ANWENDUNG DER MATRIZENRECHNUNG ZUR NÄHERUNGSWEISEN LÖSUNG EINES STRÖMUNGSMECHANISCHEN PROBLEMS

Von

P. BAJCSAY

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität Budapest
(Eingegangen am 12. Dezember, 1968)
Vorgelegt von Prof. Dr. M. FARKAS

1. §. Die Aufstellung des Problems

Es soll die ebene Potentialströmung einer quellen- und wirbelfreien idealen Flüssigkeit untersucht werden.

Die in Abb. 1 angegebenen Randkurven L_1 und L_2 sind Stromlinien; die Kurven L_3 und L_4 sind äquipotentiale Linien.

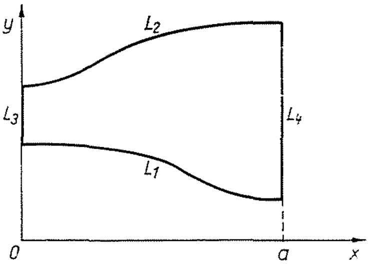

Abb. 1

Ferner sei angenommen, daß

1. das Strömungsbild im Intervall $-a \leqq x \leqq 0$ das Spiegelbild desjenigen vom Intervall $0 \leqq x \leqq a$ ist;

2. das Strömungsbild außerhalb des Intervalls $-a \leqq x \leqq a$ in Richtung der x — Achse periodisch ist, mit der Periode $2a$;

3. L_1 durch die eindeutige und stetig differenzierbare Funktion $y = f_1(x)$ angegeben ist; ferner $f_1'(0) = f_1'(a) = 0$ gilt;

4. L_2 durch die eindeutige und stetig differenzierbare Funktion $y = f_2(x)$ angegeben ist; und $f_2'(0) = f_2'(a) = 0$ gilt;

5. $f_1(x) < f_2(x)$ gilt für alle x — Werte.

Wir bezeichnen mit $u(x, y)$ das unbekannte Geschwindigkeitspotential und mit $v(x, y)$ die unbekannte Stromfunktion. Diese beiden Funktionen befriedigen jede für sich die Laplacesche Differentialgleichung, also sind beide harmonische Funktionen, ferner sind sie miteinander durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen verknüpft, sie sind also konjugierte, harmonische Funktionen.

Die Randbedingungen lauten:

a) Ist $u(x, y)$ die gesuchte Funktion, dann gilt längs der Kurve L_1:

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = 0\,,$$

grad u ist also parallel zur Tangente der Kurve, das heißt:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(x, f_1(x)\right) = f_1'(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\left(x, f_1(x)\right);$$

längs der Kurve L_2 gilt ähnlicherweise:

$$\frac{\partial u}{\partial n_2} = 0\,,$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(x, f_2(x)\right) = fx_2'(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\left(x, f_2(x)\right);$$

längs der Geraden L_3 gilt:

$$u(0, y) = \alpha_1,$$

wo α_1 eine gegebene Konstante bedeutet; schließlich gilt längs der Geraden L_4:

$$u(a, y) = \alpha_2,$$

wo α_2 auch eine gegebene Konstante ist.

b) Ist jedoch $v(x, y)$ die gesuchte Funktion, dann gelten:

$$v(x, f_1(x)) = \beta_1, \qquad \text{längs der Kurve } L_1,$$

$$v(x, f_2(x)) = \beta_2, \qquad \text{längs der Kurve } L_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial n_3} = \frac{\partial v}{\partial x}(0, y) = 0, \qquad \text{längs der Kurve } L_3,$$

$$\frac{\partial v}{\partial n_4} = \frac{\partial v}{\partial x}(a, y) = 0\,, \qquad \text{längs der Kurve } L_4,$$

β_1 und β_2 sind gegebene Konstanten.

Im folgenden wird mit Hilfe der Matrizenrechnung eine Näherungsmethode zur Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials und der Stromfunktion abgeleitet. Unsere Methode gründet sich auf die sogenannte Linienmethode, die für partielle Differentialgleichungen von elliptischem Typ zum erstenmal von SLOBODIANSKI angewandt wurde (siehe [1] und noch [2, 3]).

2. §. Die Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials

Zur näherungsweisen Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials $u(x, y)$ läßt sich folgende Methode empfehlen.

Teilen wir das abgeschlossene Intervall $0 \leqq x \leqq a$, durch die Annahme der Zwischenwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in $n+1$ gleiche Teile ein:

$$x_i - x_{i-1} = h = \frac{a}{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

$$(x_0 = 0\,, \quad x_{n+1} = a)\,.$$

Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$u_i = u_i(y) = u(x_i, y)\,,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n+1\,.$$

$$u_i' = \frac{du_i}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, \; y)\,,$$

In der zu lösenden Laplaceschen Differentialgleichung wird die folgende Näherung eingeführt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y) = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + 0(h^2)\,.$$

