

MATHEMATIK UND MATHEMATISIERUNG UNTER DEN BEDINGUNGEN DER WISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHEN REVOLUTION*

Von

D. MÜLLER

Lehrstuhl für Philosophie, Technische Universität, Dresden

Im Prozeß der wissenschaftlich-technischen Revolution wächst die Bedeutung der Mathematik im gesellschaftlichen Leben wesentlich an. Es gibt kaum einen Bereich der Gesellschaft, in dem sich nicht Mathematisierungsprozesse vollziehen. Versucht man, sich einen groben Überblick über diese Tatsache zu verschaffen, so kann man im wesentlichen zwei Tendenzen des Mathematisierungsprozesses erkennen.

Die eine Tendenz besteht darin, daß die Anwendung mathematischer Methoden heute immer mehr zu einem Kennzeichen aller Wissenschaften wird. Während noch am Ende des vergangenen Jahrhunderts die Anwendung der Mathematik auf einige wenige Wissenschaften die sich mit bestimmten Bereichen der anorganischen Natur beschäftigen (wie Physik, Astronomie, z. T. Chemie) und auf technische Disziplinen beschränkt blieb, dringt heute die Mathematik in zunehmendem Maße auch in die Gesellschaftswissenschaften, insbesondere in die Ökonomie, ein. Mathematisierungsprozesse zeigen sich darüberhinaus in der Biologie, in der Psychologie, auch in der Medizin und in vielen anderen Disziplinen. Die Mathematik wird zu einem universellen Forschungsinstrument, dessen sich alle Wissenschaften bedienen, die auf der Grundlage von Experiment und praktischer Erfahrung einen bestimmten Gegenstandsbereich der objektiven Welt untersuchen. Die bisher traditionell vorgenommene Kopplung zwischen Mathematik und Naturwissenschaft, die oft von der Vorstellung begleitet war, daß die Mathematisierbarkeit ein Vorrecht naturwissenschaftlicher bzw. technischer Disziplinen sei, erweist sich als überholt.

Im Prozeß der wissenschaftlich-technischen Revolution wird die Universalität der Mathematik ebenso sichtbar wie die Relativität des Unterschieds zwischen Naturwissenschaften, technischen Wissenschaften und Gesellschaftswissenschaften hinsichtlich ihrer Mathematisierbarkeit.

Die bereits skizzierten Mathematisierungsprozesse beziehen sich vor allem auf die Rolle der Mathematik bei der Erforschung von Gesetzen, auf

* Vortrag gehalten im Dezember 1967. vor den Lehrkräften für Philosophie und Mathematik der Technischen Universität, Budapest.

die Rolle der Mathematik im theoretisch-erkennenden Verhältnis des Menschen zur objektiven Realität. Die Umwandlung der Wissenschaft in eine unmittelbare Produktivkraft bedeutet jedoch, daß die Wissenschaft untrennbares Element der praktisch-gegenständlichen Tätigkeit wird, daß die praktisch-gegenständliche Tätigkeit, die Veränderung der Welt zu menschlichen Zwecken, den Charakter wissenschaftlicher Tätigkeit annimmt. In diesen Prozeß ist die Mathematik unmittelbar verflochten. Die zweite Tendenz des Mathematisierungsprozesses besteht demnach darin, daß die Mathematik in dem Maße, in dem die Wissenschaften sich in eine unmittelbare Produktivkraft umwandeln, zum integrierenden Element der Praxis wird. Gewiß muß man zugeben, daß die Mathematik auch in der Vergangenheit in der Technik und Produktion eine wesentliche Rolle gespielt hat, daß sie in ihrer Entwicklung niemals losgelöst von den Problemen der Praxis existiert und sich entwickelt hat. (»Reine« Mathematik im Sinne einer absoluten Isolierung von der Praxis hat es höchstens als Illusion in der Vorstellung von Menschen, aber niemals in der Wirklichkeit gegeben). Jedoch erst in dem Maße, in dem der Mensch aus dem Fertigungsprozeß austritt, in dem die Produktionstätigkeit sich immer stärker auf die Produktionsvorbereitung konzentriert, auf Prognose, Planung, Optimierung, Projektion und Konstruktion usw., entwickelt sich die Mathematik in ein universelles Instrument der praktischen produktiven Tätigkeit. So wie die Mathematik zu einem universellen Instrument jeder theoretisch-erkennenden Tätigkeit wird, so wird sie gegenwärtig auch zu einem universellen Instrument der praktisch-gegenständlichen Tätigkeit, der zielbewußten Veränderung der Welt durch den Menschen. Für den marxistischen Philosophen ergeben sich aus diesen im praktischen Leben sich vollziehenden Prozessen eine Reihe von Fragen. Zunächst interessiert natürlich, wodurch diese umfassende Mathematisierung verschiedenster Bereiche des gesellschaftlichen Lebens bedingt ist und warum gerade die wissenschaftlich-technische Revolution zu diesem allgemeinen Anwachsen der Rolle der Mathematik führt. Noch wesentlicher ist allerdings die Frage nach den allgemeinen Tendenzen und Perspektiven dieses Prozesses, nach den Auswirkungen auf das gesellschaftliche Leben, nach den Anforderungen die durch diesen Prozeß an den Menschen in der Produktion gestellt werden. Damit sind natürlich unmittelbar Probleme der mathematischen Ausbildung und Weiterbildung verknüpft. Andererseits aber kann man auch an der Frage nicht vorübergehen, ob und in welchem Umfang dieser allgemeine Mathematisierungsprozeß Auswirkungen auf die Entwicklung der Mathematik selbst besitzt. Man muß doch vermuten, daß sich aus den neuen Funktionen und Problemstellungen, die der Mathematik in diesem Prozeß erwachsen, auch Rückwirkungen auf die Mathematik, auf ihre Forschungsgebiete, ihre Entwicklungsbedingungen und eventuell sogar auf ihre Forschungsmethoden ergeben. Eine Beantwortung dieser Fragen erfordert, daß man sich über das Wesen der mathematischen

Begriffsbildungen Gedanken macht, daß man die Spezifik der mathematischen Widerspiegelung untersucht und die Funktionen der Mathematik im Prozeß der wissenschaftlichen Erkenntnis und der technischen Anwendung dieser Erkenntnisse analysiert. Dieses Anliegen verfolgt die vorliegende Abhandlung. Notwendigerweise muß dabei manches noch den Charakter von Hypothesen tragen.

1. Mathematisierung und mathematisches Modell

Im Vorangehenden wurde der Begriff der »Mathematisierung« verwendet. Es ist notwendig, diesen Terminus präziser zu bestimmen. Das um so mehr, als in der Literatur dieser Begriff in einem sehr vieldeutigen Sinne verwendet wird. Wir gehen in den weiteren Erörterungen von der folgenden Festlegung aus: Das Wesentliche an der Mathematisierung einer Wissenschaft oder eines anderen Bereiches der menschlichen Tätigkeit besteht darin, daß bei der Lösung der vorliegenden Aufgaben mit mathematischen Modellen operiert wird.

