

# ERGEBNISSE ÜBER MATRIXALGORITHMEN ZUR LÖSUNG LINEARER UND NICHTLINEARER UNGLEICHHEITEN\*

Von

F. FAZEKAS

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 16. November 1969)

Vorgelegt von Prof. Dr. P. MICHELBERGER

1. Es wird zuerst ein gewisser Matrixalgorithmus SMA (und seine Sprungform SMS) für verschiedene linearalgebraische Zwecke, z. B. für *Rangerzeugung* (SrMA), *Inversion* einer Matrix (SiMA) als Vorbereitung aufgezeigt. Dann wird darauf der *Lösungs-Matrixalgorithmus* (SiMA) für ein allgemeines *lineares* Ungleichheits- und Gleichungssystem, sonst mit interessanten theoretischen und methodischen Erfahrungen angebaut. Endlich kommt seine Anwendung bei *nichtlinearen* Verhältnissen, samt einer gewissen Verbesserung und mit Schlußbemerkungen.

Unser SMA, SMS und seine Varianten hatten schon mehrmal eine Rolle in unseren Aufsätzen [1, 2] und größeren Arbeiten [3, 4] usw. als *Simplex-Matrixalgorithmus* (SMA) und *-Matrixsprung* (SMS) zur Lösung *linearer Optimierungen und verwandter Aufgaben* (z. B. zu Transportoptimierung, ganzzahlige bzw. quadratische Optimierung, TSCHEBYSCHJEFF-Approximation usw.) gespielt, diese Beziehungen werden hier also nur erwähnt, aber *nicht behandelt*. Schon hier kann man die *günstige Programmierungserfahrungen* des SMA, z. B. auf dem ELLIOTT-803-Automat und für die ALGOL-Sprache aussprechen.

2. Es sei eine *Matrix*  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_0$  vom Typ  $(n \times m)$  mit Spaltenvektoren  $\mathbf{a}_j$  und Zeilenvektoren  $\mathbf{a}^i$  und Elementen  $a_{ij}$  angegeben, d. h.

$$\mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A} = [\mathbf{a}_j] = [\mathbf{a}^i] = [a_{ij}] \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (1a)$$

Um ihre Rangzahl  $r = \rho(\mathbf{A}) \leq \min(n, m)$  zu bestimmen, tauscht man zuerst einen Vektor  $\mathbf{a}_1$  von  $\mathbf{A}_0$  mit einem Vektor  $\mathbf{e}_k$  der Ausgangs- (Einheits-) *Basis*

$$\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{E} = [\mathbf{e}_h] = [\mathbf{e}^i] = [\delta_{ih}] \quad (i, h = 1, 2, \dots, n) \quad (1b)$$

aus und bekommt so die Matrizen

$$\mathbf{A}'_1 = \mathbf{A}_0 - (\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_k) \mathbf{e}^1, \quad \mathbf{B}'_1 = \mathbf{E} + (\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_k) \mathbf{e}^k. \quad (2a,b)$$

\* Geschrieben während der Fachreise *Lyon—Grenoble—Paris* im März—Juni 1969; teilweise vorgetragen an den Technischen Hochschulen von *Aachen* und *Zürich*, französisch im Institut Poincaré von *Paris* im Juni 1969.

$\mathbf{B}_1$  ist eine *neue Basis*, wenn ihre Determinante

$$\det(\mathbf{B}_1) \equiv |\mathbf{B}_1| = |\mathbf{E} + (\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_k) \mathbf{e}^k| = |\mathbf{E} + (\mathbf{a}_{kl} - 1) \mathbf{e}_k \mathbf{e}^k| = a_{kl} \equiv \mathbf{e}^k \mathbf{a}_l \neq 0 \quad (2c)$$

ist, d. h. die Austauschvektoren  $\mathbf{a}_l$  und  $\mathbf{e}_k$  nichtorthogonal, das Pivotelement  $a_{kl}$  nicht gleich Null sind. Späterhin soll man die Matrix  $\mathbf{A}'_1$  auf die neue Basis  $\mathbf{B}_1$  ( $a_{kl} \neq 0$ ) transformieren, uzw. durch ihr Links-Multiplizieren mit der Inverzbasis  $\mathbf{B}_1^{-1}$ , d. h. (mit  $\gamma \equiv 1/a_{kl}$ )

$$\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}'_1 = [\mathbf{E} - \gamma(\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k) \mathbf{e}^k] \cdot [\mathbf{A}_0 - (\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_l], \quad (3a)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 - \gamma(\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k)(\mathbf{a}^k + \mathbf{e}_l); \quad (3b)$$

ihre Vektoren sind offenbar

$$\mathbf{a}_j^{(1)} = \mathbf{a}_j - \delta_j(\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k) [j \neq l, \delta_j = a_{kj} \gamma], \quad \mathbf{a}_l^{(1)} = \mathbf{e}_k - \gamma(\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k). \quad (3c)$$

Die Matrix  $\mathbf{A}_1$  ist also die (auf  $\mathbf{B}_1$ ) transformierte Form der (von  $\mathbf{A}_0$  durch Vektoraustausch) modifizierten Matrix  $\mathbf{A}'_1$ . Der bisherige *erste Schritt* ( $\text{SMA}_1$ ) steckt einen Basisvektor  $\mathbf{e}_k$  in die Matrix  $\mathbf{A}_0$  (statt dem nichtorthogonalen Vektor  $\mathbf{a}_l$ , sonst in die Basis  $\mathbf{B}_0$  umgekehrt) ein, dann transformiert er die so modifizierte Matrix  $\mathbf{A}'_1$  auf die neue Basis  $\mathbf{B}_1$  in die Form  $\mathbf{A}_1$ .

Auf Grund des ersten Schrittes läßt sich *der ganze Algorithmus* (SMA) so erklären: man steckt je eins die Basisvektoren  $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_q}, \dots, \mathbf{e}_{k_{r-1}}$  (die offenbar linear unabhängig sind) in die Matrizen  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_q, \dots, \mathbf{A}_{r-1}$  (statt den, zu ihrem Paar nichtorthogonalen Vektoren  $\mathbf{a}_l, \mathbf{a}_{l_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}_{l_q}^{(q)}, \dots, \mathbf{a}_{l_{r-1}}^{(r-1)}$ , sonst in die Basen  $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_q, \dots, \mathbf{B}_{r-1}$  umgekehrt) ein, *inzwischen* transformiert je eins die so modifizierte Matrizen  $\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \dots, \mathbf{A}'_{q+1}, \dots, \mathbf{A}'_r$  auf die neuen Basen  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}, \dots, \mathbf{B}_r$  in die Formen  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{q+1}, \dots, \mathbf{B}_r$ , immer beziehungsweise. Nach diesen Richtlinien ergibt sich *der zweite Schritt* ( $\text{SMA}_2$ ) kurz so:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{B}_2^{-1} \mathbf{A}'_2 &= [\mathbf{B}_1 + (\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_{k_1}) \mathbf{e}^{k_1}] \cdot \mathbf{A}'_2 = [\mathbf{E} - \gamma_1(\mathbf{a}_{l_1}^{(1)} - \mathbf{e}_{k_1}) \mathbf{e}^{k_1}] \mathbf{B}_1^{-1} \cdot \\ &\cdot [\mathbf{A}'_1 - (\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_{k_1}) \mathbf{e}^{l_1}] = [\mathbf{E} - \gamma_1(\mathbf{a}_{l_1}^{(1)} - \mathbf{e}_{k_1}) \mathbf{e}^{k_1}] \cdot [\mathbf{A}_1 - (\mathbf{a}_{l_1}^{(1)} - \mathbf{e}_{k_1}) \mathbf{e}^{l_1}], \quad (4a, b, c.) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \gamma_1(\mathbf{a}_{l_1}^{(1)} - \mathbf{e}_{k_1})(\mathbf{a}_{(1)}^{k_1} + \mathbf{e}^{l_1})}} \quad (\gamma_1 \equiv 1/a_{k_1 l_1}^{(1)}),$$

