

BESTIMMUNG DER VERFORMUNGSZUSTÄNDE VON GUMMIELASTISCHEN WERKSTOFFEN BEI GROSSEN FORMÄNDERUNGEN

Von

T. FEKETE

Lehrstuhl für Mechanik und Maschinenteile, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 1. April 1969)

Vorgelegt von Prof. Dr. P. MICHELBERGER

1. Allgemeines

Seit der Entdeckung des natürlichen Gummis werden durch die chemische Industrie zahlreiche dem Gummi ähnlichen Kunststoffe hergestellt, welche trotz ihrer verschiedenen chemischen Bestandteile in ihren mechanischen Eigenschaften viele Ähnlichkeiten aufweisen. Ihr wichtigstes gemeinsames Verhalten besteht in der großen, elastischen, reversiblen Formänderung schon infolge relativ geringer Spannungen, für deren Größe charakteristisch ist, daß die oberen Grenzen für die Dehnungskapazität 500—1000% erreichen können.

Die strukturellen Bedingungen für diese hochelastischen Zustände sind von TRELOAR [1] im folgenden zusammengefaßt:

1. Das Material besteht aus fadenartigen Langkettenmolekülen, die freiwendungsfähige Kettenglieder enthalten.

2. Zwischen den Molekülen treten nur schwache Sekundärkräfte auf.

3. Die Moleküle bilden ein räumliches Netz mit wenigen Knotenpunkten auf ihrer Länge.

Von den Stoffarten mit den erwähnten Eigenschaften ist der schwach vulkanisierte Kautschuk, der sogenannte Gummi, am bekanntesten. Dadurch ist es zu erklären, daß in der Praxis oft auch andere gummiartige Materialien einfach als Gummi bezeichnet werden, und so bildete sich für die Charakterisierung des hochelastischen Zustandes der Ausdruck "Gummielastizität".

Gummiartige Werkstoffe werden heute zur Herstellung von Konstruktionselementen verwendet, bei denen neben der großen Formänderungsfähigkeit auch die Belastbarkeit eine wichtige Rolle spielt. (Z. B. Gummifedern; elastische Brückenlager aus Kunststoffen.) Die an Gummi, als lasttragendes Element gestellten erhöhten Anforderungen stehen aber leider nicht in Übereinstimmung mit den heute verwendeten Bemessungsmethoden, die praktisch den Vergleich der Durchschnittsspannungen auf gewissen typischen Schnittflächen mit einem zulässigen Werte bedeuten. Diese Berechnungen enthalten nicht die Bestimmung der tatsächlichen Spannungsverteilung bzw. die Bestim-

mung der von dem Durchschnitt am meisten abweichenden Spitzenspannungen, so kann man auf Grund der erhaltenen Ergebnisse über die tatsächlichen Sicherheit der Tragfähigkeit keine Folgerungen ziehen.

Diese primitive Weise der Spannungsanalyse dürfte wohl darum zustande gekommen sein, weil die hochentwickelten Elastizitätstheorien grundsätzlich kleine Bewegungen erfassen und für die Untersuchung von gummiartigen Kunststoffen infolge der überaus starken Verformungen letzterer von vornherein ungeeignet waren. Deshalb begnügte man sich in der Entwurfspraxis, mangels einer entsprechenden wohlbekannten und einfach anwendbaren Theorie, mit den leicht berechenbaren Durchschnittsspannungen, die ausschließlich für annähernde Vergleichen geeignet waren.

Es besteht übrigens kein Hindernis dafür, die in den gummiartigen Werkstoffen auftretende tatsächliche Spannungsverteilung theoretisch zu bestimmen, wenn man bedenkt, daß in den letzten Jahrzehnten zahlreiche Theorien entstanden sind, welche das hochelastische Verhalten von Gummi in mathematischen Formeln zusammenfaßten und Zusammenhänge zwischen den Verschiebungen der einzelnen Punkte und den Spannungs- bzw. Verformungszuständen feststellten, z. B. TRELOAR [1], RIVLIN [2]. Zahlreiche Bücher und Abhandlungen beschäftigen sich auch mit der Definition, den Berechnungsmethoden und der Darstellung des Verformungszustandes, von denen die wichtigsten die von KAPPUS [3] und PONOMARJOV [4] sind.