Somit kann die partielle Differentialgleichung — mit guter Näherung — durch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 u_i}{dy^2} = \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

ersetzt werden. Hierbei sind $u_0 = \alpha_1$, $u_{n+1} = \alpha_2$ gegebene Konstanten. Nach Einführung der Bezeichnungen:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g} = -\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E}_n = \langle 1, 1, 1, \ldots, 1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

statt (2.1) kann geschrieben werden:

$$\frac{d}{dy}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{u}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}_n\\ \frac{1}{h^2}\mathbf{C}_n & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{u}'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}; \tag{2.2}$$

oder mit den folgenden Hypermatrizen

$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{u}'\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}_n\\ \frac{1}{h^2}\mathbf{C}_n & \mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \mathbf{f}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}$$

(2.2) lautet

$$\frac{d}{dy}\mathbf{z}=\mathbf{A}\mathbf{z}+\mathbf{f}\,. \tag{2.3}$$

(2.3) ist eine inhomogene lineare Matrixdifferentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die schon die bei den Randkurven L_3 und L_4 vorgeschriebenen Randbedingungen in dem Störungsglied f enthält. Die Lösung dieser Gleichung ist (siehe z. B. [4] I. S. 110—111):

$$\mathbf{z}=\mathbf{z}(y)=e^{\mathbf{A}y}\,\mathbf{z}(0)+\int_0^y e^{\mathbf{A}(y-\eta)}\,\mathbf{f}\,d\eta=e^{\mathbf{A}y}\,\mathbf{z}(0)+\mathbf{A}^{-1}\,(e^{\mathbf{A}y}-\mathbf{E}_{2n})\,\mathbf{f}\,, \tag{2.4}$$

wobei der Spaltenvektor z(0) zuerst unbestimmt ist. z(0) soll so bestimmt werden, daß die Lösung (2.4) der Differentialgleichung (2.3) auch die bei den Randkurven L_1 und L_2 vorgeschriebenen Randbedingungen erfülle.

Auf Grund der Beziehung

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+0(h^2)$$

können die erwähnten Randbedingungen durch folgende Näherungen ersetzt werden:

$$u_i'\,(f_j(x_i))=\frac{f_j'\,(x_i)}{2h}\,\left[u_{i+1}(f_j\,(x_{i+1})\right]-u_{i-1}\left(f_j\,(x_{i-1})\right)\right]; \tag{2.5}$$

$$j=1,\;2,;$$

wobei $i=1.2,\;\ldots,\;n;\;u_0=\alpha_1,\;u_{n+1}=\alpha_2$.

Es sei $\mathbf{e}_i^*$ ein Zeileneinheitsvektor der Ordnung $2n$, dessen i-tes Element den Wert 1 und alle übrigen den Wert 0 haben. Somit kann angeschrieben werden:

$$u_i\,(y)=\mathbf{e}_i^*\,\mathbf{z}(y)=\mathbf{e}_i^*\,e^{\mathbf{A}y}\,\mathbf{z}(0)+\mathbf{e}_i^*\,\mathbf{A}^{-1}\,(e^{\mathbf{A}y}-\mathbf{E}_{2n})\,\mathbf{f}\,; \tag{2.6}$$

$$u_i'(y) = \mathbf{e}_{n+i}^* \mathbf{z}(y) = \mathbf{e}_i^* \mathbf{A} e^{\mathbf{A}y} \mathbf{z}(0) + \mathbf{e}_i^* e^{\mathbf{A}y} \mathbf{f}\,;$$

wobei $i = 1,2, \ldots, n$.

Nach Einführung der Bezeichnungen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{bmatrix},$$

wobei:

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \mathbf{A} e^{\mathbf{A} f_j(x_1)} - \dfrac{f_j'(x_1)}{2h} \mathbf{e}_2^* e^{\mathbf{A} f_j(x_2)} \\ \mathbf{e}_2^* \mathbf{A} e^{\mathbf{A} f_j(x_2)} - \dfrac{f_j'(x_2)}{2h} \left(\mathbf{e}_3^* e^{\mathbf{A} f_j(x_3)} - \mathbf{e}_1^* e^{\mathbf{A} f_j(x_1)}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1}^* \mathbf{A} e^{\mathbf{A} f_j(x_{n-1})} - \dfrac{f_j'(x_{n-1})}{2h} \left(\mathbf{e}_n^* e^{\mathbf{A} f_j(x_n)} - \mathbf{e}_{n-2}^* e^{\mathbf{A} f_j(x_{n-2})}\right) \\ \mathbf{e}_n^* \mathbf{A} e^{\mathbf{A} f_j(x_n)} + \dfrac{f_j'(x_n)}{2h} \mathbf{e}_{n-1}^* e^{\mathbf{A} f_j(x_{n-1})} \end{bmatrix}$$