$$|\mathbf{B}_2| = |\mathbf{B}_1 \cdot [\mathbf{E} + (\mathbf{a}_{l_1}^{(1)} - \mathbf{e}_{k_1}) \mathbf{e}^{k_1}]| = |\mathbf{B}_1| \cdot |\mathbf{B}_{12}| = a_{k_1} a_{k_1 l_1}^{(1)} \neq 0;$$

dann ein allgemeiner, z. B.  $q + 1$ -ter Schritt des Algorithmus ( $\text{SMA}_{q+1}$ ).

gleichzeitig die *rekursive Formel* des SMA noch kürzer so:

$$\mathbf{A}_{q+1} \equiv \mathbf{B}_{q+1}^{-1} \mathbf{A}'_{q+1} = \mathbf{A}_q - \gamma_q (\mathbf{a}_{l_q}^{(q)} - \mathbf{e}_{k_q}) (\mathbf{a}_{l_q}^{k_q} + \mathbf{e}^{l_q}), \quad (5a,b)$$

$$q+1 = 1, 2, \dots, r, \quad \gamma_q \equiv 1/a_{k_q l_q}^{(q)}, \quad |\mathbf{B}_{q+1}| = \prod_{p=0}^q a_{k_p l_p}^{(p)} \neq 0.$$

Unser SMA *endet automatisch* dadurch, daß alle freien Vektoren  $\mathbf{a}_j^{(r)}$  ( $j \neq l_q$ ) der Matrix  $\mathbf{A}_r$  schon orthogonal zu allen freien Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  ( $i \neq k_q$ ) sind, also

$$\underline{\underline{\mathbf{e}^i \mathbf{a}_j^{(r)} \equiv \mathbf{a}_{ij}^{(r)} = 0}} \quad (i \neq k_q, j \neq l_q, q = 0, 1, \dots, r-1). \quad (6)$$

Man kann schon nicht mehr einen freien Basisvektor  $\mathbf{e}_i$  ( $i \neq k_q$ ) regulär ( $\mathbf{a}_{ij}^{(r)} \neq 0$ ) in die Matrix  $\mathbf{A}_r$  statt ihren freien Vektoren  $\mathbf{a}_j^{(r)}$  ( $j \neq l_q$ ) hineinstecken, alle  $\mathbf{a}_j^{(r)}$  ( $j \neq l_q$ ) sind also *kompatibel* mit den, durch den eingesteckten Basisvektoren  $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_q}, \dots, \mathbf{e}_{k_{r-1}}$ , generierten Unterraum  $E_n^{(r)}$  des euklidischen Raumes  $E_n$ . Die Anzahl  $r$  dieser generierenden Vektoren  $\mathbf{e}_{k_q}$ , oder der einsteckenden algorithmischen *Schritte*  $\text{SMA}_{q+1}$  liefert uns offenbar die gesuchte *Rangzahl*  $r = \varrho(\mathbf{A})$ .

3. Unseren SMA kann man so beschleunigen, daß man 2, 3, . . . oder alle  $r$  Schritte *in einem Sprung* zusammenfaßt. Unter Voraussetzung des letzten günstigen Falles und der speziellen (uzw. längs der Hauptdiagonale) Auswahl der (von Null verschiedenen) Pivotelemente  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}^{(r-1)}$  (d. h.  $k_q = l_q = q+1$ ), macht man den entsprechenden *Gruppenaustausch*

$$\mathbf{A}_R \equiv [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r] \leftrightarrow [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r] \equiv \mathbf{E}_R \quad (7a)$$

mit der regulären Pivotmatrix  $\mathbf{A}_{rr}$ ,  $|\mathbf{A}_{rr}| \neq 0$ , dann die Transformation der Matrix  $\mathbf{A}'_r = [\mathbf{E}_R, \mathbf{A}_M]$  auf die Basis

$$\mathbf{B}_r = [\mathbf{A}_R, \mathbf{E}_N], \quad |\mathbf{B}_r| = |\mathbf{A}_R, \mathbf{E}_N| = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{rr}| = \prod_{q=1}^r a_{qq}^{(q-1)} \neq 0 \quad (7b)$$

in die Form  $\mathbf{A}_r$  sprungweise (also von  $\mathbf{A}_0$  ausgehend, unmittelbar) durch unsere *Formel* (SMS)

$$\mathbf{A}_r \equiv \mathbf{B}_r^{-1} \mathbf{A}'_r = \mathbf{A}_0 - (\mathbf{A}_R - \mathbf{E}_R) \mathbf{\Gamma}_{rr} (\mathbf{A}^R + \mathbf{E}^R) \quad (\mathbf{\Gamma}_{rr} \equiv \mathbf{A}_{rr}^{-1}), \quad (8a)$$

oder durch ihre ausführliche Form ( $\widetilde{\text{SMS}}$ )

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}_{rm} \\ \mathbf{A}_{nr} & \mathbf{A}_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} - \mathbf{E}_{rr} \\ \mathbf{A}_{nr} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{\Gamma}_{rr} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} + \mathbf{E}_{rr} & \mathbf{A}_{rm} \\ \Delta_{rm} \equiv \mathbf{\Gamma}_{rr} \mathbf{A}_{rm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{rr} & \Delta_{rm} \\ -\mathbf{A}_{nr} \mathbf{\Gamma}_{rr} & \mathbf{A}_{nm} - \mathbf{A}_{nr} \Delta_{rm} \end{bmatrix}. \quad (8b)$$

Das gilt sinngemäß *auch* für  $1, 2, \dots, \varrho \leq r$ , aber bei  $\varrho = r$  (Rangzahl)

mit der (aus den vorigen folgenden) Eigenschaft  $\mathbf{A}_{mn}^{(r)} = \mathbf{A}_{nm} - \mathbf{A}_{nr} \mathbf{\Gamma}_{rr} \mathbf{A}_{rm} = \mathbf{0}$ . Daraus kann man wohl die *Struktur der Endmatrix*  $\mathbf{A}$  beurteilen, was später sehr nützlich wird.

