DIE ANWENDUNG DER MATRIZENRECHNUNG ZUR NÄHERUNGSWEISEN BESTIMMUNG DER GREENSCHEN FUNKTION EINES KREISNAHEN GEBIETES

Von

P. BAJCSAY

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität Budapest,

(Eingegangen am 12. Dezember, 1968)
Vorgelegt von Prof. Dr. M. FARKAS

1. §. Die Aufstellung des Problems

Die am öftesten angewandte Methode zur Bestimmung des Strömungsbildes im Falle eines gegebenen Profils ist bekanntlich (siehe z. B. [1] S. 262, bzw. 300) die Methode der konformen Abbildungen. Die Grundlage dieser Methode bilden einerseits der Riemannsche Abbildungssatz, der besagt, daß sich ein einfach zusammenhängendes Gebiet (das von mindestens zwei Randpunkten begrenzt ist) umkehrbar, eindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises abbilden läßt, und andererseits die Tatsache, daß das komplexe Potential $f(w)$, welches die Umströmung eines kreisförmigen Profils beschreibt, wohlbekannt ist. (Der reelle Teil des komplexen Potentials ist z. B. das Geschwindigkeitspotential und der imaginäre Teil die Stromfunktion.) Sind nämlich L die in der (x, y)-Ebene (im folgenden: z-Ebene) gegebene Profilkurve und $w = w(z)$ jene reguläre komplexe Funktion, die das von der Profilkurve umschlossene Gebiet unkehrbar, eindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises abbildet, so ist das komplexe Potential der ebenen Strömung der z-Ebene die zusammengesetzte Funktion $f(w[z])$. Der absolute Betrag des Geschwindigkeitsvektors der gesuchten Strömung ist durch die Beziehung

$$|\mathrm{v}| = \left|\frac{df}{dz}\right| = \left|\frac{df}{dw}\right| \left|\frac{dw}{dz}\right|$$

bestimmt.

Das ganze Strömungsproblem kann also als gelöst betrachtet werden, wenn die Abbildungsfunktion bekannt ist. Diese Funktion läßt sich z. B. durch die Bestimmung der zur gegebenen Profilkurve gehörenden Greenschen Funktion ermitteln. (Siehe z. B. [2] S. 249, oder [3] S. 503.)

Es sei nämlich

$$r = \mathrm{R}(\varphi)$$

die Gleichung in Polarkoordinaten der gegebenen Profilkurve L. (Es wird vorausgesetzt, daß $\mathrm{R}(\varphi) > 0$, und eine eindeutige, stetige Funktion sei; ferner, daß die gegebene Kurve L eine kreisnahe Kurve sei, die z. B. schon als Ergebnis einiger bekannten konformen Abbildungen von der früher gegebenen Profilkurve entstanden ist.)

Wir bezeichnen die unbekannte Greensche Funktion mit

$$g = g(r, \varphi). \tag{1.1}$$

Diese hat folgende Eigenschaften:

1. Sie befriedigt, außer für den 0-Punkt, die Laplacesche Differentialgleichung:

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0\,. \tag{1.2}$$

2. $g(r, \varphi) + \ln r$ befriedigt die Laplacesche Differentialgleichung auch im 0-Punkt.

3. $g(\mathrm{R}(\varphi), \varphi) = 0$ in den Punkten der Randkurve L.

Wird durch

$$h = h\,(r, \varphi) \tag{1.3}$$

die der harmonischen Funktion $g(r, \varphi)$ zugeordnete, konjugierte, ebenfalls harmonische Funktion bezeichnet, dann ergibt sich mit Hilfe der analytischen Funktion

$$p(z) = p(re^{i\varphi}) = g(r, \varphi) + ih(r, \varphi) \tag{1.4}$$

($i = +\sqrt{-1}$ ist die imaginäre Einheit) die gesuchte Abbildungsfunktion:

$$w = w(z) = \exp\,(-p(z))\,. \tag{1.5}$$

Die Bedingung für eine logarithmische Singularität im 0-Punkt der Funktion (1.1) wird dadurch erfüllt, daß statt (1.1) die Funktion

$$G\,(r,\varphi) = g\,(r,\varphi) + \ln r \tag{1.6}$$

zu bestimmen versucht wird. Die Funktion (1.6) befriedigt in jedem Punkte des durch die Randkurve L begrenzten Gebietes die Laplacesche Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + r \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{1.7}$$

und entspricht der Randbedingung

$$G(R(\varphi), \varphi) = \ln R(\varphi)\,. \tag{1.8}$$

Im folgenden wird mit Hilfe der Matrizenrechnung eine Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Funktion (1.6) dargestellt. Die Grundlage für dieser Methode bildet die sogenannte Linienmethode, die zum erstenmal zur näherungsweisen Lösung elliptischer Differentialgleichungen von M. G. SLOBODIANSKI angewandt wurde. (Siehe [4] und auch [5], [6].)

