ANWENDUNG DER LINEAREN TRANSFORMATION VON GRUNDSYSTEMEN AUF DIE UNTERSUCHUNG VON EBENEN RAHMENREIHEN MIT LÄNGSSYMMETRIE*

Von

P. MICHELBERGER und A. FEKETE

Lehrstuhl für Mechanik, Fakultät für Verkehrswesen, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 13. Oktober 1969)

Die Anwendung von Rechenanlagen ermöglicht die Lösung von immer komplizierteren statischen Dimensionierungsaufgaben. Die Schwierigkeiten der Elementarrechnung treten jedoch auch bei Benützung von Rechenanlagen auf, bei einer Erhöhung der Genauigkeit der Lösung steigern sich sogar diese Schwierigkeiten. Bei der Berechnung mit Hilfe von Rechenanlagen taucht aber als weitere Aufgabe die Abkürzung der für die Erstellung des Berechnungsprogramms benötigten Zeit, eventuell eine Umgestaltung der Berechnung auf, die Möglichkeit bietet, vorhandene Standardprogramme zu benützen.

Der Unbestimmtheitsgrad der statischen Konstruktionen von Fahrzeugen ist in der Regel geringer als die Anzahl der Verschiebungsmöglichkeiten von Knoten, weshalb die Bestimmung des Kräftespiels von Fahrzeugkonstruktionen und -karosserien mit dem Kraftgrößenverfahren erfolgt. Beim Kraftgrößenverfahren erfordern jedoch Aufstellung und Lösung des Kompatibilitäts-Gleichungssystems einen äußerst großen Arbeitsaufwand und die Vereinfachung hängt in erheblichem Maße von der Gewandtheit der die Berechnung vornehmenden Person ab. Sowohl die Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems als auch die Benützung von fertigen Berechnungsprogrammen hängt beim Kraftgrößenverfahren letzten Endes von der geeigneten Wahl des Grundsystems ab.

1. Regeln der Grundsystemwahl mit dem Kraftgrößenverfahren und die Verbindung zwischen sämtlichen, zu einer gegebenen Konstruktion gehörenden möglichen Grundsystemen

Bei Lösungen mit dem Kraftgrößenverfahren wird in der Praxis eine statisch bestimmte Grundsystemwahl angestrebt. Das wird der von MAKUSIN [1] formulierten Definition in vollem Maße gerecht. Die statische Bestimmtheit ist aber keineswegs eine notwendige Bedingung der Grundsystemwahl.

* Erweiterte Version eines auf dem »Kolloquium der Ung. Akademie der Wissenschaften über Festigkeitslehre« (18—19. 4. 1969) gehaltenen Vortrags.

Nach [2] besteht beim Kraftgrößenverfahren die *notwendige und hinreichende Bedingung* der richtigen Grundsystemwahl darin, *daß sich das Grundsystem weder bei einer gegebenen äußeren Belastung noch unter Wirkung von überschüssigen Verbindungskräften labil verhält.* Die Definition gestattet übrigens, daß auch labile, statisch bestimmte und statisch unbestimmte Grundsysteme zur Anwendung kommen. Die Anwendungsmöglichkeit und die Berechtigung sowohl des labilen als auch des statisch unbestimmten Grundsystems sind einzusehen und nachzuweisen [3].

Darüber hinaus ist aber das Grundsystem berechnungstechnisch dann günstig, wenn die Beanspruchungen durch äußere Belastung denen des wirklichen Trägers »ähnlich« sind, da das zu einem solchen Grundsystem gehörende Kompatibilitäts-Gleichungssystem im allgemeinen der numerischen Genauigkeit der Berechnung gegenüber weniger empfindlich ist. Bei Fahrzeugkonstruktionen läßt sich diese »Ähnlichkeit« auch genauer interpretieren, d. h., das Grundsystem der Fahrzeugkonstruktionen soll die »grundlegenden« Eigenschaften der Konstruktion aufweisen. Nach unseren Untersuchungen [4] gelten folgende als grundlegende Eigenschaften der statischen Konstruktionen von Fahrzeugen:

1) ein- oder mehrachsige Konstruktionssymmetrie,

2) periodische Wiederholung (»Rhythmus«),

3) der Umstand, daß die Konstruktion aus unabhängigen Trägersystemen aufgebaut — verbunden — ist.

Die Ausnützung dieser drei konstruktiven Grundeigenschaften erfordert eindeutig die Verallgemeinerung der Grundsystem-Definition in erster Linie aus dem Grunde, da die gleichzeitige Berücksichtigung der Konstruktionssymmetrie und des Rhythmus sowie das Durchsetzen der Wirkung derselben in vielen Fällen nur unter Anwendung eines labilen oder statisch unbestimmten Grundsystems gewährleistet werden kann [5]. Im übrigen sichern Konstruktionssymmetrie und Rhythmus bereits von vornherein, daß ein Teil der Beiwerte mit gemischten Indizes zu Null wird und diese Beiwerte einen geringeren absoluten Wert haben als die Beiwerte mit sogenannten reinen Indizes.

Durch Verallgemeinerung der Definition des Grundsystems und Einführung der »Ähnlichkeits«-Forderungen wird die Arbeit der Konstrukteure erheblich erleichtert. Man kann aber für komplizierte Konstruktionen eine Anzahl von Grundsystemen finden, die zwar den Bedingungen genügen, in berechnungstechnischer Hinsicht aber nicht gleichwertig sind. Im allgemeinen läßt sich aussagen, daß zu je einem statisch unbestimmten Problem mehrfach unendlich viele, der Definition entsprechende Grundsysteme gewählt werden können. Von diesen das Entsprechendste bloß durch Betrachtung ausfindig zu machen, stellt im allgemeinen eine schwere Aufgabe dar. Es läßt sich jedoch nachweisen, daß zwischen den mehrfach unendlich vielen möglichen Grundsystemen eine enge lineare Beziehung besteht, die sich bei einem n-fach unbestimmten Problem durch invertierbare quadratische Matrizen mit $n \times n$ Elementen beschreiben läßt. Man ist in der Lage, von einem beliebig gewählten Grundsystem auf ein anderes geeigneteres Grundsystem mit mathematischen Operationen zu übergehen. Die sich auf die einzelnen Grundsysteme beziehende enge Beziehung besteht aber auch zwischen den Grundsystemen und den die Beziehung beschreibenden quadratischen Matrizen mit $n \times n$ Elementen. Der Gesamthaufen der mehrfach unendlich vielen Grundsysteme und der Gesamthaufen der invertierbaren Transformationsmatrizen entsprechen einander. Von einem originalen Grundsystem ausgehend können wir zu einem bestimmten anderen Grundsystem lediglich mittels einer bestimmten Transformationsmatrix gelangen. Zu gleicher Zeit führt irgendeine Transformation, die zum Gesamthaufen der Transformationen gehört, mit Sicherheit zu einem beliebigen Grundsystem, der Haufen von eingeführten linearen Transformationen stellt also eine Beziehung zwischen sämtlichen möglichen Grundsystemen her, unabhängig davon, ob diese Grundsysteme physikalisch einfach zu interpretieren sind oder nicht.