Im praktischen Rechnen arbeitet man statt (7a, b) und (8a) mit *ihren allgemeineren Formen*

$$\mathbf{A}_L \equiv [\mathbf{a}_l, \mathbf{a}_{l_1}, \dots, \mathbf{a}_{l_{r-1}}] \leftrightarrow [\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_{r-1}}] \equiv \mathbf{E}_K, \quad (9a, b)$$

$$|\mathbf{B}_r| = |\mathbf{A}_{KL}| = \prod_{q=0}^{r-1} a_{k_q l_q} \neq 0,$$

$$\mathbf{A}_r \equiv \mathbf{B}_r^{-1} \mathbf{A}'_r = \mathbf{A}_0 - (\mathbf{A}_L - \mathbf{E}_K) \mathbf{\Gamma}_{KL} (\mathbf{A}^K + \mathbf{E}^L) \quad (\mathbf{\Gamma}_{KL} \equiv \mathbf{A}_{KL}^{-1}), \quad (9c)$$

aber jetzt durchschneiden sich die zu (8b) sinngemäß analogen Blöcke und darum zeigen sie die Struktur von  $\mathbf{A}_r$  jetzt *nicht so anschaulich*, wie dieselben von (8b).

4. Aus den vorigen folgt unmittelbar, daß die Endmatrix  $\mathbf{A}_r$  (des SMA oder SMS) *im Falle der Regularität* von  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_0$ , d. h. bei

$$n = m = r \quad [\text{Typ}(\mathbf{A}) = n \times m, \quad \varrho(\mathbf{A}) = r], \quad (10)$$

so bei  $\mathbf{A}_R = \mathbf{A}^R = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}_R = \mathbf{E}^R = \mathbf{E}$  in der Art

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A} - (\mathbf{A} - \mathbf{E}), \quad \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{E}) = \mathbf{A} - (\mathbf{A} - \mathbf{E}) - (\mathbf{E} - \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}^{-1} \quad (11)$$

genau gleich mit der *Invers* von  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_0$ . Wendet man also den *speziellen* (uzw. der Wahl  $k_q = l_q = q+1$  entsprechenden) SiMA

$$\mathbf{A}_{q+1} \equiv \mathbf{B}_{q+1}^{-1} \mathbf{A}'_{q+1} = \mathbf{A}_q - \frac{1}{a_{q+1, q+1}^{(q)}} (\mathbf{a}_{q+1}^{(q)} - \mathbf{e}_{q+1}) (\mathbf{a}_{q+1}^{(q)+1} + \mathbf{e}^{q+1}) \quad (12)$$

$$(q+1 = 1, 2, \dots, n; a_{q+1, q+1}^{(q)} \neq 0)$$

auf eine reguläre Matrix  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_0$  ( $n = m = r$ ) an, liefert er nach  $n$  Schritten die Inversmatrix  $\mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{A}_n$ . Inzwischen soll man im praktischen Rechnen *eventuell* bei einigen Schritten Spaltenaustausche verwirklichen (und diese auch zurückkehrend in Betracht ziehen), damit die Forderung  $a_{q+1, q+1}^{(q)} \neq 0$  immer erfüllt sei.

5. Und wie kann man unseren SMA und SMS *zur Lösung eines allgemeinen* ( $n \neq m$ , oder  $n = m > r$ , oder  $n > m = r$ , oder  $m > n = r$ ) *linearen Ungleichheits-, speziell Gleichungssystem* (US bzw. GS) anwenden? Ohne Be-

schränkung der Allgemeinheit darf sich ein ursprüngliches US [eventuell nach Multiplizieren mit  $(-1)$  einiger Ungleichheiten] in der Form

$$\underset{(n \times m)}{\mathbf{A}_0} \underset{(n)}{\mathbf{x}} \equiv [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_{10} \\ \dots \\ a_{j0} \\ \dots \\ a_{m0} \end{bmatrix} \equiv \underset{(n)}{\mathbf{a}_0} \quad (13)$$

zeigen. Durch linkseitige Einführung des nichtnegativen Differenzvektors  $\mathbf{u} = [u_i] \leq \mathbf{0}$  und durch gewisse Umordnungen ergibt sich daraus das (erweiterte) äquivalente Gleichungssystem (ÄGS)

$$\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_0; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m] \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ \dots \\ -x_j \\ \dots \\ -x_m \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{a}_0; \mathbf{A}_0] \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}_0(-\mathbf{x}) \equiv \underline{\underline{\hat{\mathbf{A}}_0(-\hat{\mathbf{x}})}} \quad (\mathbf{u} \geq \mathbf{0}) \quad (13b)$$

Und wenn man jetzt zweckmäßig die nichtorthogonalen Vektoraustausche

$$u_1 \mathbf{e}_1 \leftrightarrow \mathbf{a}_1(-x_1), \dots, u_{q+1} \mathbf{e}_{q+1} \leftrightarrow \mathbf{a}_{q+1}^{(q)}(-x_{q+1}), \dots, u_r \mathbf{e}_r \leftrightarrow \mathbf{a}_r^{r-1}(-x_r) \quad (14a)$$

$$a_{11} \neq 0 \qquad a_{q+1, q+1}^{(q)} \neq 0 \qquad a_{rr}^{r-1} \neq 0$$

inzwischen die Transformationen der erweiterten Vektorgleichung auf Basen  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{q+1}, \dots, \mathbf{B}_r$  — genau durch unseren SiMA, als SiMA — nacheinander verwirklicht, so ergeben sich die expliziten Herstellungen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -u_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_m \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{q+1} \\ u_{q+2} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}}_{q+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -u_1 \\ \vdots \\ -u_{q+1} \\ -x_{q+2} \\ \vdots \\ -x_m \end{bmatrix}, \dots \quad (14b)$$

$$\begin{bmatrix} x_r \\ u_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}}_r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -u_1 \\ \vdots \\ -u_r \\ -x_{r+1} \\ \vdots \\ -x_m \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathbf{A}}_r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -u_r \\ \vdots \\ -x_m \end{bmatrix},$$

mit

$$\hat{\mathbf{A}}_{q+1} \equiv [\mathbf{a}_0^{(q+1)}, \mathbf{A}_{q+1}] = [\mathbf{a}_0^{(q)} - \delta_0^{(q)}(\mathbf{a}_{q+1}^{(q)} - \mathbf{e}_{q+1})]; \quad (14c)$$

$$\mathbf{A}_q - \gamma_q(\mathbf{a}_{q+1}^{(q)} - \mathbf{e}_{q+1})(\mathbf{a}_q^{q+1} + \mathbf{e}^{q+1}), \quad q+1 = 1, 2, \dots, r.$$

Mit Hilfe unseres erweiterten SMS kann man schreiben, daß die *allgemeine Lösung des US*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta_{r0}^{(r)} & \mathbf{\Gamma}_{rr} & \Delta_{rm} \\ \mathbf{a}_{n0} - \mathbf{A}_{nr} \delta_0^{(r)} & -\mathbf{A}_{nr} \mathbf{\Gamma}_{rr} & \mathbf{0}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{u}_r \\ -\mathbf{x}_m \end{bmatrix} \equiv \\ & \begin{bmatrix} \delta_{r0}^{(r)} \equiv \mathbf{\Gamma}_{rr} \mathbf{a}_{r0}, & r = \varrho(\mathbf{A}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{u}_r \\ -\mathbf{x}_m \end{bmatrix} \quad (15) \\ & \equiv \begin{bmatrix} \delta_{r0}^{(r)} & + \mathbf{\Gamma}_{rr}(-\mathbf{u}_r) + \Delta_{rm}(-\mathbf{x}_m) \\ \mathbf{a}_{r0}^{(r)} & -\mathbf{A}_{nr} \mathbf{\Gamma}_{rr}(-\mathbf{u}_r) + \mathbf{0}_{nm}(-\mathbf{x}_m) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit dem ganz freien Parameter  $\mathbf{x}_m$  und mit dem nichtnegativen, sogar auch durch die *Kompatibilitätsbedingung* (KB)

$$\underline{\underline{\mathbf{u}_n = \mathbf{a}_{n0}^{(r)} - \mathbf{A}_{nr} \mathbf{\Gamma}_{rr}(-\mathbf{u}_r) \geq \mathbf{0} \quad (\mathbf{u}_r \geq \mathbf{0})}} \quad (16a)$$

beschränkten Parameter  $\mathbf{u}_r$  ist.