Diese Festlegung bedarf der Erläuterung und der Begründung. Zunächst ist es erforderlich, den Begriff »mathematisches Modell« zu bestimmen vor allem deshalb, weil dieser Begriff im wissenschaftlichen Sprachgebrauch unterschiedlich verwendet wird. Der Mathematiker, speziell der mathematische Logiker, versteht unter einem mathematischen Modell die Belegung eines Axiomensystems. Ausgehend von einem abstrakt vorgegebenen Axiomensystem wird die Frage gestellt, ob irgendeine (bereits bekannte) mathematische Struktur dieses Axiomensystem erfüllt. Jede mathematische Struktur, die den durch die Axiome gegebenen Forderungen genügt wird als ein »Modell« des betreffenden Axiomensystems bezeichnet. Im vorliegenden Artikel wird der Begriff »mathematisches Modell« jedoch nicht in diesem von der mathematischen Logik geprägten Sinne verwendet. Dieser Begriff wird hier so angewandt, wie es in den Naturwissenschaften oder überhaupt in allen auf Experiment und praktischer Erfahrung beruhenden Wissenschaften geschieht.

Unter einem »mathematischen Modell« wird die Abbildung von bestimmten Relationen des Gegenstandsbereiches auf eine mathematische Struktur verstanden. Das zu modellierende Objekt ist also immer ein bestimmter nicht-mathematischer Sachverhalt. Es kann sich dabei um einen bereits in der Realität existierenden Sachverhalt handeln (z. B. eine physikalische oder eine ökonomische Gesetzmäßigkeit); ebensogut aber kann das zu modellierende Objekt auch eine erst noch zu schaffende Struktur sein (z. B. eine technische Konstruktion, ein ökonomisches System).

Es wird nun behauptet, daß die Bildung derartiger mathematischer Modelle und das Operieren mit diesen Modellen das eigentlich Entscheidende, das Wesentliche des Mathematisierungsprozesses sei. Diese Behauptung grenzt den Terminus »Mathematisierung« ab von dem Begriff der »Quantifizierung«.

Man trifft häufig auf die Vorstellung, daß die quantitative Erfassung eines von einer Wissenschaft untersuchten Zusammenhangs schon eine Mathematisierung sei. Einer solchen Verwendungsweise dieses Terminus kann jedoch nicht zugestimmt werden. Mindestens läßt sich dagegen das Argument aufstellen, daß damit das Wesen des Prozesses, der sich hinsichtlich der Rolle der Mathematik in den verschiedenen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens gegenwärtig abzeichnet, nicht erfaßt wird. Die quantitative Erfassung von untersuchten Zusammenhängen ist in der wissenschaftlichen, technischen und industriellen Praxis und auch in der Wirtschaft eigentlich schon immer vorgenommen worden. Das ist im Prinzip nichts Neues. Nicht die Quantifizierung schlechthin, sondern erst das Operieren mit mathematischen Modellen charakterisiert das Neue, was sich gegenwärtig allgemein durchsetzt.

Natürlich soll nicht bestritten werden, daß die Quantifizierung der von einer Wissenschaft untersuchten Zusammenhänge eng mit der Mathematisierung dieser Disziplin verbunden ist. Jedoch macht die quantitative Erfassung eben nicht das Wesen des Mathematisierungsprozesses aus. Es ist weit eher angebracht, die Quantifizierung von Zusammenhängen als eine Vorstufe, als Voraussetzung für die Mathematisierung anzusehen.

Nehmen wir an, in irgendeinem Bereich der Natur, der Technik, der Ökonomie werde festgestellt, daß eine bestimmte interessierende Größe von gewissen Parametern abhängt. In einem solchen Falle wird man durch eine Reihe gezielter Messungen und Analysen zunächst eine genügend große Anzahl von Daten gewinnen. Durch die Zusammenstellung dieser Daten in Form übersichtlicher Tabellen oder durch eine entsprechende graphische Darstellung erhält man die Möglichkeit, den Einfluß der verschiedenen Parametern auf die interessierende Größe zu beurteilen. Es kann in einzelnen Fällen auch zweckmäßig sein, die festgestellten Abhängigkeiten nicht in Form einer Tabelle oder einer Zeichnung, sondern durch einen mathematischen Ausdruck darzustellen. In welcher Form das Ergebnis auch festgehalten wird, es handelt sich der Sache nach stets um die quantitative Erfassung eines funktionellen Zusammenhangs. Es ist aber nicht angebracht, im vorliegenden Falle mit dem Begriff der Mathematisierung zu operieren.

Ganz anders verhält es sich, wenn man sich mit dieser erreichten Quantifizierung nicht zufrieden gibt, sondern nun nach den tieferen gesetzmäßigen Zusammenhängen sucht, die der untersuchten Erscheinung zu Grunde liegen. Ausgehend von bereits bekannten Gesetzen und Theorien wird man Hypothesen aufstellen, die das Ergebnis der Messungen und Analysen erklären. Man wird danach streben, die gewonnenen empirischen Erkenntnisse zu verallgemeinern. Man wird danach streben, die Bedingungen anzugeben, unter denen die beobachtete Erscheinung eintritt. Man wird die aufgestellten Vermutungen durch Experimente erhärten und aus der aufgestellten Hypothese weitere experimentell überprüfbare Aussagen ableiten. Erfolgt nun die Lösung dieser

Aufgaben unter Zuhilfenahme mathematischer Denk- und Arbeitsweisen, so kann von dem betreffenden Wissenszweig mit Recht gesagt werden, daß er mathematisiert ist. In diesem Falle liegt nämlich für die Gesetze und Theorien der betreffenden Wissenschaft ein entsprechendes mathematisches Modell vor, sie sind »mathematisch formuliert«, d. h. auf eine mathematische Struktur abgebildet. Der Vergleich zwischen experimentellen Daten, die Hypothesenüberprüfung usw. schließt dann notwendig ein, daß innerhalb der betreffenden mathematischen Struktur nach den für diese Struktur gültigen mathematischen Sätzen operiert wird. Hier ist die Mathematik wirklich untrennbares Element der betreffenden Wissenschaft, durchdringt sie das ganze Wesen dieser Wissenschaft.

Die oben getroffene Festlegung, daß Mathematisierung im wesentlichen »Operieren mit mathematischen Modellen« bedeutet, führt somit dazu, die Begriffe Quantifizierung und Mathematisierung auseinander zu halten. Quantifizierung ist eine Vorstufe der Mathematisierung. Daraus folgt allerdings keineswegs, daß der quantitativen Erfassung von Zusammenhängen weniger praktische Bedeutung zukommt. Gerade im Zusammenhang mit den Prozessen der wissenschaftlich-technischen Revolution und der Gestaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus gewinnt die quantitative Erfassung soziologischer, ökonomischer und selbstverständlich auch technischer und technologischer Zusammenhänge wachsende Bedeutung. Für die wachsenden Anforderungen reichen rein qualitative Angaben in den meisten Fällen nicht mehr aus, um sachlich begründete Entscheidungen zu fällen. Quantitative Erfassung wird zu einer immer dringenderen Notwendigkeit. Aber ebenso gilt, daß man bei dieser Quantifizierung nicht stehen bleiben darf, daß eine sachlich begründete Entscheidung sich auch auf die Kenntnis des inneren Zusammenhangs dieser quantitativ erfaßten Größen stützen muß, daß sie von der Kenntnis der Wechselwirkungen innerhalb des Systems, über das eine Entscheidung zu fällen ist und von der Wechselwirkung dieses Systems mit anderen neben- und übergeordneten Systemen ausgehen muß. Daraus ergibt sich die immer dringender werdende Forderung nach Modellen, die dieses Zusammenwirken der Parameter überschaubar und damit auch beherrschbar machen. In der Konsequenz läuft diese Forderung nach Modellen auf eine Mathematisierung hinaus. Die Aussage, daß die Quantifizierung eine Vorstufe der Mathematisierung ist, hat also zur praktischen Konsequenz, daß es einerseits eine Mathematisierung, eine mathematische Beherrschung eines Zusammenhangs, eines Systems nicht geben kann, ohne entsprechende Quantifizierung der vorliegenden Parameter, daß es aber andererseits für diesen Zweck nicht genügt, bei der Quantifizierung stehen zu bleiben, sondern daß man nach der Abbildung des betreffenden Zusammenhangs, des jeweiligen Systems auf ein mathematisches Modell streben muß, um durch Operationen in diesem System zu objektiv begründeten Entscheidungen zu gelangen.

