultates.[14] Hier handelt

[14] FARAGÓ, F.—JÁNOSSY, L., Mitteilungen des Zentral-Forschungsinstituts für Physik **3**, 370 (1955). — ungarisch.

es sich um die Messungen KAUFMANNS (1902, 1906) im Zusammenhang mit der Ablenkung der β-Strahlen im elektrischen und magnetischen Feld sowie um ähnliche Versuche von BUCHERER (1909), HUPKA (1910), NEUMANN (1914), SCHÄFER (1916), GUY und LAVANCHY (1921), zu denen sich neuerdings auch die Messungen an Elektronen und Protonen in Teilchenbeschleunigern sowie die Resultate gesellen, die sich aus der Beobachtung der Feinstruktur-Aufspaltung und des transversalen Doppler-Effekts ergeben haben.[15]

Die Verschiedenheit der longitudinalen und transversalen Masse muß also als experimentell gesicherte Tatsache durchaus akzeptiert werden. Da es jedoch die Deutung der Lorentz-Transformation im Sinne der mit den Einsteinschen Inertialsystemen verknüpften Koordinatentransformation, wie gezeigt, logisch nicht zuläßt, daß sich der auf ein und dasselbe Koordinatensystem bezogene Wert der Masse eines materiellen Punktes in der Welt der Inertialsysteme ändere und weil eine solche Änderung der Masse, wie gleichfalls gezeigt, ausschließlich *mit dem Auftreten beschleunigender* (in verschiedenen Richtungen wirkender) *Kräfte und mit den durch diese in einem und demselben Koordinatensystem ausgelösten Geschwindigkeitsänderungen zusammenhängen kann, untermauern all diese Versuchsergebnisse die Richtigkeit der Deutung der Lorentz-Transformation im Sinne der Konfigurationstransformation, d. h. die Richtigkeit des Lorentz-Prinzips.* Mit anderen Worten: die experimentelle Sicherung der relativistischen Änderung der Masse liefert einen weiteren Beweis dafür, daß *die Lorentz-Transformation physikalischer Größen die Werte vor und nach der Beschleunigung ineinander überführt.*

EINSTEIN war — wie wir bereits betonten — *gezwungen*, in die spezielle Relativitätstheorie die Begriffe der Viererbeschleunigung, der Viererkraft und weiterhin auch den der Vierer-Kraftdichte einzuführen, denn ohne diese hätte er seine Theorie weder mit der Elektrodynamik, noch mit der Mechanik in Verbindung bringen können. So muß er denn darauf eingehen, daß sich im *feldfreien Raum* materielle Punkte bewegen, die über elektrische Ladung verfügen und *unter der Einwirkung ponderomotorischer Kräfte stehen*, die ihrerseits den Impuls und die Energie der Teilchen verändern.[16] Diese ponderomotorischen Kräfte und die durch sie bewirkten Beschleunigungen können jedoch in der Koordinatentransformations-Konzeption, wie sie die Ausgangspostulate involvieren, nicht von materiellen Objekten, sondern nur von dem als Absolutes gedeuteten immateriellen Raumzeit-Kontinuum herrühren. Solcherart erhält bei Einstein selbst die unbemerkt übernommene Deutung im Sinne der Konfigurationstransformation philosophisch einen objektiv idealistischen Gehalt. Das feldfreie, immaterielle Kontinuum ist nach dieser

[15] JÁNOSSY, L.—ELEK, T.: A relativitáselmélet filozófiai problémái (Die philosophischen Probleme der Relatitivitätstheorie), zit. Ausgabe (ungarisch), pp. 62 und 99. Weiterhin: LAUE, M.: Die Relativitätstheorie, zit. Ausgabe, Bd. I., p. 27.

[16] EINSTEIN, A.: l. c., pp. 27/32.

Konzeption etwas geistig Existentes, welches mit der Fähigkeit der Arbeitsleistung, mit Energie durchdrungen ist. Auf Kosten dieses Energievorrates vollzieht sich das Anwachsen von Energie und Masse des beschleunigten Massenpunktes.

Es ist der Mühe wert, hier an einen Irrtum des jungen Einstein in seiner ersten Publikation über die spezielle Relativitätstheorie zu erinnern. Im letzten Abschnitt seiner Studie »*Über die Elektrodynamik bewegter Körper*« (1905) behandelte er »*die Dynamik des langsam sich beschleunigenden Elektrons*«. Hier führte er jedoch den Begriff der Minkowski-Kraft noch nicht ein, sondern bezeichnete die Newtonschen Bewegungsgleichungen und das Prinzip der speziellen Relativität irrtümlich als miteinander in Einklang stehende Zusammenhänge. Entsprechend erhielt er auch für die transversale Masse einen unzutreffenden Wert.[17] Dieser Irrtum Einsteins wurde ein Jahr später von MAX PLANCK richtiggestellt,[18] worauf auch LAUE hingewiesen hat.[19] Max Planck begnügte sich jedoch in seiner Berichtigung mit dem Hinweis auf die Koordinatensysteme, die miteinander durch die Formeln der Lorentz-Transformation verbunden sind, ohne auf einen anderen Aspekt einzugehen: da die unterschiedlichen Geschwindigkeiten dieser Koordinatensysteme die Folge *beschleunigender Einwirkungen* sind (handelt es sich doch um *beschleunigte* Elektronen) führt die Lorentz-Transformation eben die vor der Beschleunigung gültigen Parameter der Elektronen in die nach der Beschleunigung gültigen Werte über.