Es läßt sich beweisen, daß der Haufen der eingeführten linearen Transformationen zwischen sämtlichen möglichen Grundsystemen eine Beziehung herstellt.

Nehmen wir nämlich an, daß sämtliche möglichen (labilen, bestimmten und unbestimmten) Grundsysteme des n-fach unbestimmten Problems mit dem Gesamthaufen von invertierbaren Matrizen vom Typ $\mathbf{T}_{(n \times n)}$ hergestellt werden können.

Wir behaupten, daß sich in diesem Fall auch sämtliche möglichen Grundsysteme des $(n+1)$-fach unbestimmten Problems mit dem Gesamthaufen von invertierbaren Matrizen vom Typ $\mathbf{T}_{(n+1) \times (n+1)}$, herstellen lassen.

Ein beliebiges $(n+1)$-fach unbestimmtes Problem darf aber als ein einfach unbestimmtes Problem angesehen werden, wo das Grundsystem selbst n-fach unbestimmt ist [2, 3]. Bei einfach unbestimmten Problemen läßt sich jedoch auch aufgrund von Betrachtung leicht einsehen, daß sich die zu sämtlichen vorhandenen Grundsystemen gehörigen unbekannten inneren Verbindungskräfte voneinander nur durch einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden, die Beziehung zwischen den Grundsystemen — dem Haufen von Transformationen — ist also durch den Haufen dieser Proportionalitätsfaktoren — d. h. von »Matrizen« vom Typ 1×1 — charakterisiert. Damit ist unsere These bewiesen.

Hat also das Kompatibilitäts-Gleichungssystem, das zu einem der Grundsysteme einer statisch unbestimmten Konstruktion gehört, die Form

$$\mathbf{Dx} + \mathbf{d} = \mathbf{o}, \tag{1}$$

so läßt sich das zu einem anderen Grundsystem gehörende Kompatibilitäts-

Gleichungssystem nach Einsetzen von $\mathbf{x} = \mathbf{T}^*\mathbf{y}$ und nach Transformation der Gleichung durch $\mathbf{T}$ in der Form

$$\mathbf{TDT}^*\mathbf{y} + \mathbf{Td} = \mathbf{o}, \tag{2}$$

d. h.

$$\overline{\mathbf{D}}\mathbf{y} + \overline{\mathbf{d}} = \mathbf{o} \tag{3}$$

schreiben.

Die endgültige Beanspruchung der Konstruktion hängt von der Wahl des Grundsystems nicht ab, folglich erhält man, wenn der Kürze halber nur die Biegemomente angeschrieben werden

$$M_{(s)} = M_{0(s)} + \mathbf{x}^*\mathbf{m} = M_{0(s)} + \mathbf{y}^*\overline{\mathbf{m}}, \tag{4}$$

wo $M(s)$ die endgültige Beanspruchung der Konstruktion;
$M_0(s)$ die Beanspruchung des ursprünglichen Grundsystems durch äußere Belastung;
$\mathbf{m}$ den Spaltenvektor der aus den dem ursprünglichen Grundsystem zugehörenden einzelnen unbekannten Einheitsbelastungen entstandenen Beanspruchungen;
$\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{T}\,\mathbf{m}$ den Spaltenvektor der aus den zum Zustand nach der Transformation gehörenden Einheitsbelastungen eines anderen Grundsystems

bedeuten.

$\overline{\mathbf{m}}$ läßt sich physikalisch auf dreierlei Art interpretieren:

1) die Beanspruchungen $\overline{M}_i'$ aus den auf das Grundsystem wirkenden Einheitsbelastungen $Y_i' = 1$, gehören zu dem physikalisch interpretierbaren Grundsystem (die Werte von $\overline{M}_i'$ stellen die Elemente von $\overline{\mathbf{m}}$ dar);

2) die Beanspruchungen $\overline{M}_i'$ nach der vorangehenden Interpretation sind zu physikalisch interpretierbaren, aber voneinander abweichenden Grundsystemen gehörig;

3) zu manchen Beanspruchungen $\overline{M}_i'$ gehören keine physikalisch interpretierbaren Grundsysteme.

Bei der Lösung von statisch unbestimmten Konstruktionen soll also keineswegs an demselben, hier als Ausgang gewählten Grundsystem festgehalten werden, sondern man darf zu verschiedener — äußerer und unbekannter — Belastung auch voneinander unabhängige Grundsysteme von abweichender Gestaltung wählen. Es ist dabei selbstverständlich angebracht, die Bedingung der »Ähnlichkeit« bei den inneren und äußeren Kräften gleicherweise zu befriedigen.

Als das Entsprechendste kann offensichtlich das Grundsystem (oder die Grundsysteme) gelten, zu dem die die meisten gemischten Beiwerte mit

0-Wert enthaltenden — d. h. diagonalen — Koeffizientenmatrizen gehören. Dieses Grundsystem durch Betrachtung ausfindig zu machen, scheint eine aussichtslose Aufgabe.