2. §. Die näherungsweise Bestimmung der Greenschen Funktion

Teilen wir das Gebiet durch die Annahme von n geraden, vom 0-Punkt ausgehenden Halbstrahlen in n Teile ($\varphi = \text{const.}$) ein. Es gelte

$$\varphi_j - \varphi_{j-1} = \delta = \frac{2\pi}{n}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \ (\varphi_0 = 0) .$$

Es werden die folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$G_j = G_j(r) = G(r, \varphi_j), \qquad j = 1, 2, \ldots n,$$

$$G_j' = G_j'(r) = \frac{dG_j}{dr} = \frac{\partial G}{\partial r}(r, \varphi_j) .$$

Auf Grund der Beziehung

$$G(r, \varphi + 2\pi) = G(r, \varphi)$$

gilt offensichtlich:

$$G_j(r) \equiv G_{j+n}(r), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

und speziell

$$G_0(r) \equiv G_n(r) .$$

Auf Grund der Beziehung

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}(r, \varphi_j) = \frac{G_{j-1} - 2G_j + G_{j+1}}{\delta^2} + 0(\delta^2) , \tag{2.1}$$

kann die zu lösende Differentialgleichung (1.7) mit guter Näherung durch das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ersetzt werden:

$$r^2 \frac{d^2 G_j}{dr^2} + r \frac{dG_j}{dr} = \frac{-G_{j-1} + 2G_j - G_{j+1}}{\delta^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Es ist zweckmäßig, eine neue Veränderliche durch die Beziehung

$$r = e^t \tag{2.3}$$

einzuführen. Dann gelten nämlich:

$$t = \ln r, \quad \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}$$

und

$$\frac{dG_j}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dG_j}{dt}, \quad \frac{d^2 G_j}{dr^2} = \frac{1}{r^2}\frac{d^2 G_j}{dt^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dG_j}{dt}.$$

Somit ergibt sich aus (2.2) folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\frac{d^2 G_j}{dt^2} = \frac{-G_{j-1} + 2G_j - G_{j+1}}{\delta^2}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Es sollen noch folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}$$

ist der Spaltenvektor der unbekannten Funktionen G_j und

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n(2, -1, 0, \ldots, 0, -1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

eine zyklische Matrix der Ordnung n.

Diese zyklische Matrix $\mathbf{K}_n$ läßt sich bekanntlich (siehe z. B. [7] S. 231.) durch eine Ähnlichkeitstransformation in Diagonalform transformieren, d. h.

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{W}_n \langle \varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1} \rangle \overline{\mathbf{W}}_n^* \tag{2.5}$$

wobei

$$\varkappa_k = 2 - \omega_k - \omega_k^{n-1} = 4\sin^2\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\left(\omega_k = \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right), \quad \overline{\omega}_k = \exp\left(-ik\frac{2\pi}{n}\right), \quad i = +\sqrt{-1}\right);$$

ferner

$$\mathbf{W}_n = [\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}], \quad \overline{\mathbf{W}}_n^* = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{w}}_0^* \\ \overline{\mathbf{w}}_1^* \\ \overline{\mathbf{w}}_2^* \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{w}}_n^* \end{bmatrix}$$

wobei

$$\mathbf{w}_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{w}}_k^* = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[1, \overline{\omega}_k, \overline{\omega}_k^2, \ldots, \overline{\omega}_k^{n-1}\right].$$

Es gilt offensichtlich

$$\overline{\mathbf{w}}_k^* \mathbf{w}_l = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad k = l, \\ 0, & \text{wenn} \quad k \neq l, \end{cases}$$

d. h.

$$\overline{\mathbf{W}}_n^* \mathbf{W}_n = \mathbf{E}_n,$$

also

$$\mathbf{W}_n^{-1} = \overline{\mathbf{W}}_n^* .$$

Mit diesen eingeführten Bezeichnungen kann das Differentialgleichungssystem (2.4) in folgender Matrizenform dargestellt werden:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{g} = \frac{1}{\delta^2}\mathbf{K}_n \mathbf{g}. \tag{2.6}$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß die allgemeine Lösung der Gleichung (2.6) lautet:

$$\mathbf{g} = \exp\left(\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}\, t\right)\mathbf{k}_1 + \exp\left(-\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}\, t\right)\mathbf{k}_2, \tag{2.7}$$

wobei die Spaltenvektoren $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ Integrationskonstanten bedeuten. Wird noch die Beziehung

$$t = \ln r$$

in Betracht gezogen, so kann die Lösung (2.7) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{g} = \exp\left(\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}\ln r\right)\mathbf{k}_1 + \exp\left(-\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}\ln r\right)\mathbf{k}_2 =$$

$$= r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}}\mathbf{k}_1 + \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}}\mathbf{k}_2 .$$

Die Elemente des Spaltenvektors $\mathbf{g}$ müssen in jedem Punkte des von der Randkurve L begrenzten Gebietes beschränkte Funktionen sein und darum muß $\mathbf{k}_2 = 0$ gelten. Somit reduziert sich das zu lösende Problem auf die Bestimmung des Spaltenvektors $\mathbf{k}_1$. Dazu muß die in (1.8) vorgeschriebene Randbedingung in Betracht gezogen werden.