$$j = 1, 2$$

und

$$\mathbf{k}_j = \begin{bmatrix} \left\{\dfrac{f_j'(x_1)}{2h} \mathbf{e}_2^* \mathbf{A}^{-1} \left(e^{\mathbf{A} f_j(x_2)} - \mathbf{E}_{2n}\right) - \mathbf{e}_1^* e^{\mathbf{A} f_j(x_1)}\right\} \mathbf{f} - \dfrac{f_j'(x_1)}{2h} \alpha_1 \\ \left\{\dfrac{f_j'(x_2)}{2h} \left[\mathbf{e}_3^* \mathbf{A}^{-1} \left(e^{\mathbf{A} f_j(x_3)} - \mathbf{E}_{2n}\right) - \mathbf{e}_1^* \mathbf{A}^{-1} \left(e^{\mathbf{A} f_j(x_1)} - \mathbf{E}_{2n}\right)\right] - \mathbf{e}_2^* e^{\mathbf{A} f_j(x_2)}\right\} \mathbf{f} \\ \vdots \\ \left\{\dfrac{f_j'(x_{n-1})}{2h} \left[\mathbf{e}_n^* \mathbf{A}^{-1} \left(e^{\mathbf{A} f_j(x_n)} - \mathbf{E}_{2n}\right) - e_{n-2}^* \mathbf{A}^{-1} \left(e^{\mathbf{A} f_j(x_{n-2})} - \mathbf{E}_{2n}\right)\right] - \right. \\ \left. - \mathbf{e}_{n-1}^* e^{\mathbf{A} f_j(x_{n-1})}\right\} \mathbf{f} \\ \dfrac{f_j'(x_n)}{2h} \alpha_2 - \left\{\dfrac{f_j'(x_n)}{2h} e_{n-1}^* \mathbf{A}^{-1} \left(e^{\mathbf{A} f_j(x_{n-1})} - \mathbf{E}_{2n}\right) + \mathbf{e}_n^* e^{\mathbf{A} f_j(x_n)}\right\} \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

$$j = 1,2,$$

kann das System der Gleichungen (2.5) in der Form

$$\mathbf{K}\mathbf{z}(0) = \mathbf{k} \tag{2.7}$$

geschrieben werden.

Daraus folgt aber

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{k} \tag{2.8}$$

und somit ergibt sich schließlich

$$\mathbf{z}(y) = e^{\mathbf{A}y}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{k} + \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}y} - \mathbf{E}_{2n})\mathbf{f}. \tag{2.9}$$

3. §. Die numerische Auswertung der angegebenen Näherung des Geschwindigkeitspotentials

Die numerische Ausrechnung der in (2.9) angegebenen Näherungslösung des aufgestellten Problems wird dadurch vereinfacht, daß die kanonische Form einer analytischen Funktion F(A) der Koeffizientenmatrix A explizit darstellbar ist. Im folgenden werden zwei verschiedene Möglichkeiten gezeigt.

a) Es soll in Betracht gezogen werden, daß die einzelnen Blöcke der Hypermatrix A vertauschbar sind. (Dazu siehe [5].) Ferner kann der links unten stehende Block $\frac{1}{h_2}\mathbf{C}_n$ der Matrix A durch eine Ähnlichkeitstransformation in Diagonalform gebracht werden [6], d. h.

$$\frac{1}{h^2}\mathbf{C}_n = \mathbf{W}_n \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle \mathbf{W}_n = \mathbf{W}_n \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{W}_n, \tag{3.1}$$

wobei

$$\gamma_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)},$$

$$\mathbf{W}_n = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n],$$

$$\mathbf{w}_k^* = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin\frac{k\pi}{n+1}, \sin\frac{2k\pi}{n+1}, \ldots, \sin\frac{nk\pi}{n+1}\right],$$

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{W}_n^* = \mathbf{W}_n^{-1}, \quad \mathbf{W}_n^2 = \mathbf{E}_n.$$

Somit gilt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{\Gamma}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_n \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{2n} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{\Gamma}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}_{2n}. \tag{3.2}$$

Führen wir noch die folgende Permutationshypermatrix ein

$$\mathbf{P}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1\mathbf{j}_1^* & \mathbf{i}_2\mathbf{j}_1^* & \cdots & \mathbf{i}_n\mathbf{j}_1^* \\ \mathbf{i}_1\mathbf{j}_2^* & \mathbf{i}_2\mathbf{j}_2^* & & \mathbf{i}_n\mathbf{j}_2^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{2n}\mathbf{P}_{2n}^* = \mathbf{E}_{2n},$$

wobei $\mathbf{i}_k$ eine Spalteneinheitsvektor der Ordnung n bedeutet, dessen k-tes Element den Wert 1 und alle anderen den Wert 0 haben und ferner $\mathbf{j}_1^* = [1, 0]$, $\mathbf{j}_2^* = [0, 1]$ gilt. Somit gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{\Gamma}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{2n} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_2 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_n & 0 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{P}_{2n}^* . \tag{3.3}$$

Werden noch die Beziehung

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\gamma_k}}{2} & -\frac{\sqrt{\gamma_k}}{2} \end{bmatrix} \langle \sqrt{\gamma_k}r - \sqrt{\gamma_k} \rangle \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_k}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_k & 0 \end{bmatrix}$$

herangezogen und die Transformationshypermatrizen

$$\mathbf{T}_{2n} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\gamma_1}}{2} & -\frac{\sqrt{\gamma_1}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\gamma_2}}{2} & -\frac{\sqrt{\gamma_2}}{2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{\gamma_n}}{2} & -\frac{\sqrt{\gamma_n}}{2} \end{bmatrix} \right\};$$

$$\mathbf{T}_{2n}^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{\gamma_2}} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{\gamma_n}} \end{bmatrix} \right\}$$

eingeführt, so gilt

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_2 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_n & 0 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \mathbf{T}_{2n} \langle \sqrt{\gamma_1}, -\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2}, -\sqrt{\gamma_2}, \ldots, \sqrt{\gamma_n}, -\sqrt{\gamma_n} \rangle \mathbf{T}_{2n}^{-1} = \mathbf{T}_{2n}\, \mathbf{\Delta}_{2n}\, \mathbf{T}_{2n}^{-1} . \tag{3.4}$$