2. Untersuchung von ebenen Rahmenreihen mit Längssymmetrie

Die Lastkraftwagen-Fahrgestellrahmen (Leiterrahmen) stellen im allgemeinen ebene oder die Ebene gut annähernde, der Querträger-Teilung entsprechend rhythmische Rahmenreihen mit Längssymmetrie dar. In Anbetracht ihres Aufbaus besitzen sie also alle Eigenschaften, die es laut Abschnitt 1 angebracht erscheinen lassen, die Transformationstheorie des Grundsystems zu verwenden. Die Längs- und Querelemente derartiger Konstruktionen stehen in einer für die Übertragung von Biegung und Torsion geeigneten Verbindung miteinander. Bei einer beliebigen räumlichen Belastung sind diese Konstruktionen pro Rahmenfeld statisch sechsfach unbestimmt. Wenn zur Untersuchung von in der Rahmenebene und dazu senkrecht wirkenden Belastungen als Ausgangsgrundsystem die Grundsysteme der Verfahren, die als das von KHERNDL ausgearbeitete σ-Punkt- bzw. das von SÁLYI vorgeschlagene Σ-Punkt-Verfahren [6] bekannt sind, gewählt werden (Abb. 1), so läßt sich die Konstruktionssymmetrie ausnützen und die Wirkung der allgemeinen räumlichen Belastung kann wegen der Orthogonalität der Beanspruchungen als Wirkung von vier unabhängigen Belastungsgruppen behandelt werden.

1) Unter der Wirkung einer *ebenen symmetrischen Belastung* bei einer Anzahl p von Rahmenfeldern läßt sich die Lösung mit einem Gleichungssystem mit $2p$ Unbekannten anschreiben, wo je Gleichung höchstens *fünf* Unbekannte vorkommen:

$$\mathbf{D}_{1(SY)}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{d}_{1(SY)} = \mathbf{o}. \tag{4.1}$$

2) Unter der Wirkung einer *ebenen antimetrischen Belastung* kann ein Gleichungssystem mit p Unbekannten angeschrieben werden, wo je Gleichung höchstens *drei* Unbekannte vorkommen:

$$\mathbf{D}_{2(A)}\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{d}_{2(A)} = \mathbf{o}. \tag{4.2}$$

3) Unter der Wirkung von *zur Ebene senkrechten antimetrischen Belastungen* kann man ein Gleichungssystem mit $2p$ Unbekannten anschreiben, wo je Gleichung höchstens *fünf* Unbekannte vorkommen:

$$\mathbf{D}_{3(A)}\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{d}_{3(A)} = \mathbf{o}. \tag{4.3}$$

4) Unter der Wirkung von *zur Ebene senkrechten symmetrischen Belastungen* läßt sich ein Gleichungssystem mit p Unbekannten anschreiben, wo je

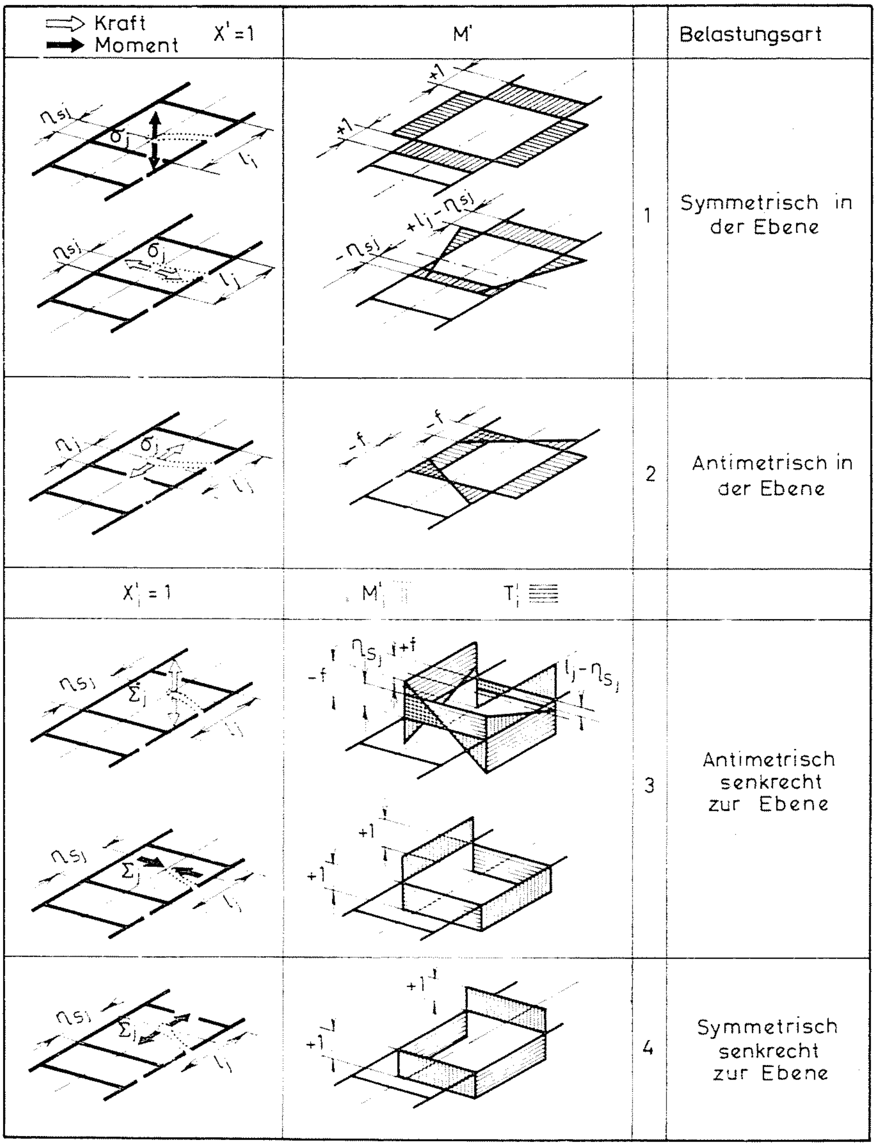


Abb. 1

Gleichung höchstens *drei* Unbekannte vorkommen:

$$\mathbf{D}_{4(SY)}\,\mathbf{x}_4 + \mathbf{d}_{4(SY)} = \mathbf{o}. \tag{4.4}$$

Die zu den einzelnen Belastungsarten gehörenden Grundsysteme, die zwar je nach der Belastungsart verschieden, aber innerhalb desselben Problems identisch sind, sowie die Beanspruchungen durch unbekannte innere Einheitskräfte sind (ohne Berücksichtigung der Normal- und Scherkräfte) in Abb. 1 dargestellt.