Hat man speziell *ein lineares GS*, so soll offenbar  $\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$  und auch  $\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$  sein, folglich die vorige KB sich in die Form

$$\underline{\underline{\mathbf{a}_{n0}^{(r)} = \mathbf{0}}} \quad (16b)$$

*vereinfachen*. Erfüllt eventuell *nicht* die KP, so hat das US bzw. GS *gar keine Lösung*.

Im Fall der *Regularität*, d. h. bei  $n = m = r$  ergibt sich die Lösung des US bzw. GS nach  $n$  Schritten in der einfachen Form (ohne KB)

$$\mathbf{x}_n = \hat{\mathbf{A}}_n(-\hat{\mathbf{u}}_n) \equiv \delta_0^{(n)} + \mathbf{A}_n(-\mathbf{u}_n), \text{ bzw. (bei } \mathbf{u}_n = \mathbf{0}) \mathbf{x}_n = \delta_0^{(n)}, \quad (17a)$$

$$\text{nebst } \mathbf{A}_n = \mathbf{A}_0^{-1} \equiv \mathbf{\Gamma}_0 \text{ und } \delta_0^{(n)} = \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{a}_0. \quad (17b)$$

im Einklang mit (11), (12), (14b), und (15).

Im praktischen Rechnen arbeitet man statt (12) mit (5a) als SIMA, aber so *verliert* (15)—wegen Durchschnitten der Blöcke—ihre anschauliche Struktur.

**Beispiel 1.** Zu lösen ist das (ursprüngliche) *lineare Ungleichheitssystem*

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ 3 & -6 & 1 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 11 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ -21 \\ 7 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a}_0.$$

oder statt dessen das äquivalente (erweiterte) *lineare Gleichungssystem*

$$(\mathbf{0} \leq) \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ -21 & 3 & -6 & 1 & 1 & 7 & 5 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 3 & 11 & 5 \\ 7 & -2 & 2 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ 14 & 2 & 4 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \\ -x_5 \\ -x_6 \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathbf{A}}_0(-\hat{\mathbf{x}}),$$

uzw. durch unseren SIMA nach (5a). —

*Erster Schritt* ( $a_{12} = 1$ , so  $u_1 \leftrightarrow x_2$ ):

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \hat{\mathbf{A}}_0 - \frac{1}{a_{12}} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{e}_1)(\hat{\mathbf{a}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^2) = \hat{\mathbf{A}}_0 - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} [3 \mid 3 \ 2 \ 1 \ 2 \ 8 \ 2],$$

$$\mathbf{v}_1 \equiv \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ -3 & 21 & 6 & 7 & 13 & 55 & 17 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & -8 & -2 & -3 & -5 & -21 & -7 \\ 2 & -10 & -4 & -2 & -6 & -26 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -u_1 \\ -x_3 \\ -x_4 \\ -x_5 \\ -x_6 \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathbf{A}}_1(-\hat{\mathbf{y}}_1).$$

*Zweiter Schritt* ( $a_{33}^{(1)} = 1$ , so  $u_3 \leftrightarrow x_3$ ):

$$\hat{\mathbf{A}}_2 = \hat{\mathbf{A}}_1 - \frac{1}{a_{33}^{(1)}} (\mathbf{a}_3^{(1)} - \mathbf{e}_3)(\hat{\mathbf{a}}_3^1 + \hat{\mathbf{e}}^3) = \hat{\mathbf{A}}_1 - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} [1 \mid -2 \ -2 \ 2 \ -1 \ -5 \ 1],$$

$$\mathbf{v}_2 \equiv \begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \\ x_3 \\ u_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ -10 & 35 & 20 & -7 & 20 & 90 & 10 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 4 & -14 & -8 & 3 & -8 & -36 & -4 \\ 4 & -14 & -8 & 2 & -8 & -36 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -u_1 \\ -u_3 \\ -x_4 \\ -x_5 \\ -x_6 \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathbf{A}}_2(-\hat{\mathbf{y}}_2).$$

Dritter Schritt ( $a_{26}^{(2)} = 10$ , so  $u_2 \leftrightarrow x_6$ ):

$$\hat{\mathbf{A}}_3 = \hat{\mathbf{A}}_2 - \frac{1}{a_{26}^{(2)}} (a_6^{(2)} - e_2)(\hat{a}_{(2)}^2 + \mathcal{E}^6) = \hat{\mathbf{A}}_2 - \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} [-10 \mid 35 \ 20 \ -7 \ 20 \ 90 \ 11],$$

$$\mathbf{v}_3 \equiv \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \\ x_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1,5 & 1 & -0,3 & 1 & 4 & -0,1 \\ -1 & 3,4 & 2 & -0,7 & 2 & 9 & 0,1 \\ 2 & -5,5 & -4 & 1,7 & -3 & -14 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -u_1 \\ -u_3 \\ -x_4 \\ -x_5 \\ -u_2 \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathbf{A}}_3(-\hat{\mathbf{y}}_3).$$

Unser Algorithmus hört jetzt automatisch auf, weil die noch freien Elemente  $a_{ij}^{(3)} (i \neq k = 1, 2, 3; j \neq l = 2, 3, 6; \text{ also } i = 4, 5; \uparrow j = 1, 4, 5)$  alle gleich Null, also für das Pivotelement  $a_{kl}^{(3)}$  unbrauchbar sind. Die Rangzahl  $r$  der ursprünglichen Matrix  $\mathbf{A}_0$  und wegen  $a_{40}^{(3)} = a_{50}^{(3)} = 0$  dieselbe  $\hat{r}$  der erweiterten Matrix  $\hat{\mathbf{A}}_0$  ist gleich der algorithmischen Schrittzahl  $p$ , d. h.

$$r \equiv \varrho(\mathbf{A}_0) = \hat{r} \equiv \varrho(\hat{\mathbf{A}}_0) = p \equiv \max q(\hat{\mathbf{A}}_q) = 3.$$

Das End-Gleichungssystem  $\mathbf{v}_3 = \hat{\mathbf{A}}_3(-\hat{\mathbf{y}}_3)$  gibt uns also die allgemeine Lösung des Start-Gleichungssystems an, bzw. die Kompatibilitätsbedingung

$$\mathbf{0} \leq u_5 \equiv \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & -0,8 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \end{bmatrix} \equiv a_{50}^{(3)} + \mathbf{A}_{53} \mathbf{\Gamma}_{33} u_3 \quad (u_3 \geq 0)$$

und die allgemeine Lösung für die Haupt-Unbekannten

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3 \equiv \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -0,3 & -0,1 \\ 2 & -0,7 & 0,1 \\ -4 & 1,7 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,5 & 1 & 4 \\ 3,4 & 2 & 9 \\ -5,5 & -3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \delta_{30}^{(3)} - \mathbf{\Gamma}_{33} u_3 - \Delta_{30} x_0; \end{aligned}$$

$$u_1 \geq 0, u_3 \geq 0, u_2 \geq 0; x_1 \cong 0, x_4 \cong 0, x_5 \cong 0.$$

Im Falle des (ursprünglichen) Gleichungssystem sind alle  $u_i = 0$ ; wegen  $a_{40}^{(3)} = a_{50}^{(3)} = 0$  erfüllt sich die Kompatibilität.