Auf Grund der Beziehungen (3.2), (3.3) und (3.4) ist die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ folgendermaßen darstellbar

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{V}_{2n}\, \mathbf{P}_{2n}\, \mathbf{T}_{2n} \right\} \mathbf{\Delta}_{2n} \left\{ \mathbf{T}_{2n}^{-1}\, \mathbf{P}_{2n}^*\, \mathbf{V}_{2n} \right\}; \tag{3.5}$$

die kanonische Form der analytischen Funktion $F(\mathbf{A})$ lautet also

$$F(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{V}_{2n}\, \mathbf{P}_{2n}\, \mathbf{T}_{2n} \right\} F(\mathbf{\Delta}_{2n}) \left\{ \mathbf{T}_{2n}^{-1}\, \mathbf{P}_{2n}^*\, \mathbf{V}_{2n} \right\}, \tag{3.6}$$

wobei

$$F(\mathbf{\Delta}_{2n}) = \langle F(\sqrt{\gamma_1}),\; F(-\sqrt{\gamma_1}),\; F(\sqrt{\gamma_2}), F(-\sqrt{\gamma_2}) \ldots, F(\sqrt{\gamma_n}),\; F(-\sqrt{\gamma_n})\rangle.$$

Auf Grund der Formel (3.6) können die einzelnen Zeilen der Matrizen in der in (2.10) angegebenen Lösung folgendermaßen dargestellt werden:

$$\mathbf{e}_i^* e^{\mathbf{A}y} = \left[\mathbf{a}_{i1}^*(y), \mathbf{a}_{i2}^*(y)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.7}$$

wobei

$$\mathbf{a}_{i1}^*(y) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{2y}{h} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \cdot \sin \frac{ik\pi}{n+1} \cdot \mathbf{w}_k^*,$$

$$\mathbf{a}_{i2}^*(y) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{2y}{h} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}{\frac{2}{h} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}} \cdot \sin \frac{ik\pi}{n+1} \cdot \mathbf{w}_k^*;$$

$$\mathbf{e}_{n+1}^* e^{\mathbf{A}y} = \left[\mathbf{b}_{i1}^*(y),\; \mathbf{b}_{i2}^*(y)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.8}$$

ferner

$$\mathbf{b}_{i1}^*(y) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{h} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{2y}{h} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \sin \frac{ik\pi}{n+1} \cdot \mathbf{w}_k^*,$$

$$\mathbf{b}_{i2}^*(y) \equiv \mathbf{a}_{i2}^*(y);$$

$$\mathbf{e}_i^* \mathbf{A} e^{\mathbf{A}y} = \left[\mathbf{b}_{i1}^*(y),\; \mathbf{b}_{i2}^*(y)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{3.9}$$

$$\mathbf{e}_i^* e^{\mathbf{A}y} \mathbf{f} = -\frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{2y}{h} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}{2h \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}} \cdot$$

$$\cdot \sin \frac{ik\pi}{n+1} \cdot \left(\alpha_1 \sin \frac{k\pi}{n+1} + \alpha_2 \sin \frac{nk\pi}{n+1}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \tag{3.10}$$

$$\mathbf{e}_i^* \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}y} - \mathbf{E}_{2n}) \mathbf{f} = -\frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{2y}{h} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}{4\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}} \cdot$$

$$\cdot \sin \frac{ik\pi}{n+1} \cdot \left(\alpha_1 \sin \frac{k\pi}{n+1} + \alpha_2 \sin \frac{nk\pi}{n+1}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \tag{3.11}$$

$$\mathbf{e}_{n+i}^* \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}y} - \mathbf{E}_{2n})\mathbf{f} = -\frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2y}{h} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}{2\mathrm{h} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}} \cdot$$

$$\cdot \sin \frac{ik\pi}{n+1} \cdot \left(\alpha_1 \sin \frac{k\pi}{n+1} + \alpha_2 \sin \frac{nk\pi}{n+1}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.12}$$

(Hierbei wurden die Beziehungen

$$\mathbf{e}_{n+i}^* e^{\mathbf{A}y} = \frac{d}{dy} (\mathbf{e}_i^* e^{\mathbf{A}y}) = e_i^* \mathbf{A} e^{\mathbf{A}y},$$

$$\mathbf{e}_{n+i}^* \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}y} - \mathbf{E}_{2n})\,\mathbf{f} = \frac{d}{dy} \left\{\mathbf{e}_i^* \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}y} - \mathbf{E}_{2n})\,\mathbf{f}\right\} = \mathbf{e}_i^* e^{\mathbf{A}y} \mathbf{f}$$

in Betracht gezogen.)

b) Die den Gleichungen (2.1) entsprechenden homogenen Differentialgleichungen können in der folgenden Matrizenform zusammengefaßt werden:

$$\frac{d^2}{dy^2} \mathbf{u} - \frac{1}{h^2} \mathbf{C}_n \mathbf{u} = 0 \tag{3.13}$$