Bezeichnet man durch $\mathbf{e}_j^*$ einen solchen Zeileneinheitsvektor der Ordnung n, dessen j-tes Element gleich 1 und alle übrigen gleich 0 sind, so kann angeschrieben werden:

$$G_j(r) = \mathbf{e}_j^* \mathbf{g}(r), \qquad j = 1, 2, \ldots, n .$$

Somit muß infolge der Bedingung (1.8) gelten:

$$\mathbf{e}_j^* \mathbf{g}\big(R(\varphi_j)\big) = \ln R(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Mit den folgenden Bezeichnungen:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \; R(\varphi_1)^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}} \\ \mathbf{e}_2^* \; R(\varphi_2)^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^* \; R(\varphi_n)^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \ln R(\varphi_1) \\ \ln R(\varphi_2) \\ \vdots \\ \ln R(\varphi_n) \end{bmatrix}$$

kann statt (2.9) geschrieben werden:

$$\mathbf{X}\,\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \tag{2.10}$$

und schließlich

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{f} . \tag{2.11}$$

Somit ergibt sich

$$\mathbf{g} = r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{f} . \tag{2.12}$$

Zur numerischen Auswertung des in (2.12) gegebenen Endergebnisses soll in Betracht gezogen werden, daß auf Grund der Beziehung (2.5) gilt:

$$r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}} = \mathbf{W}_n \left\langle 1, r^{\frac{2}{\delta}\sin\frac{\pi}{n}}, r^{\frac{2}{\delta}\sin\frac{2\pi}{n}}, \ldots, r^{\frac{2}{\delta}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} \right\rangle \overline{\mathbf{W}}_n^* . \tag{2.13}$$

3. §. Die näherungsweise Bestimmung der der Greenschen Funktion zugeordneten, konjugierten harmonischen Funktion

Die Funktionen (1.1) und (1.3) sind miteinander durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen verknüpft. Diese Gleichungen lauten in Polarkoordinaten wie folgt:

$$\frac{\partial h}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = r\frac{\partial g}{\partial r} .$$

Somit gilt

$$dh = -\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}dr + r\frac{\partial g}{\partial r}d\varphi ,$$

d. h.

$$h(r,\varphi) = \int \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}dr + r\frac{\partial g}{\partial r}d\varphi\right) . \tag{3.2}$$

Da $\varphi + c$, die konjugierte harmonische Funktion der Funktion $\ln r$ ist, wobei c eine beliebige Konstante bedeutet, und ferner zu der Funktion

$$G(r,\varphi) = g(r,\varphi) + \ln r$$

die konjugierte Funktion

$$H(r,\varphi) = h(r,\varphi) + \varphi + c \tag{3.3}$$

gehört, genügt es, sich nur mit der näherungsweisen Bestimmung der Funktion (3.3) zu beschäftigen.

Es sei angenommen, daß

$$H_j = H_j(r) = H(r,\varphi_j)$$

und

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix},$$

dann kann infolge der Beziehung (3.2) — mit guter Näherung — geschrieben werden:

$$H_j = -\frac{1}{2\delta}\int \frac{1}{r}(G_{j+1} - G_{j-1})\,dr\,. \tag{3.4}$$

Wenn wir noch die zyklische Matrix

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_n(0, 1, 0, \ldots, 0, 0, -1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . \ldots & . & . & . \\ . & . & . \ldots & . & . & . \\ . & . & . \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

einführen, dann läßt sich schreiben:

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{2\delta}\int \frac{1}{r}\,\mathbf{D}_n\,\mathbf{g}\,dr\,. \tag{3.5}$$

Auf Grund des Ergebnisses (2.12) lautet diese Beziehung wie folgt:

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{2\delta}\int \frac{1}{r}\,\mathbf{D}_n\, r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}}\,\mathbf{X}^{-1}\mathbf{f}\,dr =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2\delta}\,\mathbf{D}_n\int r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}}\,dr\right\}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{f}. \tag{3.6}$$