Es ist ersichtlich, daß bei ebenen antimetrischen und zur Ebene senkrechten symmetrischen Belastungen unter Benützung von nach dem σ-Punkt- bzw. Σ-Punkt-Verfahren gewählten Grundsystemen die Kompatibilitätsbedingungen durch eine Matrixgleichung mit Kontinuantenbeiwert beschrieben werden. Die Inversionsoperation in den Ausdrücken

$$\mathbf{x}_2 = -\mathbf{D}_{2(A)}^{-1}\,\mathbf{d}_{2(A)}; \quad \mathbf{x}_4 = -\mathbf{D}_{4(SY)}^{-1}\,\mathbf{d}_{4(SY)},$$

die die Lösung der Gleichung ergeben, stellt im Falle von Kontinuantenmatrizen ein verhältnismäßig einfaches Problem dar. In den Koeffizientenmatrizen ($\mathbf{D}_{1(SY)}$; $\mathbf{D}_{3(A)}$) der ebenen symmetrischen und zur Ebene senkrechten antimetrischen Belastungsfälle sind aber je Gleichung fünf Unbekannte enthalten. Im Haufen der zu den einzelnen Belastungsfällen gehörenden Grundsysteme existiert aber auch ein Grundsystem, zu dem eine Kontinuantenmatrix gehört. Im Sinne von Abschnitt 1 gibt es in diesem Falle auch eine solche Transformation, durch die die Verbindung zwischen den betreffenden Grundsystemen dargestellt wird. In den untersuchten beiden Belastungsfällen wird diese Transformation, falls die durch das Biegemoment hervorgerufene Deformation der Verdrehungen gegenüber vernachlässigt werden kann, durch eine diagonale Hypermatrix mit den folgenden Elementen dargestellt:

1) Ebener symmetrischer Fall:

$$\mathbf{T}_{jj} = \begin{bmatrix} -1 & (l_j - \eta_{sj}) \\ 1 & \eta_{sj} \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

2) Zur Ebene senkrechter antimetrischer Fall:

$$\mathbf{T}_{jj} = \begin{bmatrix} -1 & (l_j - \eta_{Sj}) \\ 1 & \eta_{Sj} \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Im Ausdruck bedeuten l_j die Länge des j-ten Rahmenfeldes;
η_{sj} die Koordinate des zum j-ten Rahmenfeld gehörenden σ-Punktes nach Abb. 1;
η_{Sj} die Koordinate des zum j-ten Rahmenfeld gehörenden Σ-Punktes nach Abb. 1.

Werden die zu dem σ bzw. Σ-Punkt-Verfahren gehörenden M_i' Beanspruchungen ($\mathbf{m}$) laut (5.1), (5.2) transformiert, gehören zu den erhaltenen $\overline{M}_i'$ Beanspruchungen ($\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{T}\,\mathbf{m}$) gut definierbare, auch physikalisch inter-

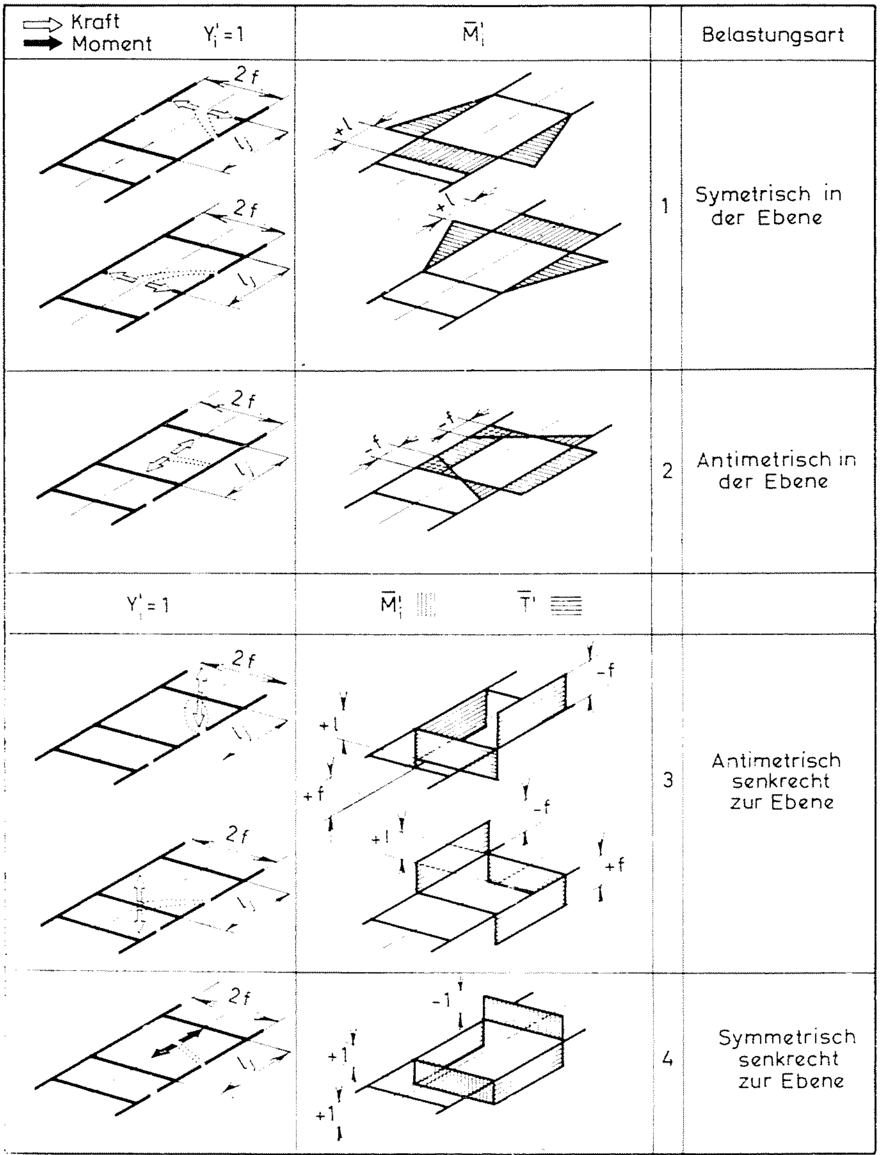


Abb. 2

pretierbare Grundsysteme, die jedoch auch innerhalb desselben Problems voneinander abweichen (Abb. 2).