Die Lösung dieser Matrizendifferentialgleichung (siehe z. B. [4] I. S. 114) lautet:

$$\mathbf{u}(y) = \cos\left(\frac{\sqrt{-\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \mathbf{u}(0) + \left(\frac{\sqrt{-\mathbf{C}_n}}{h}\right)^{-1} \sin\left(\frac{\sqrt{-\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \mathbf{u}'(0) =$$

$$= \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \mathbf{u}(0) + \left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h}\right)^{-1} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \mathbf{u}'(0). \tag{3.14}$$

Die erste Ableitung dieser Lösung lautet:

$$\mathbf{u}'(y) = \frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \mathbf{u}(0) + \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \mathbf{u}'(0). \tag{3.15}$$

Auf Grund der Gleichungen (3.14) und (3.15) ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dy} \mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

folgendermaßen darstellbar:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}y}\, \mathbf{z}(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) & \left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h}\right)^{-1} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \\ \frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}\,(0) \\ \mathbf{u}'\,(0) \end{bmatrix},$$

d. h. es gilt

$$e^{\mathbf{A}y} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) & \left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h}\right)^{-1} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \\ \frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Wird noch die Beziehung

$$\mathbf{A} e^{\mathbf{A}y} = \frac{d}{dy} e^{\mathbf{A}y}$$

benutzt, ergibt sich aus (3.16) durch Ableitung

$$\mathbf{A} e^{\mathbf{A}y} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \\ \frac{\mathbf{C}_n}{h^2} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) & \frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Andererseits folgt aus (3.16) noch die Beziehung

$$e^{\mathbf{A}y}\, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h}\right)^{-1} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \mathbf{g} \\ \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \mathbf{g} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

und ferner

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & h^2\, \mathbf{C}_n^{-1} \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

somit gilt

$$\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}y} - \mathbf{E}_{2n}) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h}\right)^{-1} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) & h^2\, \mathbf{C}_n^{-1} \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) - \mathbf{E}_n \right\} \\ \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) - \mathbf{E}_n & \left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h}\right)^{-1} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h} y\right) \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

bzw.

$$\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}y}-\mathbf{E}_{2n})\,\mathbf{f}=\begin{bmatrix} h^2\,\mathbf{C}_n^{-1}\left\{\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h}y\right)-\mathbf{E}_n\right\}\mathbf{g} \\ \left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h}\right)^{-1}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{C}_n}}{h}y\right)\mathbf{g}\end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Wird schließlich noch die Ähnlichkeitsrelation

$$F\left(\frac{\mathbf{C}_n}{h^2}\right)=\mathbf{W}_n\,F(\mathbf{\Gamma}_n)\,\mathbf{W}_n$$

berücksichtigt (siehe Formel 3.1), dann erhält man auf Grund der Beziehungen (3.16—3.20) dieselben Ergebnisse, wie in (3.7—3.12).

4. §. Die Bestimmung der Stromfunktion

Zur näherungsweisen Bestimmung der Stromfunktion läßt sich die folgende Methode empfehlen.

Teilen wir das abgeschlossene Intervall $0 \leqq x \leqq a$, durch die Annahme der Zwischenwerte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$, in $n-1$ gleiche Teile ein:

$$x_i - x_{i-1} = h = \frac{a}{n-1}, \quad x_0 = 0, \quad x_{n-1} = a.$$

Die folgende Bezeichnungen werden eingeführt:

$$v_i = v_i(y) = v(x_i, y),$$
$$v_1' = \frac{dv_i}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}\, x_i,\, y).$$

In der zu lösenden Laplaceschen Differentialgleichung wird die Ableitung $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, y)$ durch die folgende Näherung ersetzt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, y) = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} + 0(h^2).$$

Somit kann die partielle Differentialgleichung mit guter Näherung durch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 v_i}{dy^2} = \frac{-v_{i-i} + 2v_i - v_{i+1}}{h^2}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.1}$$

ersetzt werden. Hierbei sollen die den "fiktiven" Stellen entsprechenden Funktionswerte v_{-1} und v_n durch die längs der Kurven L_3 und L_4 vorgeschriebenen Randbedingungen ermittelt werden. Diese Randbedingungen lauten:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y) = 0\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_{n-1}, y) = 0\,,$$

d. h. mit guter Näherung:

$$\frac{v_1 - v_{-1}}{2h} = \frac{v_n - v_{n-2}}{2h} = 0$$

und somit sind die zu den Abzissenwerten x_0, bzw. x_{n-1} gehörenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 v_0}{dy^2} = \frac{2v_0 - 2v_1}{h^2}\,, \tag{4.2}$$

bzw.

$$\frac{d^2 v_{n-1}}{dy^2} = \frac{-2v_{n-2} + 2v_{n-1}}{h^2}\,.$$

Werden also die folgenden Matrizen eingeführt:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} \end{bmatrix}; \mathbf{v}' = \begin{bmatrix} v_0' \\ v_1' \\ v_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1}' \end{bmatrix}; \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E}_n = \langle 1,\ 1,\ 1,\ \dots,\ 1 \rangle,$$

dann können die Differentialgleichungen (4.1—4.2) in der folgenden Matrixform geschrieben werden:

$$\frac{d^2 \mathbf{v}}{dy^2} = \frac{1}{h^2}\mathbf{B}_n \mathbf{v}\,, \tag{4.3}$$

oder

$$\frac{d}{dy}\mathbf{r} = \mathbf{Br}\,, \tag{4.4}$$

wobei

$$r = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}' \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \\ \frac{1}{h^2}\mathbf{B}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Hypermatrizen sind.