Damit ist unsere Aufgabe ganz gelöst.



6. Betrachten wir endlich, wie man eventuell unseren SMS zur Lösung eines *nichtlinearen, reellen* US, oder GS anwenden kann. Es sei also ein *ursprüngliches* US

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}_0, \quad \text{mit } \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^{(2)} \quad \text{für } \forall \mathbf{x} \in K \subset E_m, \quad (18a)$$

d. h. mit stetigen  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{a}'(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{a}''(\mathbf{x}) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{x})$  in einem konvexen Bereich  $K \subset E_m$  gegeben. Weiter liege eine grobe annähernde Lösung  $\mathbf{x}^{(0)}$  des GS  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0$  auch in  $K$ , gesamt mit seiner geschlossenen  $R$ -Umgebung:  $\bar{U}_R(\mathbf{x}^{(0)}) \subset K$ . Sonst ist  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{a}_0 \in E_n$  und im allgemeinen  $n \neq m$ .

Einer einfachen Behandlung halber sei hier  $n = m$  [d. h.  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  quadratisch], sogar

$$n = m = r \equiv \rho[\mathbf{A}(\mathbf{x})] \quad \text{für } \forall \mathbf{x} \in K \quad (18a')$$

[d. h.  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  regulär:  $|\mathbf{A}(\mathbf{x})| \neq 0$  in  $K$ ]. Substituiert man  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  mit seinem TAYLOR-Polynom ersten Grades in der Umgebung von  $\mathbf{x}^{(0)}$  für *das linearisierte* US (IUS)

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}^{(0)}) + \mathbf{A}_0(\mathbf{x}^{(0)}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \leq \mathbf{a}_0 \quad (\Delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}), \quad (18b)$$

dann führt links den nichtnegativen Differenzvektor  $\Delta \mathbf{u} \in E_n$ , nebst eine Umordnung ein:

$$\Delta \mathbf{u} \approx \alpha_0(\mathbf{x}^{(0)}) + \mathbf{A}_0(\mathbf{x}^{(0)}) (-\Delta \mathbf{x}) \equiv \hat{\mathbf{A}}_0(\mathbf{x}^{(0)}) (-\Delta \hat{\mathbf{x}}) \quad (18c)$$

$$\left[ \mathbf{0} \leq \Delta \mathbf{u}, \alpha_0(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{J}(\mathbf{x}) \equiv \frac{d\mathbf{a}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right] \quad (19)$$

so erscheint das zu (13b) analoge (erweiterte) *äquivalente linearisierte Gleichungssystem* (ÄIGS), jetzt aber mit variablen (d. h. von den Annäherungen  $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(q+1)}, \dots$  abhängigen) Koeffizienten.

Unter diesen Umständen verändert sich unser *Lösungsalgorithmus* SIMA nach (14b) nur darin, daß man nach jedem, so auch dem  $q$ -ten Kleinschritte aus der expliziten Herstellung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_q \\ \Delta \mathbf{u}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{0q}^{(q)}(\mathbf{x}^{(q-1)}) \\ \alpha_{0n}^{(q)}(\mathbf{x}^{(q-1)}) \end{bmatrix} + \mathbf{A}_q(\mathbf{x}^{(q-1)}) \cdot \begin{bmatrix} -\Delta \mathbf{u}_q \\ -\Delta \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \\ \Delta \mathbf{v}^{(q)} &\equiv \alpha_0^{(q)}(\mathbf{x}^{(q-1)}) + \mathbf{A}_q(\mathbf{x}^{(q-1)}) \cdot (-\Delta \mathbf{y}^{(q)}) \end{aligned} \quad (20a)$$

bei GS-Bedingung (in den ersten  $q$  Koordinaten)  $\Delta \mathbf{u}_q = \mathbf{0}$  und bei Anfangsbedingung (in den letzten  $n - q$  Koordinaten)  $\Delta \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ , also bei *Nullbedingung*

$\Delta \mathbf{y}^{(q)} = \mathbf{0}$  den  $q$ -ten Korrektionswert  $\Delta \mathbf{x}_q = \alpha_{0q}^{(q)}(\mathbf{x}^{(q-1)})$  bestimmt,\* und damit die neuere *Lösungsannäherung*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(q)} &= \mathbf{x}^{(q-1)} + \Delta \mathbf{x}^{(q)} = \left[ \mathbf{x}^{(q-1)} \right] + \left[ \alpha_{0q}^{(q)}(\mathbf{x}^{(q-1)}) \right] & [q = 1, 2, \dots, n; \\ (\mathbf{x}_q^{(q-1)} = \mathbf{x}_q^{(0)}) & \left[ \mathbf{x}_n^{(0)} \right] & \left[ \mathbf{0} \right] & \alpha_0^{(q)} \equiv \mathbf{B}_{q,q-1}^{-1} \alpha^{(q-1)} \end{aligned} \quad (20b)$$

ausrechnet. Dann bildet man die *Funktionswerte*  $\alpha_0^{(q)}(\mathbf{x}^{(q)})$  und  $\mathbf{A}_q(\mathbf{x}^{(q)})$  für den folgenden, also  $q + 1$ -ten Kleinschritt, der — durch die Formel (12) und nach dem Muster (3c) — die neuere explizite Herstellungen als die Formel unseres »dynamischen« SdMA

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}^{(q+1)} &= [\alpha_0^{(q)} - a_{q+1}^{(q)} \gamma_{q+1}(\mathbf{a}_{q+1} - \mathbf{e}_{k+1})]_{x(q)} + \\ &+ [\mathbf{A}_q - \gamma_{q+1}(\mathbf{a}_{q+1} - \mathbf{e}_{q+1})(\mathbf{a}_q^{q+1} + \mathbf{e}^{q-1})]_{x(q)} \cdot (-\Delta \mathbf{y}^{(q+1)}) \equiv \\ &\equiv \alpha_0^{(q+1)}(\mathbf{x}^{(q)}) + \mathbf{A}_{q+1}(\mathbf{x}^{(q)}) \cdot (-\Delta \mathbf{y}^{(q+1)}) \end{aligned} \quad (21a)$$

liefert. Um schon durch die Kleinschritt-Lösungen  $\mathbf{x}^{(q)}$  ohne Schwanken, immer näher der exakten Lösung  $\mathbf{x}^{(1)}$ , so auch einer wirklichen *Konvergenzbeschleunigung* zu kommen, soll man die Auswahl jedes *Pivotelementes*  $a_{k_q k_q}^{(q)}$  an der Hauptdiagonale nach der *absoluten Engpaß-Regel*\*\*

$$\min_{i \neq k_q} |Q_i^{(q)}| \equiv \min_{i \neq k_q} \left| \frac{z_{0i}^{(q)}}{a_{ii}^{(q)}} \right| = \left| \frac{z_{0k_q}^{(q)}}{a_{k_q k_q}^{(q)}} \right| \equiv |Q_{k_q}^{(q)}| \quad (q = 1, 2, \dots, q-1) \quad (21b)$$

durchführen. Hier war — bequemlichkeitshalber — die natürliche Reihenfolge  $k_q = q + 1$  vorausgesetzt.