Ein wesentlicher Nachteil der erwehnten Theorien besteht hauptsächlich darin, daß ihre Anwendung ernste mathematische Kenntnisse voraussetzt und die angeführten Differentialgleichungen, abgesehen von einigen besonders einfachen Fällen, unauflösbar sind. Die größte Schwierigkeit besteht darin, daß sich die Gestalt des zu untersuchenden Körpers infolge der wirkenden Kräfte stark verändert und die Gleichgewichtsbedingungen für diese veränderte, unbekannte Gestalt aufgestellt werden müßten, im Gegensatz zu den klassischen Elastizitätsaufgaben, wo die Gestalt des Körpers nach und vor der Belastung praktisch als gleich anzusehen ist. Die Bestimmung der Spannungsverteilung eines hochelastischen Materials führt im allgemeinen nur in einfachen Fällen zu rein theoretisch auflösbaren Aufgaben, wo man die Verschiebungen oder Deformationen in jedem Punkt des Körpers nach logischer Erwägung im voraus annimmt.

Für eine praktische Anwendung der Theorien über hochelastische Verformungen kann jedes Verfahren, das auch bei komplizierter Gestalt und vielseitiger Beanspruchung eine hinreichend genaue Bestimmung des Verformungszustandes ermöglicht, eine große Hilfe leisten. Deshalb sollen im weiteren Verfahren veröffentlicht werden, wo die Verformungsangaben durch Messungen ermittelt werden können.

2. Analyse des Verformungszustandes

Zur Beschreibung der Formänderungen eines beliebigen Körpers wird ein raumfestes rechtwinkliges Koordinatensystem benutzt, in dem die Lage eines Punktes P im Körper vor der Deformation durch den Vektor $\mathbf{r}(x, y, z)$ angegeben ist. Nach der Verformung gelangt der Punkt in die durch den Vektor $\mathbf{r}'(x', y', z')$ angezeigte Lage (Abb. 1).

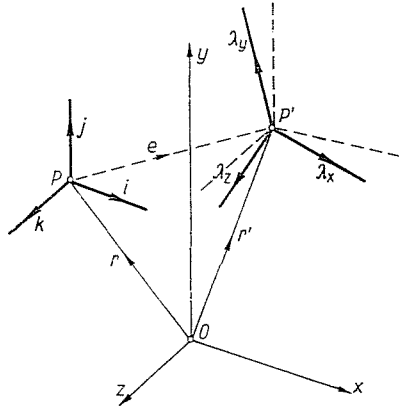


Abb. 1. Zur Definition der Gittervektoren λ_x , λ_y und λ_z

Der Vektor der Verschiebung ergibt sich also zu

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = iu + jv + kw \quad (1)$$

wo durch \mathbf{i} , \mathbf{j} und \mathbf{k} die Einheitsvektoren in Richtungen x , y und z bezeichnet werden; u , v und w sind rechtwinklige Komponenten der Verschiebung.

Der Zuwachs der Ortsvektoren kann, wie folgt, angegeben werden:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{r} &= i dx + j dy + k dz \\ d\mathbf{r}' &= \lambda_x dx + \lambda_y dy + \lambda_z dz \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wo λ_x , λ_y und λ_z sog. Gittervektoren sind, die in die veränderten Richtungen der zu den Achsen x , y und z parallelen Geraden fallen und deren absolute Größen ein Dehnungsverhältnis in diesen Richtungen ausdrücken. Die Gittervektoren können auch durch die partialen Verschiebungsableitungen ausgedrückt werden:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x &= \mathbf{i} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \lambda_y &= \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{j} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mathbf{k} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \lambda_z &= \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial z} + \mathbf{j} \frac{\partial v}{\partial z} + \mathbf{k} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Mit Hilfe der Gittervektoren läßt sich auf einfache Weise auch der Vektor λ_ξ ausdrücken, der für die veränderte Lage der durch den Punkt P gehenden Geraden ξ und für die Größe der auf der Länge auftretende Dehnung charakteristisch ist. Werden für die Richtungskosinus die Bezeichnungen l_ξ , m_ξ und n_ξ eingeführt, so erhalten wir:

$$\lambda_\xi = \lambda_x l_\xi + \lambda_y m_\xi + \lambda_z n_\xi \quad (4)$$

Mit Hilfe der Transformationsgleichung (4) ergeben sich für die auf einer Geraden beliebiger Richtung ξ auftretende Verzerrungsgröße die Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} |\lambda_\xi| = \frac{ds'}{ds} &= [\lambda_x^2 l_\xi^2 + \lambda_y^2 m_\xi^2 + \lambda_z^2 n_\xi^2 + \\ &+ 2(\lambda_x \lambda_y l_\xi m_\xi + \lambda_y \lambda_z m_\xi n_\xi + \lambda_z \lambda_x n_\xi l_\xi)]^{1/2} \end{aligned} \quad (5)$$

wo ds und ds' die elementaren Längen der untersuchten Geraden vor und nach der Verformung bedeuten.