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (4.3) bzw. (4.4) lautet,

$$\mathbf{v}(y) = \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}y\right)\mathbf{v}(0) + \left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}\right)^{-1}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}y\right)\mathbf{v}'(0), \tag{4.5}$$

bzw.

$$\mathbf{r}(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(y) \\ \mathbf{v}'(y) \end{bmatrix} e^{\mathbf{B}y}\,\mathbf{r}(0) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}y\right) & \left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}\right)^{-1}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}y\right) \\ \frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}y\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}y\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}(0) \\ \mathbf{v}'(0) \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Hierbei sind die Funktionswerte $\mathbf{v}(0)$ und $\mathbf{v}'(0)$ bzw. $\mathbf{r}(0)$ noch unbekannte Spaltenvektoren. Die Elemente dieser unbekannten Spaltenvektoren sollen auf Grund der längs der Kurven L_1 und L_2 vorgeschriebenen Randbedingungen ermittelt werden.

Auf Grund dieser Bedingungen soll die folgende Beziehung erfüllt werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{v}(0) \\ \mathbf{v}'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

oder kürzer geschrieben:

$$\mathbf{H}\,\mathbf{r}(0) = \mathbf{c},$$

wobei

$$\mathbf{H}_{j1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}f_j(x_0)\right) \\ \mathbf{e}_2^* \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}f_j(x_1)\right) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^* \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}f_j(x_{n-1})\right) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2;$$

$$\mathbf{H}_{j2}=\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^*\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}\right)^{-1}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}f_j(x_0)\right) \\ \mathbf{e}_2^*\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}\right)^{-1}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}f_j(x_1)\right) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^*\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}\right)^{-1}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}f_j(x_{n-1})\right) \end{bmatrix},\quad j=1,2;$$

$$\mathbf{c}_j=\beta_j\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\quad j=1,2.$$

Aus der Gleichung (4.8) folgt:

$$\mathbf{r}(0)=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{c} \tag{4.9}$$

und schließlich erhält man auf Grund der Beziehungen (4.6) und (4.9) das folgende Endergebnis:

$$\mathbf{r}(y)=e^{\mathbf{B}y}\,\mathbf{H}^{-1}\mathbf{c} \tag{4.10}$$

bzw.

$$\mathbf{v}(y)=\left[\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}y\right),\quad\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}\right)^{-1}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{B}_n}}{h}y\right)\right]\mathbf{H}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1\\\mathbf{c}_2\end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

5. §. Die numerische Auswertung der angegebenen Näherung der Stromfunktion

Die numerische Ausrechnung der in (4.10) bzw. (4.11) angegebenen Näherungslösung des aufgestellten Problems wird dadurch vereinfacht, daß die kanonische Form einer analytischen Funktion $F(\mathbf{B}_n)$ der Koeffizientenmatrix $\mathbf{B}_n$ darstellbar ist.

Die rechtsseitigen Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{B}_n$ sollen mit

$$\mathbf{u}_j=\begin{bmatrix}u_{1j}\\u_{2j}\\\vdots\\u_{nj}\end{bmatrix},\quad j=1,2,\ldots,n;$$

und die linksseitigen Eigenvektoren mit

$$\mathbf{v}_j^* = [v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jn}], \ j = 1, 2, \ldots, n$$

bezeichnet werden.

$\lambda_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ soll den j-ten Eigenwert der Matrix $\mathbf{B}_n$ bedeuten.

Die rechts und linksseitigen Eigenvektoren sollen ein biorthogonales System bilden, d. h. es gelte:

$$\mathbf{v}_j^* \mathbf{u}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = j, \\ 0, & \text{wenn } k \neq j. \end{cases}$$

Die Koordinaten des j-ten rechtsseitigen Eigenvektors befriedigen das folgende System von homogenen linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(2 - \lambda_j) u_{1j} - 2u_{2j} = 0; \\ &- u_{k-1,j} + (2 - \lambda_j) u_{kj} - u_{k+1,j} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, n-1; \\ &- 2u_{n-1,j} + (2 - \lambda_j) u_{nj} = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Es soll der folgende Ansatz angewandt werden (siehe z. B. [7] S. 229—230):

$$u_{kj} = r_j^k.$$

Die k-te Gleichung lautet somit:

$$r_j^2 - (2 - \lambda_j) r_j + 1 = 0.$$

Nach Substitution von

$$2 - \lambda_j = 2 \cos \varphi_j$$

d. h. $\lambda_j = 2 - 2\cos \varphi_j = 4\sin^2 \dfrac{\varphi_j}{2}$ folgen

$$r_j^2 - 2\cos \varphi_j \cdot r_j + 1 = 0,$$

und

$$r_j = \cos \varphi_j \pm i \sin \varphi_j = e^{\pm i\varphi}; \quad i = \sqrt{-1},$$

bzw.