2. Die Universalität des Mathematisierungsprozesses

In der Einleitung wurde darauf verwiesen, daß der gegenwärtige Mathematisierungsprozeß sich einerseits darin äußert, daß die Mathematik in steigendem Maße zu einem universellen Forschungsinstrument aller Wissenschaften wird und daß er andererseits darin besteht, daß die Mathematik ein untrennbares Element der praktisch-produktiven Tätigkeit wird. Es erhebt sich die Frage, worin die Universalität dieses Mathematisierungsprozesses begründet ist. Genau genommen handelt es sich hierbei um zwei Fragen. Einerseits ist zu untersuchen, welche Besonderheiten und Eigenschaften der Mathematik den Grund für die universelle Anwendbarkeit mathematischer Strukturen in den verschiedensten Bereichen der wissenschaftlichen Erkenntnis und Praxis bilden. Es handelt sich hier um eine Frage nach dem Wesen der mathematischen Begriffsbildungen und ihrer Anwendbarkeit. Andererseits muß man überlegen, durch welche Tendenzen und Besonderheiten des Prozesses der wissenschaftlich-technischen Revolution das Operieren mit mathematischen Modellen in der Gegenwart zu einer allgemeinen Notwendigkeit theoretischer und praktischer Tätigkeit wird. Hier wird die Frage nach den Funktionen der Mathematik in der theoretischen und praktischen Tätigkeit aufgeworfen, die unter den Bedingungen der wissenschaftlich-technischen Revolution einen allgemeinen Mathematisierungsprozeß erzwingen. Es soll zunächst die Spezifik der mathematischen Widerspiegelung unter dem Gesichtspunkt ihrer Anwendbarkeit in den empirischen Wissenschaften und in der Praxis diskutiert werden. Dazu ist eine Gegenüberstellung von Mathematik und empirischer Wissenschaft erforderlich.

Die Besonderheiten der Mathematik gegenüber den empirischen Wissenschaften treten deutlich in Erscheinung, wenn man die jeweils angewandten Beweismethoden miteinander vergleicht. Der Naturwissenschaftler z. B., der eine Hypothese auf ihren Wahrheitsgehalt hin überprüfen möchte, muß aus dieser Hypothese Folgerungen ableiten, die er in der Praxis, im Experiment, überprüfen kann. Erst durch die Überprüfung an der Praxis wird über die Wahrheit und Falschheit einer Hypothese entschieden. Die Hypothese mag noch so frappierend sein, die Folgerungen mögen noch so genial abgeleitet sein, sie allein geben noch keinerlei Entscheidung, geben noch keinerlei Beweis für die Wahrheit der Hypothese. Die Praxis spricht hier das letzte, entscheidende Wort. Damit wird aber in die gesamte Beweisführung ein Moment der Relativität hineingetragen; denn der Schluß von der im Experiment bestätigten Aussage auf die Wahrheit der Hypothese ist nicht logisch zwingend. Der positive Ausgang des Experiments ist zwar notwendige, aber durchaus nicht hinreichende Bedingung für die Wahrheit der Hypothese. Wird die aus einer Hypothese gezogene Folgerung im Experiment nicht bestätigt, so ist sicher nachgewiesen, daß die Hypothese falsch ist. Wird aber die aus einer Hypothese

gezogene Folgerung im Experiment bestätigt, so erhöht sich lediglich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Hypothese in ihrer Gesamtheit richtig ist; sie kann aber durchaus auch zu eng formuliert sein oder zu weit, sie kann Folgerungen enthalten, die falsch sind.

Ganz anders verhält es sich in der Mathematik. Der Mathematiker geht beim Beweis seiner Behauptungen von wohldefinierten Voraussetzungen aus und zeigt, daß seine Behauptungen sich logisch zwingend aus den Voraussetzungen ergeben. Selbstverständlich tritt auch in der Mathematik der Fall ein, daß bestimmte Voraussetzungen nur notwendige oder nur hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit eines Satzes sind. Aber die Entscheidung darüber, ob gegebene Voraussetzungen notwendig und hinreichend oder ob sie nur das eine oder das andere sind, läßt sich in jedem Einzelfall wenigstens prinzipiell immer fällen. Wesentlich für unseren Zusammenhang ist die Feststellung, daß dann, wenn nachgewiesen ist, daß die aufgestellte Behauptung logisch zwingend aus den Voraussetzungen folgt, der mathematische Beweis abgeschlossen ist. Das betreffende mathematische Problem ist gelöst und zwar ein und für allemal. Eine Überprüfung an der Praxis ist nicht erforderlich. Um dies deutlich zu machen, sei ein Beispiel angeführt. In der Literatur trifft man manchmal auf die Formulierung, daß die Einsteinsche Gravitationstheorie die nichteuklidische Geometrie in der Praxis bestätigt habe. Das ist aber eine reichlich verworrene Formulierung. Natürlich verwendet die Einsteinsche Gravitationstheorie die nichteuklidische Geometrie als mathematisches Modell. Indem die Aussagen der Einsteinschen Gravitationstheorie (Periheldrehung des Merkur, Krümmung des Lichtes in der Nähe gravitierender Massen u. a.) in der Praxis, durch die Beobachtung als richtig erkannt werden, sind wir vollkommen berechtigt zu sagen, daß im Weltall in größeren Bereichen keine euklidische, sondern eine nichteuklidische Geometrie die räumlichen und zeitlichen Beziehungen der physikalischen Objekte beherrscht. Das ist aber auch alles. Die mathematische Richtigkeit der nichteuklidischen Geometrie wird damit keineswegs zur Diskussion gestellt. Selbst den Fall angenommen, daß die experimentellen bzw. Beobachtungsfakten die Einsteinsche Gravitationstheorie widerlegt hätten, so hätte das die mathematische Gültigkeit und Exaktheit der nicht-euklidischen Geometrie in keiner Weise beeinflußt. Die nichteuklidische Geometrie wurde zu Beginn des 19. Jahrhunderts von Gauß, Lobatschewski und Bolyai ausgearbeitet. Das Ausgangsproblem war die Frage, ob das Parallelenaxiom des Euklid tatsächlich ein Axiom darstelle oder ob es aus den anderen Axiomen des Euklid abgeleitet werden könne. Gauß, Lobatschewski und Bolyai wiesen nach, daß bei einer Ersetzung des Parallelenaxioms durch eine andere Aussage sich jedesmal wieder eine logisch widerspruchsfreie Geometrie ergibt, die allerdings nicht mit der Geometrie des Euklid identisch ist. Spätere Autoren untersuchten diese nichteuklidischen geometrischen Strukturen. Diese so gewonnenen Aussagen