Nach dem letzten, also  $n$ -ten Kleinschritt entsteht für das US die Lage

$$\Delta \mathbf{x}^{(n)} = \alpha_0^{(n)}(\mathbf{x}^{(n-1)}) + \mathbf{A}_n(\mathbf{x}^{(n-1)}) \cdot (-\Delta \mathbf{u}^{(n)}) [\mathbf{0} \leq \Delta \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{A}_n(\mathbf{x}^{(n-1)}) \approx \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{x}^{(n-1)})] \quad (22a)$$

oder — mit zweckmäßiger Schreibweise — der erste Großschritt

$$\boxed{\mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n-1)} + \alpha_0^{(n)}(\mathbf{x}^{(n-1)}) + \mathbf{A}_n(\mathbf{x}^{(n-1)}) \cdot (-\Delta \mathbf{u}^{(n)}),} \quad (22b)$$

und derselbe für das GS bei  $\Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{0}$  in der Form

$$\mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n-1)} + \alpha_0^{(n)}(\mathbf{x}^{(n-1)}). \quad (22c)$$

Ist die Startannäherung  $\mathbf{x}^{(0)}$  genug nahe zur genauen Lösung  $\mathbf{x}^{(1)}$ , kann man so alle Matrizen  $\mathbf{A}_q$  an der Startstelle  $\mathbf{x}^{(0)}$  bilden und nur die Vektoren  $\alpha_0^{(q)}$  an der Stellenfolge  $\mathbf{x}^{(q-1)}$  beachten. Statt dem obigen, *dynamischen*

\*und \*\* Diese Details erinnern uns an die lineare Optimierung durch unseren SMA.

SdMA bekommt man so einen *halbdynamischen* Sd'MA für das reguläre US mit der Formel

$$\mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n-1)} + \alpha_0^{(n)}(\mathbf{x}^{(n-1)}) + \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) \cdot (-\Delta \mathbf{u}^{(n)}). \quad (23a)$$

Nimmt man auch alle Vektoren an der Startstelle  $\mathbf{x}^{(0)}$ , führt dieser *statische* SIMA zur Formel

$$\underline{\underline{\mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) \alpha_0(\mathbf{x}^{(0)}) + \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) \cdot (-\Delta \mathbf{u}^{(n)})}}, \quad (23b)$$

wo der SIMA sich also nur bis auf Inversion — ohne Ausnutzen der gleichzeitigen weiteren Korrektionsmöglichkeiten — beschränkte. Dieser Fall ist genau der erste Großschritt der NEWTON-RAPHSON-Methode (NRM<sub>I</sub>).

Wiederholt man den Großschritt (in  $n$  Kleinschritt) von Startannäherungen  $\mathbf{x}^{(I)}, \mathbf{x}^{(II)}, \mathbf{x}^{(III)}, \dots$  ausgehend etwa 1-2-3-mal bei SdMA, etwa 2-3-4-mal bei Sd'MA und etwa noch mehrmal bei SIMA (oder im großen: bei NRM), ergeben sich gewöhnlich schon kaum variable, also der genauen  $\mathbf{x}^{(I)}$  sehr naheliegende annähernde Lösungen, d. h.

$$\mathbf{x}^{(N)} \approx \mathbf{x}^{(N+1)} \approx \mathbf{x}^{(I)}. \quad (24)$$

Es ist beachtenswert, daß die sog. *modifizierte* NRM (oder SI'MA) die  $\mathbf{A}$ -Matrizen auch bei den Großschritten an der Startstelle  $\mathbf{x}^{(0)}$  rechnet.

Betrachten wir endlich die rekursiven Formeln für die Großschritte bei den 4 erwähnten Algorithmen, um ihre Beziehungen zu beleuchten (mit  $I \equiv n, I' = n-1$  und mit weiteren Vereinfachungen):

$$\begin{array}{l} \overline{\mathbf{x}^{Q+1} = \mathbf{x}^{Q+1'} + \alpha_0^{Q+1}(\mathbf{x}^{Q+1'}) + \mathbf{A}^{Q+1}(\mathbf{x}^{Q+1'}) \cdot (-\Delta \mathbf{u}^{Q+1})} \quad \left[ \overline{\text{SdMA}} \right], \\ \mathbf{x}^{Q+1} = \mathbf{x}^{Q+1'} + \alpha_2^{Q+1}(\mathbf{x}^{Q+1'}) + \mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{x}^Q) \cdot (-\Delta \mathbf{u}^{Q+1}) \quad \left[ \overline{\text{Sd'MA}} \right], \quad (25a-d) \\ \mathbf{x}^{Q+1} = \mathbf{x}^Q + \mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{x}^Q) \alpha_0(\mathbf{x}^Q) + \mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{x}^Q) \cdot (-\Delta \mathbf{u}^{Q+1}) \quad \left[ \overline{\text{SIMA}_0 \text{ NRM}} \right], \\ \underline{\underline{\mathbf{x}^{Q+1} = \mathbf{x}^Q + \mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{x}^Q) \alpha_0(\mathbf{x}^Q) + \mathbf{\Gamma}_0(\mathbf{x}^Q) \cdot (-\Delta \mathbf{u}^{Q+1})}} \quad \left[ \underline{\underline{\text{SI'MA}_0 \text{ mNRM}}} \right], \end{array}$$

wo es bei GS  $\Delta \mathbf{u}^{Q+N} = \mathbf{0}$  gibt.

Sonst kennt man aus der Literatur [5] den Beweis und die Formel der *Konvergenzgeschwindigkeit* der zwei letzten Methoden und ähnlicherweise kann man auf die *Beschleunigung* bei den zwei ersten anzeigen. — Auf Grund des Obigen ist es nicht schwer, auch den *nichtregulären* Fall zu behandeln. — Zum Schluß verweisen wir auf die *natürlichen Kontakte* dieses Abschnittes 6 mit der *nichtlinearen Optimierung* [3].

Nach dieser Behandlung und nach den erwähnten Arbeiten [1–4] kann man vielleicht den SMA, nebst seinen Anwendungsvarianten als ein Algo-

rithmus fast »für alles« in der linearen und nichtlinearen Algebra und Optimierung betrachten.