Das Grundsystem, das nach Transformation dem ebenen symmetrischen Belastungsfall zugeordnet werden kann, ist gleich dem von SUTTER für die Untersuchung von Vierendeel-Trägern vorgeschlagenen Grundsystem [8]. In dem zur Ebene senkrechten antimetrischen Belastungsfall führt die Transformation (5.2) nur dann zu einer Matrixgleichung mit Kontinuantenbeiwert, wenn die Wirkung der Biegemomente (M_i') neben der Wirkung der Torsionsmomente (T_i') vernachlässigt wird. Die Starrheitsverhältnisse der Lastkraftwagen-Fahrgestelle sind im allgemeinen solcher Art, daß diese Vernachlässigung in erster Näherung zugelassen werden darf, da $GJ_t \ll EJ$, d. h., da die Konstruktion gegen Torsion weicher als gegen Biegung ist.

In diesem Fall weist das zu den zur Ebene senkrechten antimetrischen Belastungen gehörige, transformierte Grundsystem mit dem Sutterschen eine völlige Dualität auf. Die Beanspruchungen des zu ebenen antimetrischen und zur Ebene senkrechten symmetrischen Belastungsfällen gehörenden Sutterschen Grundsystems sind gleich den Beanspruchungen von Grundsystemen nach den σ- bzw. Σ-Punkt-Verfahren.

Die im Vorangehenden beschriebene Transformation übt also auf die inneren Einheitsbelastungen eine günstige Wirkung aus. Das nach der Transformation erhaltene Suttersche Grundsystem ist aber nicht symmetrisch, folglich befriedigen die Beanspruchungen des Grundsystems durch äußere Belastung symmetrischen und antimetrischen Charakters die Bedingung der »Ähnlichkeit« nicht. Nach den Ausführungen in Punkt 1 ist es aber möglich, innerhalb desselben Problems zu den einzelnen Belastungsarten Grundsysteme voneinander abweichender Gestalt zu wählen. Dementsprechend sind zu den vier orthogonalen äußeren Belastungsgruppen Grundsysteme zu suchen, die einerseits symmetrisch und rhythmisch sind, und wo anderseits die Beanspruchungen aus äußeren Belastungen den endgültigen Beanspruchungen »ähnlich« sind. Unseren Erfahrungen nach erfüllen die nachstehenden Grundsysteme am meisten diese Forderungen (Abb. 3):

1) ein mit ebenen Gelenken ausgebildetes *labiles* Grundsystem für ebene symmetrische Belastungen;

2) ein mit ebenen Gelenken ausgebildetes *statisch unbestimmtes* Grundsystem für ebene antimetrische Belastungen;

3) ein mit räumlichen Gelenken ausgebildetes *labiles* Erzsches Grundsystem für zur Ebene senkrechte antimetrische Belastungen;

4) ein *statisch unbestimmtes* Zapfengrundsystem für zur Ebene senkrechte symmetrische Belastungen.

Diese Grundsysteme verhalten sich unter Einwirkung von Belastungen entsprechender Natur in statisch bestimmter Weise, bei jeder anderen Belastung sind sie labil bzw. statisch unbestimmt.

Zusammenfassend läßt sich also aussagen, daß falls die äußeren Belastungen auf die obigen vier Grundsysteme gelegt werden, und die unbekannten inneren Einheitskräfte entweder auf die statisch bestimmten Sutterschen oder, auf Grund gewisser Erwägungen auf die zu den äußeren Belastungen gewähl-

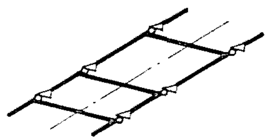
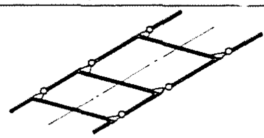
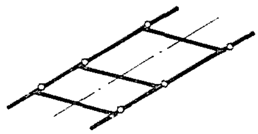
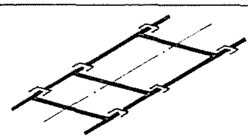
	das Grundsystem	Eigenschaften	Belastungsart
1		labil	Symmetrisch in der Ebene
2		statisch unbestimmt	Antimetrisch senkrecht
3		labil	Antimetrisch senkrecht zur Ebene
4		statisch unbestimmt	Symmetrisch senkrecht zur Ebene

Abb. 3

ten obigen Grundsysteme wirken, die Kompatibilitätsgleichungen in allen vier Belastungsfällen zu Matrixgleichungen mit Kontinuantenbeiwert werden.

Die in Abb. 3 dargestellten und die Anforderungen der »Ähnlichkeit« befriedigenden Grundsysteme verhalten sich aber unter Einwirkung von dem Charakter der äußeren Belastung entsprechenden Einheits-Verbindungskräften ebenso günstig wie die Sutterschen Grundsysteme. In dem je Rahmenfeld statisch einfach unbestimmten ebenen antimetrischen und in dem zur Ebene senkrechten symmetrischen Falle ergibt das Grundsystem der äußeren Belastungen ohne weiteres unter Einwirkung der dem Grundsystem entsprechenden Verbindungskräfte eine Kontinuantenmatrix. In den je Rahmenfeld zweifach unbestimmten ebenen symmetrischen und zur Ebene senkrechten antimetrischen Fällen ist das Grundsystem der äußeren Belastungen laut Abb. 4 als Spiegelbild den einzelnen Verbindungskräften zuzuordnen. Wie bei den Sutterschen Grundsystemen, erhält man in dem zur Ebene senkrechten antimetrischen Falle nur dann eine Kontinuantenmatrix, wenn die Biegesteifigkeit der Rahmenelemente wesentlich größer als ihre Torsionssteifigkeit ist, die durch die Biegemomente verursachte Deformation also vernachlässigt werden darf.