$$u_{kj} = A_j \cos k\varphi_j + B_j \sin k\varphi_j; \tag{5.2}$$

wobei A_j und B_j noch zu bestimmende Konstanten sind. Werden noch die erste und die n-te Gleichung des Systems (5.1) in Betracht gezogen, dann folgt

$$2 \cos \varphi_j (A_j \cos \varphi_j + B_j \sin \varphi_j) - 2 A_j \cos 2\varphi_j - 2 B_j \sin 2\varphi_j = 0,$$

d. h.

$$A_j \sin^2 \varphi_j - B_j \sin \varphi_j \cos \varphi_j = 0 ; \tag{5.3}$$

$$-2 A_j \cos(n-1)\varphi_j - 2 B_j \sin (n-1)\varphi_j + 2 \cos \varphi_j (A_j \cos n\varphi_j + B_j \sin n\varphi_j) = 0,$$

d. h.

$$-A_j \sin \varphi_j \sin n\varphi_j + B_j \sin \varphi_j \cos n\varphi_j = 0. \tag{5.4}$$

Die Gleichungen (5.3—5.4) haben nicht-triviale Lösungen, wenn

$$\sin \varphi_j = 0, \quad \text{oder} \quad \sin (n-1) \varphi_j = 0,$$

d. h. wenn z. B.

$$\varphi_j = \frac{(j-1)\pi}{n-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.5}$$

Somit sind die gesuchten Eigenwerte:

$$\lambda_j = 4\sin^2 \frac{(j-1)\pi}{2(n-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.6}$$

Doch gilt dann die Beziehung

$$A_j : B_j = \cos \varphi_j : \sin \varphi_j ,$$

woraus schließlich folgt:

$$u_{kj} = K_j \cos \frac{(k-1)(j-1)\pi}{n-1}; \quad k, j = 1, 2, \ldots, n . \tag{5.7}$$

Hierbei ist K_j noch eine unbestimmte Konstante. Ihr Wert wird später durch die Biorthogonalitätsbedingungen der Eigenvektoren bestimmt werden.

Die Koordinaten des j-ten linksseitigen Eigenvektors befriedigen das folgende System von homogenen linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&2\cos \varphi_j \cdot v_{j1} - v_{j2} = 0 ;\\
&-2v_{j1} + 2\cos \varphi_j \cdot v_{j2} - v_{j3} = 0;\\
&-v_{j,k-1} + 2\cos \varphi_j \cdot v_{jk} - v_{j,k+1} = 0 \qquad k = 3, 4, \ldots, n-2 ;\\
&-v_{j,n-1} + 2\cos \varphi_j \cdot v_{j,n-1} - 2v_{jn} = 0 ;\\
&-v_{j,n-1} + 2\cos \varphi_j \cdot v_{jn} = 0.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Nach einer Reduktion lautet dieses System wie folgt

$$\begin{aligned}&\cos 2\varphi_j \cdot v_{j2} - \cos\varphi_j \cdot v_{j3} = 0\,,\\ &- v_{j,k-1} + 2\cos\varphi_j \cdot v_{jk} - v_{j,k+1} = 0, \quad k = 3, 4, \ldots, n-2\,;\\ &-\cos\varphi_j \cdot v_{j,n-2} + \cos 2\varphi_j \cdot v_{j,n-1} = 0\,.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Aus der k-ten Gleichung folgt (ähnlich wie in 5.2):

$$v_{jk} = C_j \cos k\varphi_j + D_j \sin k\varphi_j\,, \tag{5.10}$$

wobei C_j und D_j noch zu bestimmende Konstanten sind. Werden noch die erste und die letzte Gleichung des Systems (5.9) in Betracht gezogen, dann folgen

$$\cos 2\varphi_j (C_j \cos 2\varphi_j + D_j \sin 2\varphi_j) - \cos\varphi_j (C_j \cos 3\varphi_j + D_j \sin 3\varphi_j) = 0\,,$$

d. h.

$$C_j \sin^2\varphi_j - D_j \sin\varphi_j \cos\varphi_j = 0\,; \tag{5.11}$$

bzw.

$$\begin{aligned}&-\cos\varphi_j (C_j \cos (n-1)\varphi_j + D_j \sin (n-1)\varphi_j) +\\ &+ \cos 2\varphi_j (C_j \cos (n-1)\varphi_j + D_j \sin (n-1)\varphi_j) = 0\,,\end{aligned}$$

d. h.

$$-C_j \sin\varphi_j \sin n\varphi_j + D_j \sin\varphi_j \cos n\varphi_j = 0\,. \tag{5.12}$$

Aus (5.11—5.12) folgt aber die Beziehung:

$$C_j : D_j = \cos\varphi_j : \sin\varphi_j,$$

damit ergibt sich schließlich

$$v_{jk} = L_j \cos \frac{(k-1)(j-1)\pi}{n-1}\,, \tag{5.13}$$

$$k = 2, 3, \ldots, n-1;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Werden noch die erste und die letzte Gleichung des Systems (5.8) in Betracht gezogen, dann folgt:

$$v_{j1} = \frac{v_{j2}}{2\cos\varphi_j} = \frac{L_j}{2}\,, \tag{5.14}$$

bzw.