**Beispiel 2.** Zu lösen ist im Parallelepipeton

$$\mathbf{x}_u \equiv [0,3 \quad 0,3 \quad 0,3]^* \leq \mathbf{x} \equiv [x_1, \quad x_2, \quad x_3]^* \leq \mathbf{x}_0 \equiv [1, \quad 1, \quad 1]^*$$

das (ursprüngliche) *nichtlineare Ungleichheitssystem* (US) nach (18a)

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 \\ 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a}_0,$$

oder statt dessen das (erweiterte) *äquivalente nichtlineare Gleichungssystem* (ÄGS)

$$\mathbf{0} \leq \Delta \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 0 - (2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3) \\ 0 - (3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}(\mathbf{x}) \equiv \alpha_0(\mathbf{x})$$

durch die Lösung des *äquivalenten linearisierten Gleichungssystems* (ÄIGS)

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \leq \Delta \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) & 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 - (2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3) & 4x_1 & 2x_2 & -4 \\ 0 - (3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2) & 6x_1 & -4 & 2x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta x_1 \\ -\Delta x_2 \\ -\Delta x_3 \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \hat{\mathbf{A}}_0(\mathbf{x}) (-\Delta \hat{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$

uzw. mit Hilfe unseres »dynamischen« SdMA nach (20–21) in Kleinschritten.

Beginnt man mit der *nullten Approximation*  $\mathbf{x}^{(0)} = [0,5 \quad 0,5 \quad 0,5]^*$ , bekommt man das für  $\Delta \mathbf{u}$  allgemein gelöste Start-ÄIGS<sub>0</sub> nach (18c)

$$\mathbf{0} \leq \Delta \mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 1 & 1 & 1 \\ 1,25 & 2 & 1 & -4 \\ 1,00 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta x_1 \\ -\Delta x_2 \\ -\Delta x_3 \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathbf{A}}_0(\mathbf{x}^{(0)}) (-\Delta \hat{\mathbf{x}});$$

bei  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$  ist  
 $\Delta \mathbf{u} = \alpha_0(\mathbf{x}^{(0)}) > \mathbf{0}$ .

*Erster Kleinschritt* [die »Querschnitte« mit den Hauptachsenelementen sind:  $Q_1^{(0)} \equiv a_{10}/a_{11} = 0,25 < Q_3^{(0)} \equiv a_{30}/a_{33} = 1 < Q_2^{(0)} \equiv a_{20}/a_{22} = 1,25$ ] also wählt man das Pivotelement  $a_{11} \equiv 2x_1 = 1$ , den Umtausch  $\Delta u_1 \leftrightarrow \Delta x_1$  und die Pivotdyade

$$\Delta \hat{\mathbf{A}}_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{a_{11}} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_1) (\hat{\mathbf{a}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^1)_x;$$

das für  $\Delta v_1$  allgemein gelöste ÄIGS<sub>1</sub> an beliebiger Stelle  $x$  ist:

$$\Delta v_1 \equiv \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} (1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)/2x_1 & 1/2x_1 & x_2/x_1 & x_3/x_1 & & \\ -2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_3 & -2 & -2x_2 & -4 - 4x_3 & & \\ -3 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2 & -3 & -4 - 6x_2 & -4x_3 & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta u_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} \equiv \\ \equiv \hat{A}_1(x)(-\Delta \hat{y});$$

dasselbe an der Stelle  $x^{(0)}$ :

$$\Delta v_1 \equiv \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 1 & 1 & 1 \\ 0,75 & -2 & -1 & -6 \\ 0,25 & -3 & -7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta u_1 \\ -\Delta x_2 \\ -\Delta x_3 \end{bmatrix} \equiv \hat{A}_1(x^{(0)})(-\Delta \hat{y}_1);$$

bei  $\Delta y_1 = 0$  ist  
 $\Delta u_2, \Delta u_3 < 0, \Delta x_1 = 0,25$   
 und so

$$x^{(1)} \equiv x^{(0)} + \alpha_{01} x^{(0)} = [0,75 \quad 0,50 \quad 0,50]^*;$$

die Matrix  $\hat{A}_1(x)$  an der Stelle  $x^{(1)}$  ist:

$$\hat{A}_1(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -0,0417 & 0,6667 & 0,6667 & 0,6667 \\ 0,7500 & -2 & -1 & -6 \\ 0,2500 & -3 & -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zweiter Kleinschritt [die Querschnitte mit den freien Hauptachsenelementen sind:  $Q_2^{(1)} \equiv a_{20}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = -0,750, Q_3^{(1)} \equiv a_{30}^{(1)}/a_{33}^{(1)} = -0,125,$  wo also  $|Q_3^{(1)}| < |Q_2^{(1)}|$  ist] so wählt man das Pivotelement  $a_{33}^{(1)} \equiv -4x_3 = -2,$  den Umtausch  $\Delta u_3 \leftrightarrow \Delta x_3$  und die Pivotdyade

$$\Delta \hat{A}_1(x) = -\frac{1}{a_{33}^{(1)}} (a_3^{(1)} - e_3)(a_{31}^3 + e^3)_x;$$

das für  $\Delta v_2$  allgemein gelöste ÄIGS<sub>2</sub> an beliebiger Stelle ist:

$$\Delta v_2 \equiv \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{l} (-1 - 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_2)/4x_1 \\ \left. \begin{array}{l} 1 + 2x_2^2 - 4(x_2 - x_3) + \\ + (3 - 3x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2)/x_3 \end{array} \right\} \\ (3 - 3x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2)/4x_3 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} -1/4x_1 & -(2+x_2)/2x_1 & 1/4x_1 & 1 \\ 1+3/x_3 & 4(1+x_2)+(4+6x_2)/x_3 & -1-1/x_3 & -\Delta u_1 \\ 3/4x_3 & (2+3x_2)/2x_3 & -1/4x_3 & -\Delta x_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta u_1 \\ -\Delta x_2 \\ -\Delta u_3 \end{bmatrix} \equiv \hat{A}_2(x)(-\Delta \hat{y}_2);$$

dasselbe an der Stelle  $\boldsymbol{x}^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{v}_2 \equiv \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,0417 & -0,3333 & -1,6667 & 0,3333 \\ 0 & 7 & 20 & -3 \\ -0,1250 & 1,5 & 3,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta u_1 \\ -\Delta x_2 \\ -\Delta u_3 \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \hat{\mathbf{A}}_2(\boldsymbol{x}^{(1)})(-\Delta \hat{\boldsymbol{y}}_2); \end{aligned}$$

bei  $\Delta y_2 = 0$  ist  $\Delta u_2 = 0$ ,  $\Delta x_1 = 0$ ,  $\Delta x_3 = -0,1250$  und so

$$\boldsymbol{x}^{(2)} \equiv \boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}_{01,3}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = [0,7917 \quad 0,5000 \quad 0,3750]^*;$$

die Matrix  $\hat{\mathbf{A}}_2(\boldsymbol{x})$  an der Stelle  $\boldsymbol{x}^{(2)}$  ist:

$$\hat{\mathbf{A}}_2(\boldsymbol{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} -0,0012 & -0,3158 & -1,5790 & 0,3158 \\ -0,0833 & 9 & 24,6667 & -3,6667 \\ -0,0208 & 2 & 4,6667 & -0,6667 \end{bmatrix}.$$