sind mathematisch gesichert. Und für die mathematische Richtigkeit dieser Aussagen ist es völlig belanglos, ob in späteren Zeiten (eben Anfang des 20. Jahrhunderts) diese Geometrie für die mathematische Formulierung einer physikalischen Theorie verwendet wurde oder nicht und ob sich diese physikalische Theorie im Experiment und in der Beobachtung bewahrheitete oder nicht. Der erste Eindruck, der sich beim Vergleich der Beweismethoden von Mathematik und Naturwissenschaft ergibt, scheint darauf hinzudeuten, daß in der Mathematik Erkenntnisse durch reines Denken gewonnen werden. Insbesondere drängt sich die Frage auf, ob die mathematischen Erkenntnisse Widerspiegelungscharakter tragen und ob die materialistische Aussage, daß das menschliche Bewußtsein Widerspiegelung der objektiven Realität ist, Allgemeingültigkeit besitzt und auch das mathematische Denken mit einschließt. Tatsächlich ist diese Frage oft verneint worden, und von der Verneinung des Widerspiegelungscharakters der Mathematik ausgehend, sind zahlreiche idealistische Interpretationen der Mathematik und der gesamten menschlichen Erkenntnis begründet worden.

Die Behauptung, daß die Mathematik keinen Widerspiegelungscharakter besitze, ist jedoch falsch. Und ebenso falsch ist es, die getroffenen Feststellungen in dem Sinne zu interpretieren, daß für die Mathematik die grundsätzlichen Erkenntnisse des dialektischen Materialismus über die Wechselbeziehungen zwischen Theorie und Praxis im Erkenntnisprozeß keine Gültigkeit besäßen.

Zunächst muß man in diesem Zusammenhang darauf hinweisen, daß der Gegensatz der Mathematik zu den empirischen Wissenschaften sich lediglich auf die Art des Beweises der aufgestellten Aussagen bezieht. Ehe aber eine Aussage bewiesen werden kann, muß sie erst einmal gefunden, entdeckt werden. In dieser Beziehung tritt der Unterschied zwischen Mathematik und empirischer Wissenschaft in den Hintergrund. Die Art und Weise, in der der Mathematiker zu seinen Aussagen gelangt, unterscheidet sich nicht wesentlich von der des Wissenschaftlers einer anderen Disziplin. Interessante Darlegungen finden sich hierzu bei Polya »Mathematik und plausibles Schließen«.

Ferner muß aber auch hinsichtlich der Beweismethode der Mathematik festgehalten werden, daß sie voll und ganz die allgemeine Aussage der marxistischen Philosophie über die Praxis als das letzte entscheidende Kriterium der Wahrheit bestätigt. Allerdings tritt dieses allgemeine Wahrheitskriterium hier in einer spezifischen Form in Erscheinung, die unmittelbar mit der Spezifik des Gegenstandes der Mathematik in Verbindung steht. Man kann wohl kaum erwarten, daß in der Mathematik als einer Wissenschaft, die sich in ihrem Gegenstand qualitativ von den empirischen Wissenschaften unterscheidet, das allgemeine Wahrheitskriterium in der gleichen Form wirksam wird wie eben in diesen Wissenschaften.

Die Gegenüberstellung der Beweismethoden führt uns somit an die aufgeworfene Frage nach der Spezifik der mathematischen Begriffsbildung.

nach der Spezifik des Widerspiegelungscharakters der Mathematik heran. Es werden sich hiervon ausgehend auch Aussagen über die prinzipielle Anwendbarkeit der Mathematik in Theorie und Praxis ableiten lassen.

Bei der Klassifikation der Wissenschaften nach ihrem Gegenstand wird die Mathematik, zusammen mit der Logik und der Kybernetik, zu den allgemeinen Strukturwissenschaften gerechnet und in dieser Beziehung den Naturwissenschaften, den Gesellschaftswissenschaften, den technischen Wissenschaften und der Philosophie gegenübergestellt. Die Auffassung, daß es sich bei der Mathematik um eine allgemeine Strukturwissenschaft handelt, findet heute allgemeine Zustimmung. In unserem Zusammenhang jedoch ist es erforderlich, die von der Mathematik untersuchten Strukturen philosophisch, erkenntnistheoretisch präziser darzustellen. Dabei handelt es sich weniger um den Strukturbegriff, so wie ihn allgemein die Mathematik definiert, sondern es geht vielmehr darum, über die Grenzen des Mathematischen hinauszugehen und den mathematischen Strukturbegriff mit dem Strukturbegriff, so wie er in den Naturwissenschaften, in den technischen Wissenschaften und in den Gesellschaftswissenschaften verwendet wird, zu konfrontieren. Es kommt darauf an zu unterscheiden, was der Mathematiker meint, wenn er von Struktur spricht, und was der Vertreter einer empirischen Fachdisziplin bezeichnet, wenn er diesen Begriff verwendet.

Wenn vom Strukturbegriff in den Naturwissenschaften die Rede ist, so drängen sich zunächst solche Vorstellungen wie: Struktur des Atomkerns, Struktur des Atoms, Struktur des Moleküls, Struktur des Festkörpers u. ä., auf. Hier handelt es sich um räumliche Strukturen von physikalischen bzw. chemischen Objekten. In diesen Fällen sind uns die Elemente bekannt, aus denen sich die genannten Systeme zusammensetzen. Aus dem Verhalten dieser Systeme, aus ihrer Wechselwirkung mit der Umwelt schließen wir auf die innere Struktur dieser Systeme und meinen damit die Verknüpfung, die Wechselwirkung der Elemente des betreffenden Systems untereinander. Der Strukturbegriff steht hier in einer Kategorienreihe Element — Struktur — System — Verhalten.