Abschließend wollen wir zusammenfassen, was nun eigentlich *die Lorentz-Invarianz der Vierervektoren in der materialistischen, d. h. auf dem Lorentz-Prinzip fußenden Deutung im Sinne der Konfigurationstransformation besagt.* Wie wir das an den Beispielen von Verschiebung, Geschwindigkeit, Impuls, Beschleunigung und Kraft in der vierdimensionalen Schreibweise deutlich gemacht haben, handelt es sich hier in erster Linie nicht darum, daß die Lorentz-Transformation die Vierervektoren selbst — wie in der Einsteinschen Deutung — unverändert läßt und lediglich deren Repräsentation in einem Koordinatensystem in ein anderes überführt. Im Gegenteil: Die Lorentz-Transformation beschreibt hier die Übertragung eines physikalischen Systems aus dem Zustand Q vor der Beschleunigung in den Zustand Q' nach der Beschleunigung in ein und demselben Koordinatensystem. Unterdessen verändern sich die den Zustand des physikalischen Systems definierenden Vierervektoren selbst, *Lorentz-invariant* bleiben hingegen

[17] Vgl.: Magyar Fizikai Folyóirat (Ungarische Zeitschrift für Physik), Bd. *III.* 464 (1955), ungarisch.

[18] PLANCK, M.: Das Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 4, 136—141 (1906).

[19] LAUE, M.: A fizika története (Die Geschichte der Physik), Gondolat Verlag, Budapest 1960, p. 27 (ungarisch).

1. die Absolutwerte der ineinander transformierten Vierervektoren [vgl. (20)];

2. die Form jener Vektorengleichungen, die den Zusammenhang der Vierervektoren untereinander beschreiben [vgl. (20), (27), (32) und (42)]. Mit anderen Worten: die objektiven Zusammenhänge der durch die Vierervektoren ausgedrückten physikalischen Größen werden durch die adiabatische Beschleunigung des physikalischen Systems nicht verändert.

Zusammenfassung

Das Einsteinsche Begriffssystem der relativistischen Mechanik enthält folgende logische und theoretische Schwächen:

1. In der Welt der Inertialsysteme kann weder die Existenz von Ladung tragenden, noch von elektrisch neutralen *Massenpunkten*, noch auch die Existenz von physikalischen, aus Massenpunkten bestehenden Körpern und Systemen gesetzt werden, weil all diese Objekte vermöge ihrer Gravitations-, ihrer elektromagnetischen und anderweitigen Wirkungen den postulierten »feldfreien« Charakter des gegebenen Bereiches aufheben.

2. In der Welt der Inertialsysteme gibt es keine Möglichkeit, das Auftreten von *Geschwindigkeitsänderungen und Krafteinwirkungen* zu setzen, wie dies Einstein beispielsweise beim Aufschreiben der relativistischen Bewegungsgleichung der bewegten Masse getan hat [s. hierzu die Formel (42)], hat doch Einstein in diesem Bereich selbst die Ausschließlichkeit der gleichförmigen Bewegung postuliert. Das Auftreten von Krafteinwirkungen ist hier nur auf eine einzige Art und Weise denkbar: aufgrund jener inakzeptablen Newton—Einsteinschen Hypothese, daß *das leere feldfreie Kontinuum selbst physikalische Wirkungen ausübt*, ponderomotorische Kräfte auf die Massenpunkte und physikalischen Körper wirken läßt.

3. Das gesamte Begriffssystem der »Viererwelt« der Inertialsysteme fußt auf der hypostasierten Deutung der Lorentz-Invarianz des »Vierer-Bogenelementquadrats« im Sinne der Koordinatentransformation. Aus diesem Grunde entbehren die in gleicher Weise gedeutete Lorentz-Invarianz sämtlicher Vierervektoren sowie die ebenso gedeutete Kovarianz der mit Hilfe dieser Vierervektoren formulierten Bewegungsgleichungen und anderweitigen mathematisch formulierten physikalischen Gesetze gegen die Lorentz-Transformation und nicht zuletzt die gleiche Deutung aller relativistischen Effekte jeden realen physikalischen Inhaltes. Alle diese Zusammenhänge können nur aufgrund der Deutung im Sinne der Konfigurationstransformation, aufgrund des Lorentz-Prinzips eine reale, d. h. eine Erklärung erhalten, die auf der Berücksichtigung physikalischer Wechselwirkungen zwischen materiellen Systemen fußt. Vom Einsteinschen Begriff der Inertialsysteme muß deshalb auf die Lorentz-Systeme übergegangen werden.

4. Das ganze, auf dem Fundament der Einsteinschen Postulate ruhende Gebäude der speziellen Relativitätstheorie vermag die Probe auch auf seine innere logische Vollkommenheit nicht zu bestehen. Die Anwendung der Theorie der Vierervektoren auf die relativistische Mechanik führt über die ursprünglichen Postulate hinaus und hat zur Folge, daß Einstein, ohne es zu merken, selbst auch in die Deutung im Sinne der Konfigurationstransformation verfällt. Dieser *logischen Inkonsequenz* sind die in der relativistischen Mechanik *tatsächlich erzielten Erfolge* der Theorie zu verdanken. Zur Vermeidung der logischen Widersprüche und der platonisierenden Mystifikationen ist es nötig, die Theorie von Anfang an auf die mit dem gleichen mathematischen Apparat arbeitende Deutung im Sinne der Konfigurationstransformation, d. h. auf das Lorentz-Prinzip aufzubauen.

Dr. Tibor ELEK, Budapest, XI., Műegyetem rakpart 3/9, Ungarn