*Dritter Kleinschritt* [man wählt das letzte freie Hauptachselement als Pivotelement, d. h.  $a_{32}^{(2)} \equiv 4(1 + x_2) + (4 + 6x_2)/x_3 = 24,6667$ ] so den Umtausch  $\Delta u_2 \leftrightarrow \Delta x_2$  und die Pivotdyade

$$\Delta \hat{\mathbf{A}}_2(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{a_{32}^{(2)}}(\boldsymbol{a}_2^{(2)} - \boldsymbol{e}_2)(\hat{\boldsymbol{a}}_{23}^{(2)} + \hat{\boldsymbol{e}}^2);$$

das für  $\Delta \boldsymbol{v}_3$  allgemein gelöste ÄIGS<sub>3</sub> an der Stelle  $\boldsymbol{x}^{(2)}$  ist:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{v}_3 \equiv \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,0065 & 0,2604 & 0,0640 & 0,0812 \\ -0,0034 & 0,3649 & 0,0405 & -0,1486 \\ -0,0051 & 0,2973 & -0,1892 & 0,0268 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta u_1 \\ -\Delta u_2 \\ -\Delta u_3 \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \hat{\mathbf{A}}_3(\boldsymbol{x}^{(2)})(-\Delta \hat{\boldsymbol{y}}_3); \end{aligned}$$

bei  $\Delta y_3 = 0$  ist  $\Delta u_1 = 0$ ,  $\Delta x_1 = -0,0065$ ,  $\Delta x_2 = -0,0034$ ;  $\Delta x_3 = -0,0051$  und so

$$\boldsymbol{x}^{(3)} \equiv \boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{\alpha}_0(\boldsymbol{x}^{(2)}) = [0,7852 \quad 0,4966 \quad 0,3699]^*.$$

Das ist identisch mit dem *Ergebnis des ersten Großschrittes I* unseres »dynamischen« SdMA, für das ursprüngliche GS  $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_0$ , d. h.

$$\boldsymbol{x}_G^{(1)} \equiv \boldsymbol{x}^{(3)} = [0,7852 \quad 0,4966 \quad 0,3699]^*.$$

(Inzwischen erwies sich die Regularität der Matrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$  im  $\boldsymbol{x}^{(0)} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^{(3)}$ ).

Und dies ist für uns — ohne weitere Großschritte — ganz genügend. Vergleicht man nämlich diesen Ergebnisvektor mit denselben der (hier einzelweiser mit drei Kleinschritten äquivalenten) Großschritte der bekannten NEWTON—RAPHSON-*Methode* (NRM), d. h. mit den Vektoren

$$\mathbf{x}^{(0)} = [0,5 \ 0,5 \ 0,5]^*, \quad \mathbf{x}^{(1)} \equiv \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) \cdot \alpha_0(\mathbf{x}^{(0)}) = [0,875 \ 0,500 \ 0,375]^*,$$

$$\mathbf{x}^{(11)} \equiv \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(1)}) \cdot \alpha_0(\mathbf{x}^{(1)}) = [0,7898 \ 0,4966 \ 0,3699]^*,$$

$$\mathbf{x}^{(111)} \equiv \mathbf{x}^{(11)} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(11)}) \cdot \alpha_0(\mathbf{x}^{(11)}) = [0,7852 \ 0,4966 \ 0,3699],$$

so sieht man sofort die Übereinstimmung des Vektors  $\mathbf{x}^{(1)}$  unseres SdMA mit dem Vektor  $\mathbf{x}^{(11)}$  der NRM. Das bedeutet hier eine *dreimal so große Konvergenz-Geschwindigkeit* des SdMA als dieselbe der NRM. Offenbar verdient also der SdMA das Attribut »konvergenz-beschleunigend«.

Akzeptieren wir also den  $\mathbf{x}^{(1)}$  des SdMA als *annähernde Lösung* des ursprünglichen GS-s  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0$  im Sinne von (22c), so ergibt sich dieselbe des ursprünglichen US-s  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{a}_0$  im Sinne (22b), wie folgt:

$$\mathbf{x}^{(1)} \approx \mathbf{x}_U^{(1)} = \mathbf{x}_G^{(1)} + \mathbf{A}_3(\mathbf{x}^{(2)})(-\Delta \mathbf{u}^{(3)}),$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix}_U \approx \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix}_U = \begin{bmatrix} 0,7852 \\ 0,4966 \\ 0,3699 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,2604 & 0,0640 & 0,0812 \\ 0,3649 & 0,0405 & -0,1486 \\ 0,2973 & -0,1892 & 0,0268 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta u_1 \\ -\Delta u_2 \\ -\Delta u_3 \end{bmatrix}.$$

### Zusammenfassung

Anwendungszwecke unserer (vorher zur Optimierung benutzten) SMA und SMS. — SMA als rangerzeugender Matrixalgorithmus; rekursive Formel, Beendigung, Kompatibilität, Rangzahl. — SMS, als Vereinigung mehrerer Schritte in einem Sprung; ihre Hauptachsen- und Zickzack-Formen, die Struktur der Endmatrix. — Der Fall der Regularität; hauptachssiale SMA und SMS, als invertierender Matrixalgorithmus bzw. Matrixsprung.

Lineares Ungleichheitssystem, sein äquivalentes Gleichungssystem in Matrix- und Hypermatrixform. SMA als Lösungsalgorithmus (SIMA); die Struktur der allgemeinen Lösung, die Kompatibilitätsbedingung; der Fall des Gleichungssystems, der Regularität. Beispiel 1.

Nichtlineares Ungleichheitssystem, sein äquivalentes Gleichungssystem. Dynamischer SMA als Lösungsalgorithmus (SdMA) in Kleinschritten: Optimierungsanalogien (Nullbedingung, absolute Engpaß-Regel); Formeln für den ersten Großschritt, Wiederholungen, Beendigung; Spezialfälle und Beziehungen in Großschritten, Konvergenzbeschleunigung. Beispiel 2. — SMA (nebst seinen Varianten) zeigt sich also als ein Algorithmus fast »für alles« in Algebra und Optimierung.

### Literatur

1. FAZEKAS, F.: Matrixalgorithmen für die mathematische Optimierung mit Beziehungen zur Approximation, ZAMM 46, S. T. 95—T 98 (1966).
2. FAZEKAS, F.: Matrixalgorithmische Methoden (MAM) in der Tschebyscheff-(T-) Approximation, ZAMM 47, S. T 42—T 45 (1967).

3. FAZEKAS, F.: Mathematische Optimierung [mittels Matrixalgorithmischer Methoden (MAM)]; ung. 2. verm. Aufl., 312 S.; Tankönyvkiadó, Budapest 1967.
4. FAZEKAS, F.: Theoretischer Ausbau gewisser Matrixalgorithmischer Methoden (MAM) nebst Anwendungen in der mathematischen Optimierung, ein Heft in Fotoprint (80 S.) aus den Vorträgen des Autors in Zürich, Oberwolfach, Moskau, Münster, Novi Sad; Budapest, 1968, TU—Bp.
5. DEMIDOVICS, B. P.—MARON, I. A.: Osnovy vytschislitelnoj matematiki. 2. Aufl., 670 S.; Moskau 1967, GIFML. (russ.) (Siehe noch die Literaturangaben der obigen Arbeiten!)

Dr. Ferenc FAZEKAS, Budapest XI., Műegyetem rkp. 3, Ungarn.