Die Kontinuantenmatrizen lassen sich, wie dies im folgenden Abschnitt bewiesen werden soll, leicht diagonalisieren, wodurch die Inversion erleichtert

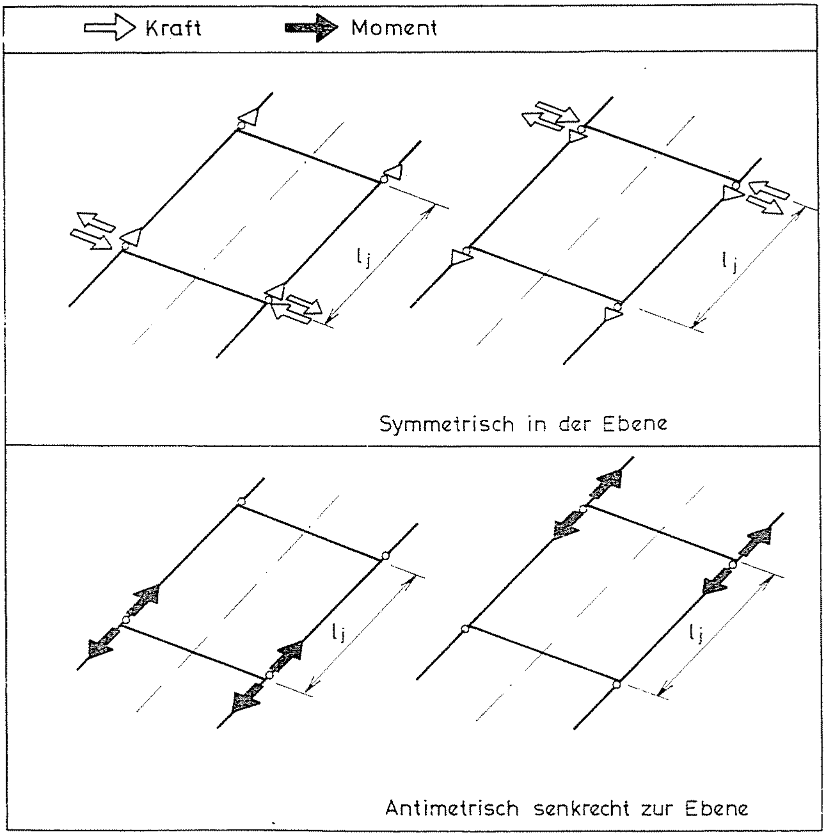


Abb. 4

wird. Die vier voneinander unabhängigen Kompatibilitäts-Gleichungssysteme sind wie folgt:

$$\mathbf{C}_{1(SY)}\,\mathbf{y}_1 + \mathbf{c}_{1(SY)} = \mathbf{o} \tag{6.1}$$

$$\mathbf{C}_{2(A)}\;\mathbf{y}_2 + \mathbf{c}_{2(A)} \;= \mathbf{o} \tag{6.2}$$

$$\mathbf{C}_{3(A)}\;\mathbf{y}_3 + \mathbf{c}_{3(A)} \;= \mathbf{o} \tag{6.3}$$

$$\mathbf{C}_{4(SY)}\,\mathbf{y}_4 + \mathbf{c}_{4(SY)} = \mathbf{o}. \tag{6.4}$$

3. Inversion von symmetrischen Kontinuantenmatrizen und Kontinuantenhypermatrizen durch sukzessive Transformation

Die Inversion einer Kontinuantenmatrix n-ter Ordnung kann, falls n nicht zu groß ist, nach einem der bekannten Verfahren mit verhältnismäßig geringem Rechenaufwand durchgeführt werden. Ist aber n zu groß, so sind diese Methoden gegen Rechenfehler empfindlich. In diesem Falle ist es zweckmäßig, die Kontinuantenmatrix durch sukzessive Transformationen zwecks Erleichterung der Inversion in eine diagonale Form zu transformieren. In den einzelnen Schritten der Transformation werden zunächst die geraden und ungeraden Reihen und Spalten der Kontinuantenmatrix nebeneinander geordnet; nach Partition der auf diese Weise transformierten Matrix wird eine Hypermatrix erhalten, aus deren Blöcken die Transformationsmatrix aufgebaut wird. Als Resultat der Transformation erhält man eine diagonale Hypermatrix, die stets aus einem diagonalen und einem Kontinuanten-Block besteht.

Bei einer Matrix k-ter Ordnung ist der Kontinuantenblock, falls k gerade ist, $\frac{k}{2}$-ter Ordnung, falls k ungerade ist, $\frac{k-1}{2}$-ter Ordnung. Der so erhaltene Kontinuantenblock mit im Verhältnis zur originalen »halbierter« Ordnungszahl wird in der bekannten Weise so lange weiter transformiert, bis man als Endergebnis zu einer völlig diagonalen Form gelangt. Es seien

$\mathbf{C}$ eine symmetrische Kontinuantenmatrix n-ter Ordnung;

$\mathbf{R}_1$ eine Permutationsmatrix n-ter Ordnung, um die Reihen von geraden und ungeraden Zahlen nebeneinander anzuordnen;

$\mathbf{T}_1$ eine untere Dreieck-Hypermatrix n-ter Ordnung, die aus den Blöcken der umgeordneten und in partitionierter Form geschriebenen Matrix $\mathbf{C}'$ aufgebaut ist.

1. Schritt

$$\mathbf{C}' = \mathbf{R}_1 \mathbf{C} \mathbf{R}_1^* = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \hline \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{array}\right]$$

wo $\mathbf{C}_{11}$ und $\mathbf{C}_{22}$ eine diagonale und $\mathbf{C}_{21} = \mathbf{C}_{12}^*$ eine mangelhafte Matrix für ein oberes Dreieck darstellen.