Allerdings wird der Strukturbegriff in den Naturwissenschaften auch noch in anderen Zusammenhängen verwendet, in denen es sich durchaus nicht um Wechselwirkungsbeziehungen zwischen »Elementen« im Sinne von physikalischen Objekten handelt. Gemeint sind hier Aussagen z. B. über die raum-zeitliche Struktur von mechanischen Prozessen oder über die Struktur der Raum-Zeit in der allgemeinen Relativitätstheorie u. ä. In diesen Fällen sind die genannten Strukturen durchaus nicht als Beziehungen zwischen irgendwelchen »Elementen«, d. h. physikalischen Objekten, aufzufassen. Wenn von der raum-zeitlichen Struktur mechanischer Prozesse gesprochen wird, so ist damit gemeint, daß die Gesetze der Newtonschen Mechanik Galilei-invariant sind bzw. daß sie bestimmten Erhaltungssätzen genügen, die mit der räum-

lichen und zeitlichen Beschaffenheit dieser Prozesse zusammenhängen. Der Strukturbegriff wird also hier nicht auf bestimmte Objekte, sondern auf bestimmte Prozesse angewendet. Er bezeichnet dabei allgemeine und notwendige, d. h. gesetzmäßige Relationen im raum-zeitlichen Ablauf der vorliegenden Prozesse, und zwar jene raum-zeitlichen Relationen, die die vorliegenden Prozesse in ihrer Qualität, in ihrer qualitativen Besonderheit gegenüber anderen Prozessen charakterisieren. Er bezeichnet sozusagen das Konstante, das Stabile, das Ruhige, das bei allen Prozessen der betreffenden Art erhalten bleibt. Wenn der Strukturbegriff in diesem allgemeinen Sinne verwendet wird, wenn man sich also davon löst, unter Struktur nur räumlich-geometrische Anordnung von Objekten zu verstehen und den Strukturbegriff auch zuläßt bei der Charakterisierung der Qualität von Prozessen, so dürfte es berechtigt sein, auch von den Naturwissenschaften und überhaupt von allen auf Experiment und praktischer Erfahrung beruhenden Wissenschaften zu sagen, daß sie Strukturen erforschen, Strukturen von Objekten und Strukturen von Prozessen. Die Erkenntnis der Struktur der vorliegenden Objekte und Prozesse ist das, worauf die Forschung abzielt. Durch die Erkenntnis der Struktur der Objekte und Prozesse werden wissenschaftliche Voraussagen möglich und wird es möglich, diese Objekte und Prozesse zu beherrschen und der menschlichen Praxis und ihren Zielen zu unterwerfen.

Im Unterschied zu den Naturwissenschaften und den empirischen Wissenschaften überhaupt stellt die Mathematik nicht die Frage nach der Struktur von bestimmten, in der objektiven Realität existierenden Objekten und Prozessen, sondern sie untersucht die Strukturen selbst. Die Fragestellungen des Mathematikers sind: Unter welchen Bedingungen ist eine bestimmte Struktur überhaupt möglich? Welche Relationen müssen notwendig in einer durch bestimmte Axiome und Postulate gegebenen Struktur verwirklicht sein? Ist eine bestimmte, gesuchte Relation innerhalb einer vorgegebenen Struktur existent?

Um derartige Probleme untersuchen zu können, ist es erforderlich, die in der Realität vorliegenden Strukturen gedanklich von den Objekten und Prozessen, in denen sie verwirklicht sind, zu lösen und die Strukturen »als solche«, als Abstrakta zu untersuchen. Die mathematischen Strukturen sind — im Gegensatz zu den von der Naturwissenschaft untersuchten Strukturen — abstrakte Strukturen. Aber nicht nur das. Eben um die genannten Fragen beantworten zu können, nämlich unter welchen Bedingungen eine bestimmte Struktur überhaupt möglich ist und welche Beziehungen innerhalb einer bestimmten Struktur verwirklicht sind, um diese Fragen beantworten zu können, kann die Mathematik nicht bei einer bloß abstrakten Formulierung der bekannter Strukturen beharren bleiben, sondern sie muß von sich aus neue Strukturen konstruieren, diese neuen Strukturen mit den bekannten vergleichen. Nur dadurch gelangt sie zu immer tieferen Einsichten in die

Strukturen, die in der menschlichen Praxis auftreten. Die mathematischen Strukturen sind deshalb nicht nur schlechthin abstrakt sondern es handelt sich bei den mathematischen Strukturen — im Gegensatz zu den objektiv-realen Strukturen der empirischen Wissenschaften — um potentiell mögliche Strukturen. Damit ist gemeint, daß eine von der Mathematik untersuchte bzw. konstruierte Struktur durchaus nicht in der Praxis gegeben sein muß. Es ist durchaus möglich, daß die Mathematik zur Untersuchung und Konstruktion der betreffenden Struktur gelangt ist, indem innermathematische Erkenntnisse verallgemeinert und verglichen wurden. Aber auch wenn eine Struktur auf diesem Wege abgeleitet wurde, sind wir durchaus berechtigt zu sagen, daß diese Struktur in der Realität verwirklicht sein kann, daß die Möglichkeit prinzipiell gegeben ist, eine derartige Struktur in der Wirklichkeit anzutreffen bzw. eine derartige Struktur in einem von Menschen bewußt geschaffenen materiellen System zu realisieren.

Diese Behauptung bedarf selbstverständlich einer Begründung. Worauf gründet sich die Annahme, daß es sich bei der Mathematik um potentiell mögliche Strukturen handelt, von denen man prinzipiell annehmen darf, daß sie in der objektiven Realität existieren bzw. in der menschlichen Praxis verwirklicht werden können? Die Ursache hierfür liegt letztlich darin, daß die Mathematik ihre Aussagen mit Hilfe der Logik beweist, daß aber die Gesetze der Logik ihrerseits Widerspiegelungen der objektiven Realität sind. Die Gesetze der Logik sind empirische Erkenntnisse wie die der Psychologie, der Naturwissenschaft und anderer Bereiche der empirischen Wissenschaft. Sie sind deshalb auch unmittelbar der Praxis als dem Kriterium der Wahrheit unterworfen. Aber die logischen Gesetze sind das in einem bedeutend umfassenderen Maße als jede beliebige andere Wissenschaft. Wohl gibt es keinen spezifischen Praxisbereich der Logik, wie es etwa einen Praxisbereich der Chemie, der Biologie usw, gibt. Jedoch treten die Gesetze der Logik, in welchem spezifischen Bereich der Praxis man sich auch befinden mag, stets in Aktion. Sie sind stets in der Praxis verwirklicht. Die Gesetze der Logik haben die sicherste Grundlage alles menschlichen Wissens: die Gesamtheit der vergangenen und gegenwärtigen Praxis der Menschheit. Indem der Mathematiker seine Problemstellungen mit Hilfe der Anwendung der Logik untersucht und die logischen Gesetze als Kriterium für die Richtigkeit seiner Aussagen verwendet, stellt er im Grunde genommen keine andere Frage als die, ob unter der Voraussetzung, daß die logischen Gesetze allgemeine Gültigkeit besitzen, die von ihm konstruierten Strukturen und die in diesen Strukturen nachgewiesenen Relationen in der Wirklichkeit existieren können, ob prinzipiell die Möglichkeit besteht, derartige Systeme, Strukturen, Relationen in der Wirklichkeit anzutreffen.

In Hinblick auf die Untersuchung der Strukturen in der objektiven Realität besteht demnach zwischen den empirischen Wissenschaften und der

Mathematik das Verhältnis zwischen Objekttheorie und Metatheorie. Die empirischen Wissenschaften erforschen die wirklichen Strukturen der realen Objekte und Prozesse. Die Mathematik abstrahiert bei ihren Untersuchungen von den wirklichen in der Praxis gegebenen Strukturen. Sie untersucht die Gesetzmäßigkeit und die Relationen von Strukturen schlechthin, unabhängig von den Objekten und Prozessen, in denen diese Strukturen realisiert sind. Dadurch ist sie in der Lage, eine Fülle von abstrakten Strukturen auf Vorrat zu schaffen. Der Nachweis, daß eine derartige Struktur bei einem untersuchten Objekt vorliegt, verlangt allerdings in jedem Falle gründliche fachwissenschaftliche Untersuchungen. Natürlich ist es ebenso nicht ausgeschlossen und in der Geschichte der Mathematik ist dieser Fall sehr oft eingetreten, daß die Praxis im Experiment und in der Industrie auf Strukturen trifft, die in ihrer inneren Gesetzmäßigkeit noch nicht von der Mathematik untersucht worden sind. Die von der Praxis an die Mathematik gestellte Frage hat denn jedes Mal zu einer raschen Entwicklung neuer mathematischer Forschungsrichtungen geführt.