$$v_{jn} = \frac{v_{j,n-1}}{2\cos\varphi_j} = \frac{L_j}{2} \cos \frac{(n-1)(j-1)\pi}{n-1}\,. \tag{5.15}$$

Die Beziehungen (5.13—5.15) können in folgender Form zusammengefaßt werden:

$$v_{jk} = L_j \frac{\cos \dfrac{(k-1)(j-1)\pi}{n-1}}{1+\delta_{1k}+\delta_{nk}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.16}$$

wobei die Konstante L_j noch unbestimmt bleibt. Aus den Biorthogonalitätsbedingungen der Eigenvektoren folgt aber die Beziehung:

$$\mathbf{v}_j^* \mathbf{u}_i = L_j K_i \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos \dfrac{(k-1)(j-1)\pi}{n-1} \cdot \cos \dfrac{(k-1)(i-1)\pi}{n-1}}{1+\delta_{1k}+\delta_{nk}} =$$

$$= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j, \end{cases} \tag{5.17}$$

Nehmen wir zuerst an, daß $i = j \neq 1$ oder n. Dann gilt aber

$$\mathbf{v}_j^* \mathbf{u}_j = L_j K_j \frac{n-1}{2} = 1,$$

d. h.

$$L_j K_j = \frac{2}{n-1}, \quad \text{wenn} \quad j = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{5.18}$$

Wenn aber $i = j = 1$ oder n ist, dann gelten

$$\mathbf{v}_1^* \mathbf{u}_1 = L_1 K_1 (n-1) = 1,$$

bzw.

$$\mathbf{v}_n^* \mathbf{u}_n = L_n K_n (n-1) = 1,$$

d. h.

$$L_1 K_1 = L_n K_n = \frac{1}{n-1}. \tag{5.19}$$

Die Ergebnisse (5.18—5.19) zusammengefaßt, gelten:

$$K_j = L_j = \sqrt{\frac{2}{(n-1)(1+\delta_{1j}+\delta_{nj})}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.20}$$

Es ist leicht einzusehen, daß

$$\mathbf{v}_j^{\bullet}\mathbf{u}_i = 0 \text{ ist, wenn } i \neq j$$

gilt, also sind die Koordinaten der Eigenvektoren:

$$u_{kj} = v_{jk} = \sqrt{\frac{2}{(n-1)(1+\delta_{1j}+\delta_{nj})}} \cos\frac{(k-1)(j-1)\pi}{n-1}, \tag{5.21}$$

$$j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wenn noch die Bezeichnung

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

eingeführt wird, wobei selbstverständlich

$$\mathbf{UU} = \mathrm{E}_n$$

ist, dann kann die analytische Funktion $\mathrm{F}(\mathbf{B}_n)$ der Matrix $\mathbf{B}_n$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$F(\mathbf{B}_n) = \mathbf{U}\langle F(\lambda_1), \; F(\lambda_2), \; \ldots, \; F(\lambda_n)\rangle \mathbf{U}. \tag{5.22}$$

Somit lassen sich auf Grund der Beziehung (5.22) die Elemente der Matrizen, die in den Endergebnissen (4.10—4.11) vorkommen, leicht darstellen.

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird auf Grund der sogenannten Linienmethode die näherungsweise Lösung eines strömungsmechanischen Problems in expliziter Form dargestellt. Das zu lösende Problem besteht darin, entweder das Geschwindigkeitspotential oder die Stromfunktion für eine ebene Potentialströmung einer quellen- und wirbelfreien idealen Flüssigkeit zu bestimmen. Das Bereich in dem die gesuchte Funktionen die Laplaceschen Differentialgleichung befriedigen, ist durch zwei parallelle Geraden und zwei allgemeine jedoch ziemlich schlichte Kurven umgeschlossen, für die verschiedene Randbedingungen vorgeschrieben sind. Die in expliziter Form dargestellten Näherungslösungen können in der angegebenen Weise leicht bestimmt werden.

Literatur

1. Слободянский, М. Т.: Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Акад. Наук СССР. Прикл. Мат. Мех. **3**, 75—83 (1939).

2. Фаддеева, В. Н.: Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Труды Мат. Инст. Стеклова **28**, 73—105 (1949)
3. BAJCSAY, P.: Ideális folyadék potenciálos síkáramlási feladatainak vizsgálata a matrixszámítás alkalmazásával. Dissertation, Budapest 1960.
4. GANTMACHER, F. R.: Matrizenrechnung. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin I. 1958; II. 1959.
5. EGERVÁRY, E.: On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. Acta Scientiarum Math., Szeged **XV**, 211—222 (1954)
6. RUTHERFORD, D. E.: Some continuant determinants arising in physics and chemistry, Proc. Royal Soc. Edinburgh **62**, 229—236 (1947); **63**, 232—241 (1952).
7. ZURMÜHL, R.: Matrizen. Springer-V. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1964.

Dr. Pál BAJCSAY, Budapest XI., Műegyetem rkp. 3. Ungarn.