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{C}' \mathbf{T}_1^* = (\mathbf{T}_1 \mathbf{R}_1) \mathbf{C} (\mathbf{R}_1^* \mathbf{T}_1^*) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C}_2^1 \end{array}\right].$$

wo

$$\mathbf{T}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \hline -\mathbf{C}_{21}(\mathbf{C}_{11})^{-1} & \mathbf{E} \end{array}\right]$$

2. Schritt

$$\mathbf{C}_1' = \mathbf{R}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{R}_2^* = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{C}_{11} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{O}} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C}_{11}^1 & \mathbf{C}_{12}^1 \\ & \mathbf{C}_{21}^1 & \mathbf{C}_{22}^1 \end{array}\right], \quad \mathbf{R}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{R}_{22}^1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{T}_2 \mathbf{C}_{11}'^1 \mathbf{T}_2^* = (\mathbf{T}_2 \mathbf{R}_2)(\mathbf{T}_1 \mathbf{R}_1) \mathbf{C} (\mathbf{R}_1^* \mathbf{T}_1^*)(\mathbf{R}_2^* \mathbf{T}_2^*) = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{C}_{11} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{O}} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C}_{11}^1 & \mathbf{O} \\ & \mathbf{O} & \mathbf{C}_2^2 \end{array}\right]$$

wo

$$\mathbf{T}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{E} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{O}} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ & -\mathbf{C}_{21}^1(\mathbf{C}_{11}^1)^{-1} & \mathbf{E} \end{array}\right]$$

k-ter Schritt

$$\mathbf{C}'_{k-1} = \mathbf{R}_k\,\mathbf{C}_{k-1}\,\mathbf{R}_k^* = \left[\begin{array}{ccccc|cc} \mathbf{C}_{11} & & & & & & \\ & \mathbf{C}_{11}^1 & & & & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{O}} \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{C}_{11}^{k-2} & & & \\ \hline & & \mathbf{O} & & & \mathbf{C}_{11}^{k-1} & \mathbf{C}_{12}^{k-1} \\ & & & & & \mathbf{C}_{21}^{k-1} & \mathbf{C}_{22}^{k-1} \end{array}\right]$$

wo

$$\mathbf{R}_k = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{R}_{22}^{k-1} \end{array}\right].$$

Schließlich

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{T}_k\,\mathbf{C}'_{k-1}\,\mathbf{T}_k^* = (\mathbf{T}_k\,\mathbf{R}_k)\ldots(\mathbf{T}_1\,\mathbf{R}_1)\,\mathbf{C}(\mathbf{R}_1^*\,\mathbf{T}_1^*)\ldots(\mathbf{R}_k^*\,\mathbf{T}_k^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & & & & \\ & \mathbf{C}_{11}^1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{C}_{11}^{k-1} & \\ & & & & \mathbf{C}_2^k \end{bmatrix}$$

wo

$$\mathbf{C}_{11}^i = \langle c_{jj}^i \rangle \text{ diagonale Matrizen sind,}$$

$$\mathbf{C}_2^k = [c_{11}^k]_{1\times 1} = \text{konst.,}$$

und

$$\mathbf{T}_k = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{E} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{O}} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ & -\mathbf{C}_{21}^{k-1}(\mathbf{C}_{11}^{k-1})^{-1} & \mathbf{E} \end{array}\right].$$

Die gesamte Transformations-Operationsreihe läßt sich in der untenstehenden Form anschreiben:

$$\mathbf{C}_k = (\mathbf{T}_k\,\mathbf{R}_k \ldots \mathbf{T}_1\,\mathbf{R}_1)\,\mathbf{C}\,(\mathbf{T}_k\,\mathbf{R}_k \ldots \mathbf{T}_1\,\mathbf{R}_{12})^* = \mathbf{ZCZ}^*$$

Nach erfolgter Rückordnung der Reihen und Spalten in die ursprüngliche Lage ergibt sich die gesuchte diagonale Form zu:

$$\mathbf{L} = \left[(\mathbf{R}_1^* \ldots \mathbf{R}_k^*)\,\mathbf{Z}\right]\mathbf{C}\left[\mathbf{Z}^*(\mathbf{R}_k \ldots \mathbf{R}_1)\right],$$

d. h., wenn auch die Operationen angegeben werden:

$$\mathbf{L} = \left\{ \prod_{i=1}^{k} (\mathbf{R}_i^*) \prod_{i=k}^{1} (\mathbf{T}_i \mathbf{R}_i) \right\} \mathbf{C} \left\{ \prod_{i=1}^{k} (\mathbf{R}_i^*) \prod_{i=k}^{1} (\mathbf{T}_i \mathbf{R}_i) \right\}^* = \mathbf{VCV}^* . \tag{7}$$

Für die Beziehung zwischen der Zahl (k) der Transformationsschritte und der Ordnungszahl (n) der zu transformierenden Matrizen erhält man:

$$\max (2^k) \leqq n . \tag{8}$$

Das Verfahren läßt sich sinngemäß auch auf die Hypermatrizen mit Kontinuanten-Anordnung ausdehnen. Da erhält man jedoch als Endresultat keine diagonale Matrix, sondern eine diagonale Hypermatrix, deren Blöcke mit den Blöcken der ursprünglichen Matrix gleicher Ordnung sind. Die einzelnen Blöcke können wegen der diagonalen Anordnung entweder als selbständiges Gleichungssystem niedriger Ordnung (mit zwei oder drei Unbekannten) gelöst oder als Blöcke weiter diagonalisiert werden. Bei der Untersuchung von Lastkraftwagen-Fahrgestellen hat z. B. der zur Ebene senkrechte antimetrische Belastungsfall eine Koeffizientenmatrix mit diagonaler Hypermatrix-Anordnung, falls die Wirkung der Biegemomente nicht vernachlässigt wird. In diesem Falle ist es nämlich angebracht (siehe Abschnitt 2), zur Untersuchung der unbekannten inneren Einheitskräfte anstatt des Sutterschen Grundsystems entweder das zu dem Σ-Punkt-Verfahren gehörende oder das originale Erzsche Grundsystem [7] anzuwenden. Zu diesen Grundsystemen gehört ein Gleichungssystem mit höchstens fünf Unbekannten je Gleichung, dessen Koeffizientenmatrix zu einer Kontinuantenhypermatrix partitioniert werden kann, deren Blöcke Matrizen mit 2×2 Elementen darstellen. Ist die Konstruktion nicht symmetrisch, oder besitzt sie keine parallelen Gurte, so ist gleichfalls zur Anwendung der durch die im vorliegenden Aufsatz als Ausgang gewählten σ- bzw. Σ-Punkt-Verfahren definierten Grundsysteme zurückzukehren. Zu diesen Grundsystemen gehören Hypermatrizen aus Blöcken von 3×3 Maß, mit Kontinuanten-Aufbau, wo die Blöcke in den Hauptdiagonalen auch an und für sich diagonal sind. Es ist jedoch zu bemerken, daß die ursprünglich in der Hauptdiagonale befindlichen Blöcke mit diagonalem Aufbau bereits nach dem ersten Schritt der Transformation nicht mehr diagonal verbleiben und so können ihre vorteilhaften Eigenschaften nur bei dem ersten Schritt der Transformation ausgenützt werden.