Damit ist die eingangs gestellte Frage nach den Gründen für die universelle Anwendbarkeit der Mathematik in allen Bereichen der theoretischen und praktischen Tätigkeit im Prinzip beantwortet. Die Mathematik besitzt zu ihrem Gegenstand die Untersuchung abstrakter Strukturen, wobei aber zugleich durch die Untersuchungs- und Beweismethode gesichert ist, daß diese Strukturen in der objektiven Realität prinzipiell existieren können bzw. daß es prinzipiell möglich ist, derartige Strukturen durch die zielbewußte menschliche Tätigkeit zu schaffen.

Indem jede Wissenschaft letztlich auf die Erkenntnis von Strukturen abzielt, ist sie somit auch prinzipiell mathematisierbar. Indem die menschliche Praxis in steigendem Maße auf die Beherrschung von Systemen abzielt, wird die Mathematik zu einem notwendigen Element der praktisch-gegenständlichen Tätigkeit.

3. Die Funktionen der Mathematik in der theoretischen und praktischen Tätigkeit

Die Frage nach der prinzipiellen Möglichkeit der Mathematisierung ist nur der eine Aspekt des aufgeworfenen Problems; der andere Aspekt besteht darin, daß die theoretische und praktische Tätigkeit des Menschen im Prozeß der wissenschaftlich-technischen Revolution offenbar einen Entwicklungsstand erreicht hat, der die durchgängige Mathematisierung verlangt. Wodurch ist dieser Entwicklungsstand charakterisiert? Welche praktischen und theoretischen Probleme sind es, die eine qualitativ neue Rolle der Mathematik im gesellschaftlichen Leben bedingen?

Die Antwort auf diese Frage soll in zwei Schritten erfolgen. Der erste Schritt besteht darin daß zunächst einmal untersucht wird welche Funktionen

die Mathematik überhaupt im Rahmen von empirischer Forschung und praktischer Tätigkeit übernehmen kann, welche Aufgaben der theoretischen und praktischen Tätigkeit durch das Operieren mit mathematischen Strukturen gelöst werden können bzw. gelöst werden müssen. Es ist dabei verständlich, daß diese Untersuchung am Beispiel einer Wissenschaft vorgenommen werden muß, die schon heute einen hohen Mathematisierungsgrad besitzt. Wir wählen dazu die Physik. — Der zweite Schritt soll uns dann zu dem Nachweis führen, daß durch die wissenschaftlich-technische Revolution und ihre Meisterung auf der Grundlage sozialistischer Produktionsverhältnisse gerade solche Probleme durch Theorie und Praxis massenhaft gestellt werden, die eine Mathematisierung des betreffenden Gebietes erfordern.

Im Rahmen der Physik sind es vor allem zwei Aufgabenstellungen zu deren Lösung die Mathematik traditionell eingesetzt wird. Einerseits handelt es sich um die experimentelle Überprüfung von aufgestellten Hypothesen, andererseits um die Ableitung wissenschaftlicher Voraussagen.

Die Einbeziehung der Mathematik in die experimentelle Methode der Physik vollzog in klassischer Weise Galilei beim Nachweis der Gültigkeit des von ihm erkannten Trägheitsgesetzes. Im allgemeinen Falle handelt es sich immer darum, aus einer aufgestellten wissenschaftlichen Hypothese, die auf ihren Wahrheitsgehalt untersucht werden soll, streng deduktiv Aussagen abzuleiten, die im Experiment überprüfbar sind. Der streng deduktive, d.h. logisch zwingende Charakter der Ableitung ist dabei unbedingtes Erfordernis für die experimentelle Überprüfung. Nur dann, wenn die im Experiment überprüfte Aussage streng deduktiv aus der jeweiligen Hypothese folgt, lassen sich aus den experimentellen Befunden exakte Schlüsse auf die Wahrheit oder Falschheit dieser Hypothese ziehen. Der Einsatz der Mathematik bei der Ableitung der experimentell überprüfbaren Aussage aus der Hypothese ist hier möglich und sinnvoll; denn durch das Operieren mit mathematischen Modellen wird auf jeden Fall die Sicherheit und Präzision des Schlusses erhöht. Mathematische Strukturen sind ja von vornherein logisch widerspruchsfrei aufgebaut, sind ihrer Konstruktion nach von den Gesetzen der Logik beherrscht. Das fehlerlose Operieren in diesen Strukturen garantiert somit den streng deduktiven Charakter des Schlusses von der Hypothese auf das Experiment. Die Entwicklung der Physik zeigt jedoch, daß durch die Mathematisierung nicht nur die Sicherheit und Präzision des Schlusses erhöht wird, sondern daß dadurch sehr oft überhaupt erst Möglichkeiten der praktischen Überprüfung sichtbar werden und daß durch die Mathematisierung sich neue, zunächst nicht erkannte Zusammenhänge erschließen. — Die Entwicklung der Physik zeigt darüber hinaus, daß gerade im Zusammenhang mit der experimentellen Methode die Rolle der Mathematik ständig zunimmt. Erfolgte im Rahmen der klassischen Physik die Mathematisierung in der Form, daß man die Hypothese zunächst in einem anschaulichen Modell sich vorstellte und dann die

Relationen in diesem Modell auf eine mathematische Struktur übertrag, so finden wir in den modernen Gebieten der Physik gerade das Gegenteil. Die Hypothese wird von Anfang an mathematisch formuliert; ihre anschauliche Deutung bietet oft Schwierigkeiten, erfolgt oft zeitlich später. In der Quantenmechanik bietet die mathematische Formulierung im allgemeinen die einzige Möglichkeit, um eine Hypothese in geschlossener Form darzustellen. — Ohne hier weiter ins Detail zu gehen, kann man wohl festhalten, daß die umfassende Einbeziehung der experimentellen Methode bei der Erforschung von Gesetzen und bei der Aufstellung von Theorien in steigendem Maße eine Mathematisierung der betreffenden Wissenschaft erforderlich macht.

Zu der gleichen Aussage über die Notwendigkeit der Mathematisierung wird man auch geführt, wenn man von der Aufgabe ausgeht, daß eine Wissenschaft zu Voraussagen führen muß. Wissenschaftliche Voraussagen, Prognosen, sind nur auf der Grundlage der Erkenntnis objektiver Gesetze möglich. Selbstverständlich müssen diese Gesetze dabei durchaus nicht unbedingt in mathematischer Form vorliegen. Dafür gibt es treffende Beweise in allen Sphären des wissenschaftlichen Lebens. Die Voraussage der Existenz von chemischen Elementen, die seinerzeit unbekannt waren, durch Mendelejew ist hierfür ein ebenso treffendes Beispiel für den Bereich der Naturwissenschaft, wie es die Voraussage von Karl Marx darstellt, daß der Klassenkampf des Proletariats notwendig zum Sturz des Kapitalismus und zur Errichtung der sozialistischen Gesellschaft führen muß. Andererseits aber bringt uns die Physik Beispiele dafür, daß für bestimmte Prognosen eine Mathematisierung erforderlich ist.