Zur numerischen Auswertung dieser Beziehung soll in Betracht gezogen werden, daß der k-te Eigenwert der zyklischen Matrix $\mathbf{D}_n$

$$\omega_k - \omega_k^{n-1} = 2i\sin\frac{k\,2\pi}{n}\,,\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

ist, und somit auf Grund der Beziehungen (2.5) und (3.6) geschrieben werden kann:

$$-\frac{1}{2\delta}\,\mathbf{D}_n\int \frac{1}{r}\, r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}}\,dr =$$

$$= \frac{1}{i} \mathbf{W}_n \left\langle 0,\ \cos\frac{\pi}{n} \cdot r^{\frac{2}{\delta}\sin\frac{\pi}{n}},\ \cos\frac{2\pi}{n} \cdot r^{\frac{2}{\delta}\sin\frac{2\pi}{n}}, \ldots, \right.$$

$$\left. \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \cdot r^{\frac{2}{\delta}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} \right\rangle \overline{\mathbf{W}}_n^* . \tag{3.7}$$

4. §. Die näherungsweise Bestimmung der zur kreisnahen Figur gehörenden Abbildungsfunktion

Auf Grund der Beziehungen (1.5), (1.6) und (2.3) kann die das von der Kurve L umgeschlossene Gebiet umkehrbar, eindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises abbildende Funktion folgendermaßen dargestellt werden:

$$w = w(z) = w(r, \varphi) = re^{i(\varphi + c)} \cdot e^{-G(r,\varphi) - iH(r,\varphi)} . \tag{4.1}$$

Führen wir noch folgende Bezeichnung ein:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

wobei

$$w_j = w_j(r) = w(r, \varphi_j)$$

bedeutet, somit läßt sich dieser Vektor auf Grund der näherungsweisen Beziehungen (2.12) und (3.6) folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}(r) \cdot \exp\left(- r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}} + \frac{i}{2\delta} \mathbf{D}_n \int \frac{1}{r} r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}} dr \right) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{f}, \tag{4.2}$$

dabei gelten

$$\mathbf{A}(r) = r \langle e^{i(\varphi_0 + c)}, e^{i(\varphi_1 + c)}, \ldots, e^{i(\varphi_{n-1} + c)} \rangle \tag{4.3}$$

und

$$\exp\left(- r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}} + \frac{i}{2\delta} \mathbf{D}_n \int \frac{1}{r} r^{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathbf{K}_n}} dr \right) =$$

$$= \mathbf{W}_n \left\langle e^{-1}, \exp\left(-2\cos^2\frac{2\pi}{n} \cdot r^{\frac{2}{\delta}\sin\frac{\pi}{n}} \right),\ \exp\left(-2\cos^2\frac{4\pi}{n} \cdot r^{\frac{2}{\delta}\sin\frac{2\pi}{n}} \right), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \exp\left(-2\cos^2\frac{2(n-1)\pi}{n} \cdot r^{\frac{2}{\delta}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} \right) \right\rangle \overline{\mathbf{W}}_n^* . \tag{4.4}$$

Der praktische Vorteil unseres näherungsweisen Endergebnisses (4.2) besteht darin, daß sich die zu verschiedenen Randkurven L gehörigen Abbildungsfunktionen — vorausgesetzt, daß die zur Einteilung der Gebiete benützten Halbstrahlen dieselbe bleiben — nur im letzten Faktor $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{f}$ von einander unterscheiden, und die Matrizenfunktionen (4.3) und (4.4) identisch bleiben.

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird auf Grund der sogenannten Linienmethode die näherungsweise Bestimmung der Greenschen Funktion, ihrer konjugierten, harmonischen Funktion und somit jene der ein kreisnahes Gebiet umkehrbar, eindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises abbildenden Funktion in expliziter Form dargestellt.

Literatur

1. Lojcjanszkij, L. G.: Folyadékok és gázok mechanikája. Akadémiai Kiadó, Budapest 1956.
2. Courant, R.: Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. Interscience Publishers, New-York (1950).
3. Kantorovics, L. V.—Krilov, V. I.: A felsőbb analízis közelítő módszerei. Akadémiai Kiadó, Budapest (1953).
4. Слободянский, М. Т.: Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Акад. Наук СССР. Прикл. Мат. Мех. 3, 75—82 (1939)
5. Фаддеева, В. Н.: Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Труды Мат. Инст. Стеклова 28, 73—105 (1949)
6. Bajcsay, P.: Ideális folyadék potenciálos síkáramlási feladatainak vizsgálata a matrixszámítás alkalmazásával. Dissertation, Budapest (1960).
7. Zurmühl, R.: Matrizen. Springer-V. Berlin—Göttingen–Heidelberg 1964.

Dr. Pál Bajcsay, Budapest, XI., Műegyetem rkp. 3. Ungarn