Abschließend soll bemerkt werden, daß auch das Diagonalisierungsverfahren eigentlich eine Grundsystem-Transformation (7) darstellt, zu der es aber bisher nicht gelungen ist, ein physikalisch einfach interpretierbares, statisch bestimmtes Grundsystem zu finden. Zu jedem Schritt der schrittweise durchgeführten Transformation gehört aber auch getrennt je ein Grundsystem, das ein *statisch unbestimmtes Grundsystem* darstellt, welches im Verhältnis zum Grundsystem des vorangehenden Schrittes einen größeren Unbestimmtheitsgrad besitzt. Bei einem statisch n-fach unbestimmten Problem gehört auf diese Weise zu der Koeffizientenmatrix mit diagonalem Aufbau ein $(n-1)$-fach unbestimmtes Grundsystem. Die zu einem eine diagonale Koeffizientenmatrix ergebenden Grundsystem gehörenden Gleichungssysteme nehmen bei Fahrzeugfahrgestellen auf Grund der Gleichungen (6) — also von den Sutterschen Grundsystemen ausgehend — die nachstehende Form an:

$$\mathbf{L}_{1(SY)}\mathbf{z}_1 + \mathbf{l}_{1(SY)} = \mathbf{o} \tag{9.1}$$

$$\mathbf{L}_{2(A)}\mathbf{z}_2 + \mathbf{l}_{2(A)} = \mathbf{o} \tag{9.2}$$

$$\mathbf{L}_{3(A)}\mathbf{z}_3 + \mathbf{l}_{3(A)} = \mathbf{o} \tag{9.3}$$

$$\mathbf{L}_{4(SY)}\mathbf{z}_4 + \mathbf{l}_{4(SY)} = \mathbf{o}. \tag{9.4}$$

Die Gleichungen (9) entstehen aus den Gleichungen (6) durch Transformation (7); werden

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}^*\mathbf{z} \quad \text{und} \quad \mathbf{l} = \mathbf{V}\mathbf{c}$$

eingesetzt, so erhält man

$$\mathbf{L}\mathbf{z} + \mathbf{l} = \mathbf{V}\mathbf{C}\mathbf{V}^*\mathbf{z} + \mathbf{V}\mathbf{c} = \mathbf{o}. \tag{10}$$

Zusammenfassung

Die Dimensionierung von räumlich belasteten Rahmen erfordert einen großen Arbeitsaufwand und ist schwer zu überblicken. Anhand einiger geometrischer Beschränkungen kann ein einfacheres Verfahren ausgearbeitet werden. Den Grundgedanken dieses Verfahrens bilden die für einfeldige Rahmen erarbeiteten, unter dem Namen σ-Punkt- und Σ-Punkt-Verfahren bekannten Verfahren. Bei mehrfeldigen Rahmen lassen sich die Beanspruchungen in vier voneinander unabhängige orthogonale Gruppen zerlegt untersuchen. Mit einfachen linearen Transformationen und unter Vernachlässigung der Wirkung der Normal- und Scherkräfte sowie — im zur Ebene senkrechten antimetrischen Belastungsfall — der Biegemomente werden die Koeffizientenmatrizen der Gleichungssysteme zu Kontinuantenmatrizen. Zu den einzelnen orthogonalen Gruppen kann je ein verschiedenes, auch physikalisch interpretierbares Grundsystem gefunden werden, das die Symmetrie und den Rhythmus des Rahmens berücksichtigt.

Die Kontinuantenmatrizen lassen sich durch mehrfache Transformation diagonalisieren. Die Diagonalisierung gilt sinngemäß auch für Kontinuantenhypermatrizen, folglich kann sie auch bei Nichtkontinuantenmatrizen stets durchgeführt werden.

Literatur

1. PONOMARJOV, SZ. D.: Szilárdsági számítások a gépészetben (Festigkeitsberechnungen im Maschinenwesen). Műszaki Kiadó, Budapest, 1968.
2. MICHELBERGER, P.: Einige Probleme der Berechnung der statisch unbestimmten Fahrzeugkonstruktionen. Acta Technica Acad. Sci. Hung. **62**, 141 (1968).

3. MICHELBERGER, P.: Basic systems for statically indeterminate structures. Proceedings of the Third Conference on Dimensioning... Akadémiai Kiadó, Budapest 1968, pp. 502.
4. MICHELBERGER, P.: A járműszerkezetek és kocsiszekrények sztatikai számításainak általános kérdései (Allgemeine Fragen der statischen Berechnungen von Fahrzeugkonstruktionen und Wagenkasten). MTA VI. Osztály Közleményei **40**, 193 (1968).
5. MICHELBERGER, P.—FEKETE, A.: Spatially loaded frame rows with longitudinal symmetry. Proceedings of the Third Conference on Dimensioning... Akadémiai Kiadó, Budapest 1968. pp. 511.
6. MICHELBERGER, P.—SÁLYI, B.: Sík elrendezésű zárt keretek általános térbeli terhelésének vizsgálata (Untersuchung der allgemeinen räumlichen Belastung von geschlossenen Rahmen in ebener Anordnung). Acta Technica Acad. Sci. Hung. **65**, 295 (1969).
7. ERZ, K.: Über die durch Unebenheiten der Fahrbahn hervorgerufene Verdrehung von Straßenfahrzeugen. ATZ **59**, 89, 163, 345, 371 (1957).
8. SUTTER, K.: Zur Berechnung von selbsttragenden Eisenbahnwagenkasten. Economie et Technique des Transports No. **70** (1947).

Prof. Dr. Pál MICHELBERGER } Budapest XI., Műegyetem rkp, 3.,
Attila FEKETE } IX., Kinizsi u. 1—7, Ungarn