Es lassen sich wissenschaftliche Voraussagen anführen, die nur aufgrund einer weitgehenden Mathematisierung möglich wären. So konnte z. B. Maxwell die Existenz elektromagnetischer Wellen eben gerade deshalb voraussagen, weil er die Gesetze der Elektrodynamik in allgemeiner mathematischer Form aufgestellt hatte. Jene kleine Vervollkommnung des Gleichungssystems, die Maxwell vornahm und die wir als »Maxwellsche Ergänzung« bezeichnen — Maxwell gelangte zu ihr aufgrund physikalischer Erwägungen und mathematischer Annahmen —, bildete den theoretischen Ausgangspunkt für die praktischen Erfolge der Nachrichtentechnik, des Fernsehens, der Radartechnik usw. Nicht weniger instruktiv ist die Entdeckung des Positrons in den 30er Jahren dieses Jahrhunderts. Letztlich gab sie ja die Impulse für die Entwicklung der Elementarteilchenphysik. Auch hier bestand der Ausgangspunkt in einer wissenschaftlichen Prognose, die Dirac auf der Grundlage der relativistischen Formulierung der Schrödinger-Gleichung vornahm. Das Positron wurde sozusagen erst theoretisch, durch mathematische Ableitungen »entdeckt«, ehe seine Existenz in der Wirklichkeit nachgewiesen wurde. Es scheint die Feststellung möglich, daß eine Prognose, wenn sie über eine Darstellung des allgemeinen Trends hinausgehen soll, wenn sie zu qualitativ neuen, uns

bisher unbekanntem Erscheinungen und Zusammenhängen vorstoßen soll, in wachsendem Maße von der Mathematisierung der betreffenden Wissenschaft abhängt.

Nun sind es aber gerade die Probleme der Prognose des gesellschaftlichen Lebens in allen seinen Sphären, die durch die wissenschaftlich-technische Revolution und die Gestaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus auf die Tagesordnung gesetzt werden. Wissenschaftlich begründete Prognosen erfordern Kenntnis von objektiven Gesetzen, die aus Experimenten gewonnen werden müssen. Experimente in der Gesellschaft sind aber nicht in beliebiger Menge und schon gar nicht in Hinblick auf alle Fragen möglich. Das verbieten vor allem humanistische und ethische Grundsätze, das verbieten natürlich auch ökonomische Fakten und nicht zuletzt verbieten es die Probleme und Aufgaben des Klassenkampfes in unserer Zeit. Aus jedem Experiment muß also ein Maximum an Informationen herausgeholt werden. Die aus jedem Experiment gewonnenen Aussagen müssen so sicher und exakt als nur irgend möglich sein. Das sind Ursachen genug für eine umfassende Mathematisierung in allen Bereichen der praktischen und theoretischen Tätigkeit. Hinzu kommen noch — aus den Erfordernissen der Vollen- dung des sozialistischen Aufbaus resultierend — die Probleme der Optimierung. Die damit zusammenhängenden Aufgabenstellungen sind ohne ein gezieltes Operieren mit mathematischen Modellen schon gar nicht mehr zu bewältigen.

Durch die wissenschaftlich-technische Revolution und ihre Meisterung auf der Grundlage sozialistischer Produktionsverhältnisse werden also gerade jene Elemente der praktischen und theoretischen Tätigkeit in den Vordergrund gedrängt, die einen universellen Einsatz der Mathematik zu ihrer Bewältigung erfordern. Es geht um die gedankliche Konstruktion von Systemen und Strukturen die auf der Grundlage erkannter Gesetze und Relationen in der Zukunft bewußt durch die menschliche Tätigkeit errichtet werden. Es geht darum, diese Gesetze und Relationen durch die exakte gedankliche Rekonstruktion der Systeme und Strukturen der Gegenwart zu erforschen. Es geht darum, die Entwicklung dieser Systeme und Strukturen zu prognostizieren und zu optimieren. Unsere Zeit, unser Leben, unsere Probleme, die wir in der Praxis zu bewältigen haben, drängen nach einer durchgängigen Mathematisierung aller Sphären unserer bewußten Tätigkeit.

4. Entwicklungsprobleme der Mathematik in der wissenschaftlich—technischen Revolution

An dieser Stelle erhebt sich die Frage: Welche Folgerungen ergeben sich aus diesem Mathematisierungsprozeß der wissenschaftlichen Erkenntnis und der Praxis für die Mathematik selbst? Es ist doch kaum zu vermuten, daß

ein qualitativer Wandel, den die Mathematik in ihrer praktischen Wirksamkeit erfährt, die Mathematik selbst völlig unberührt läßt. Vielmehr liegt doch die Vermutung nahe, daß auch die Mathematik in ihrer Entwicklung, in der Problemstellung und -lösung, in den Gebieten, deren Erforschung sie sich zuwendet, eine spürbare Änderung erfährt.

Diese Frage ist vollauf berechtigt, schon aus dem einfachen Grunde, weil die vorhandenen Kräfte auch auf dem Gebiet der Mathematik mit einem gesellschaftlich höchstmöglichen Nutzeffekt eingesetzt werden müssen, weil auch die Entwicklung der Mathematik optimal geplant werden muß. Diese Frage erscheint aber auch aus dem Grunde berechtigt, weil ganz offensichtlich eine wachsende Anzahl von Mathematikern ein mehr oder weniger ausgeprägtes Unbehagen mit dem gegenwärtigen Zustand der Mathematik verspürt. Man trifft auf Äußerungen — wobei diese Stimmen vor allem aus dem Kreise der sog. »angewandten Mathematik« kommen —, daß die Mathematik sich in einem Zustand der Sterilität hineinmanövriert habe, daß zwar viel Geschäftigkeit in der Mathematik herrsche, aber auf Gebieten und mit Methoden, die den Anwendungsgebieten und -möglichkeiten der Mathematik fern sind. Das Unbehagen äußert sich in der Kritik an einem »l'art pour l'art-Standpunkt« mancher Mathematiker, an der Tendenz, die Mathematik um der Mathematik willen und nicht um des Lebens, des Menschen, der Praxis willen zu betreiben.

Aus der Fülle kritischer Stimmen sei D. Laugwitz herausgegriffen. Er schreibt:

»Der Inhalt der Mathematik wird nämlich zur Zeit wesentlich von der Form, also von der vorherrschenden axiomatischen Methode geprägt. Da werden »Homologie-« und »Cohomologie-Theorien« axiomatisch entwickelt, und jeder kleine Topologe strebt nach den Aufbau einer großen Theorie aus einem von ihm selbst angegebenen Axiomensystem, und das Ergebnis sind bestenfalls Sätze, die von der Mehrheit der mathematischen Zeitgenossen als Triumphe des Geistes gefeiert werden, die aber im Gesamtgebäude der Mathematik nur dann überhaupt zu sehen sind, wenn man ein winziges Eckchen der Mathematik in unendlicher Vergrößerung betrachtet.«

Den Weg zur Überwindung dieses Zustandes skizziert D. Laugwitz durch einen Hinweis auf die Geschichte der Mathematik:

»Würde man unter den Mathematikern eine Meinungsbefragung anstreben, um das Dutzend der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit zu ermitteln, so fänden sich darunter mit Sicherheit die folgenden 7 Namen: Newton, Leibnitz, Euler, Gauß, Riemann, Hilbert und H. Weyl. Alle diese . . . waren an den Anwendungen der Mathematik in Physik, Mechanik, Geodäsie nicht nur interessiert, sondern sie haben mindestens eines dieser Gebiete wesentlich bereichert und haben umgekehrt für ihre mathematische Arbeit wesentliche Anregungen aus diesen Anwendungsgebieten erhalten. Mir scheint es ein

historisches Faktum zu sein, daß das zur Charakteristik des bedeutenden Mathematikers gehört.«

Das grundsätzliche Anliegen, das hier deutlich spürbar wird, ist die Aufforderung, daß die Mathematik sich den Problemen der Praxis zuwenden muß, daß die Mathematik sich ihres Zusammenhangs, ihrer Wechselwirkung mit den Problemen der wissenschaftlichen Forschung und der industriellen und sozialen Praxis bewußt werden und diese Wechselwirkungen planmäßig gestalten muß. Diese Hinwendung zur Praxis ist jedoch — wie der zitierte Autor offensichtlich meint — nicht nur ein Erfordernis der Praxis, sondern auch ein dringendes Bedürfnis der Mathematik. Es geht dem Verfasser nicht darum, der Mathematik gegenüber der empirischen Forschung und Praxis eine Mägdelfunktion zuzuordnen, sie vielleicht in eine Art allgemeine Hilfswissenschaft zu degradieren, sondern letztlich geht es darum, zu einem neuen Aufblühen des mathematischen Denkens zu gelangen, der Mathematik neue Probleme und Gesichtspunkte ihrer allseitigen Entwicklung zu erschließen. Deshalb spricht D. Laugwitz auch von einer gewissen Rückkehr zu der typisch mathematischen Vorgehensweise, wie sie den bedeutendsten Mathematikern der Vergangenheit eigen war, zu einer Vorgehensweise, »in der das Blut des konkreten Problems noch kräftig pulsiert, insofern die Theorien aus der bunten Fülle der Anwendungsgebiete erwachsen sind und sofern sie den Kontakt zu diesen Anwendungsgebieten nicht verloren haben.«

Selbstverständlich darf eine solche Hinwendung zur Praxis nicht die Eigengesetzlichkeit der Mathematik außer acht lassen. Aus den vorliegenden Darlegungen geht wohl eindeutig hervor, daß die Mathematik ihre universelle Rolle für Theorie und Praxis eben dadurch realisieren kann, daß sie einen Vorlauf an erforschten Strukturen schafft und daß dieser Vorlauf gerade unter den Bedingungen der wissenschaftlich-technischen Revolution wachsende Bedeutung gewinnt. Es kann sich bei dieser Hinwendung zur Praxis also durchaus nicht darum handeln, daß die Mathematik darauf verzichtet, Strukturen auf Vorlauf zu konstruieren und zu erforschen. Wohl aber handelt es sich darum, daß die Mathematik einen Vorlauf an praktisch einsetzbaren Strukturen schafft, daß sie Strukturen konstruiert und erforscht, von denen man mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen kann, daß sie in der künftigen Praxis zum Einsatz kommen werden, daß sie ausgehend von der Praxis auf die Erforschung solcher Strukturen zusteuert, deren künftige Bedeutung sich schon in der gegenwärtigen Praxis abzeichnet.

Sehr oft stößt man in der Literatur auf die Feststellung, daß der weitaus größere Teil der von der Mathematik zutage geförderten Erkenntnisse brach liege. Das ist doch aber offensichtlich kein Lob für die Mathematik, sondern eher ein bitterer Vorwurf —, ein Vorwurf, der darauf hinausläuft, daß in der gegenwärtigen Tätigkeit der Mathematiker wertvolle geistige Arbeit verschwendet wird, daß wertvolle geistige Arbeit in der Vergangenheit und auch

noch gegenwärtig darauf aufgewendet wird — man entschuldige den profanen Ausdruck — »mathematische Ladenhüter« zu produzieren. Andererseits ist es eine Tatsache, daß die Mathematisierung großer Gebiete in Forschung und Praxis auf erhebliche Schwierigkeiten stößt, daß sie nur langsam vorangeht. Ist aber die Mathematisierung von Forschung und Praxis nun nur und ausschließlich Aufgabe der Vertreter der entsprechenden Fachdisziplinen und der Praktiker? Läßt sich daraus nur die Forderung ableiten, daß eben deren mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten erweitert werden müssen? Oder erwachsen nicht umgekehrt hier dem Mathematiker neue Aufgaben, muß er an diesem Mathematisierungsprozeß nicht als Mathematiker in Gemeinschaftsarbeit mit Vertretern anderer Fachdisziplinen zusammenwirken? Erhält er nicht gerade, indem er sich an der Lösung dieser Aufgaben beteiligt, neue Impulse für mathematische Problemstellungen? Und wird nicht gerade von hier aus der Weg erschlossen, auf dem die Verschwendung mathematischer Denkkapazität überwunden werden kann und auf dem die Mathematik tatsächlich zu einer Neupropportionierung ihrer einzelnen Untergebiete, zu Fragestellungen in diesen Untergebieten gelangt, die einen wirklichen echten Vorlauf der mathematischen Forschung für die Erfordernisse der Praxis darstellen?

Es kann hier nicht darum gehen, für diese Fragen konkrete Lösungen anzugeben. Das kommt dieser Abhandlung als einer philosophischen Arbeit nicht zu. Vor allem aber kann man auf diese Fragen erst dann eine konkrete Antwort geben, wenn der skizzierte Weg in der Praxis beschritten wird, wenn praktische Erfahrungen vorliegen. Wir können zunächst nur so viel festhalten, daß die künftige Entwicklung der Mathematik auf Grund der praktischen Erfordernisse der wissenschaftlich-technischen Revolution diesen Weg der Hinwendung zur Praxis nehmen wird. Es ist das eine Rückkehr zu den Quellen, von denen die mathematische Entwicklung der Neuzeit ausging, aber eine Rückkehr auf höherer Stufe, die die Kenntnisse und Erfahrungen einer mehr als 300-jährigen Entwicklung der Mathematik von Descartes bis zur Gegenwart aufbewahrt. Es ist eine Negation der Negation, die sich in der Entwicklung der Mathematik vollzieht, die zu einer neuen Entwicklungsphase der Mathematik aber zugleich auch zu einer qualitativ neuen Rolle dieser Wissenschaft in allen Sphären unseres gesellschaftlichen Lebens führt.

Doz. Dr. Dieter MÜLLER, Technische Universität, Dresden, D.D.R.