Soll die einer beliebigen Richtung gehörende Verzerrung durch den Differentialquotienten der Verschiebung ausgedrückt werden, so erscheint es zweckmäßig, die untenstehenden Bezeichnungen einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x^2 &= 2 e_{xx} + 1 & \lambda_x \lambda_y &= e_{xy} = e_{yx} \\ \lambda_y^2 &= 2 e_{yy} + 1 & \lambda_y \lambda_z &= e_{yz} = e_{zy} \\ \lambda_z^2 &= 2 e_{zz} + 1 & \lambda_z \lambda_x &= e_{zx} = e_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Nach Durchführung der Operationen unter (6) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die oben aufgeschriebenen sechs Größen genügen zur vollen Beschreibung des Verformungszustandes. Unter Anwendung derselben ergeben sich folgende Transformationsgleichungen für den Fall einer Achse von Richtung ξ sowie für zwei Achsen ξ und η in zueinander senkrechter Lage:

$$\left. \begin{aligned} e_{\xi\xi} &= \frac{1}{2}(\lambda_{\xi}^2 - 1) = e_{xx}l_{\xi}^2 + e_{yy}m_{\xi}^2 + e_{zz}n_{\xi}^2 + e_{xy}l_{\xi}m_{\xi} + e_{yz}m_{\xi}n_{\xi} + e_{zx}n_{\xi}l_{\xi} \\ e_{\xi\eta} &= \lambda_{\xi}\lambda_{\eta} = 2(e_{xx}l_{\xi}l_{\eta} + e_{yy}m_{\xi}m_{\eta} + e_{zz}n_{\xi}n_{\eta}) + e_{xy}(l_{\xi}m_{\eta} + l_{\eta}m_{\xi}) + \\ &+ e_{yz}(m_{\xi}n_{\eta} + m_{\eta}n_{\xi}) + e_{zx}(n_{\xi}l_{\eta} + n_{\eta}l_{\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Aus dem Typ der Transformationsgleichungen sowie aus den symmetrischen Eigenschaften $e_{\xi\eta} = e_{\eta\xi}$ folgt, daß die Verzerrungsgrößen unter (7) einen symmetrischen Tensor bilden:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}e_{xy} & \frac{1}{2}e_{xz} \\ \frac{1}{2}e_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}e_{yz} \\ \frac{1}{2}e_{xz} & \frac{1}{2}e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Aus der Tatsache, daß die Verzerrungsgrößen einen Tensor ergeben, folgt:

1. Durch den Punkt P gehen drei zueinander senkrechte Geraden, die auch nach der Deformation aufeinander senkrecht stehen, obwohl ihre räumlichen Richtungen verändert sind. Diese veränderten Richtungen bilden die sog. Hauptdehnungsachsen.

2. Die zu den Hauptdehnungsrichtungen gehörenden Verzerrungsgrößen (e_{11} , e_{22} , e_{33}) nehmen einen Extremwert an, und die Größen mit verschiedenen Indizes ($e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$) verschwinden.

Die drei Hauptverzerrungsgrößen lassen sich aus einer kubischen Gleichung in der durch Wurzeln beschriebenen Form ausdrücken:

$$(e - e_{11})(e - e_{22})(e - e_{33}) = 0 \quad (10)$$

Nach Durchführung der Operationen nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$e^3 - I_1e^2 + I_2e - I_3 = 0 \quad (10a)$$

wo I_1 , I_2 und I_3 die Invarianten des Verzerrungstensors sind:

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \\
 I_2 &= e_{11} e_{22} + e_{11} e_{33} + e_{22} e_{33} = e_{xx} e_{yy} + e_{yy} e_{zz} + \\
 &\quad + e_{zz} e_{xx} - \frac{1}{4} (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{xz}^2) \\
 I_3 &= e_{11} e_{22} e_{33} = e_{xx} e_{yy} e_{zz} - \\
 &\quad - \frac{1}{4} (e_{xx} e_{yz}^2 + e_{yy} e_{zx}^2 + e_{zz} e_{xy}^2 - e_{xy} e_{yz} e_{zx})
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die angeschriebenen Invarianten sind voneinander nicht unabhängig, weil der Rauminhalt des durch die Gittervektoren bestimmten Parallelepipeds infolge der Inkompressibilität der gummielastischen Werkstoffe mit dem Anfangsvolumen übereinstimmt. Durch das Produkt der Quadrate der Hauptgittervektoren ergibt sich der Zusammenhang:

$$I_1 + 2I_2 + 4I_3 = 0 \quad (12)$$

Zur Berechnung der Richtungskosinus der Verzerrungs-Hauptrichtungen benutzen wir das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned}
 (e_{xx} - e_{ii}) l_i + \frac{1}{2} e_{xy} m_i + \frac{1}{2} e_{xz} n_i &= 0 \\
 \frac{1}{2} e_{xy} l_i + (e_{yy} - e_{ii}) m_i + \frac{1}{2} e_{yz} n_i &= 0 \\
 \frac{1}{2} e_{xz} l_i + \frac{1}{2} e_{yz} m_i + (e_{zz} - e_{ii}) n_i &= 0 \\
 l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

wenn an Stelle von e_{ii} die Hauptverzerrungswerte e_{11} , e_{22} und e_{33} eingesetzt werden.

3. Verformungskreis für große Formänderungen

Bei kleinen Verformungen kann der Verzerrungszustand durch die MOHRsche Darstellung wiedergegeben werden, in der die zusammengehörigen Werte der spezifischen Dehnungen in verschiedenen Richtungen und der Winkelveränderungen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem einen Kreis ergeben. Für endliche Verformungen ergibt sich nach den Untersuchungen von JASCHKE [5] ebenfalls ein Kreis, wenn die zusammengehörigen Werte der Dehnungen und Winkelveränderungen dargestellt werden, was aber vom gebräuch-

lichen Verfahren abweichend, nur in einem polaren Koordinatensystem erfolgen kann. Den Beweis für die Richtigkeit der Darstellung in Abb. 2 geben wir für den Fall einer sog. reinen Verformung. Die Seiten des gezeigten Vierecks von elementarer Größe sind zu den Richtungen der Hauptdehnungen parallel und verdrehen sich nicht einmal unter der Deformation.

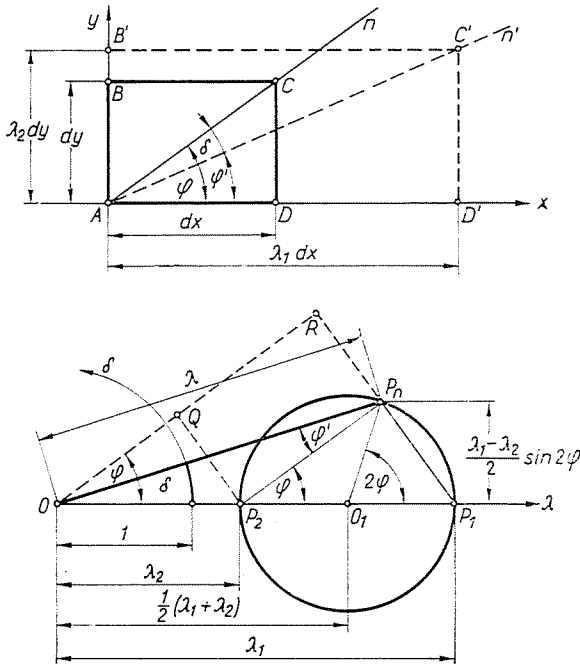


Abb. 2. Darstellung des Verformungszustandes eines Rechtecks bei reiner Deformation

Die Gerade AC übergeht während der Verformung in AC' mit der veränderten Länge:

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \varphi + \lambda_2^2 \sin^2 \varphi} \quad (14)$$

Der Winkel, der die verdrehte Lage der Geraden anzeigt, kann aus den Formeln errechnet werden:

$$\sin \varphi' = \frac{\lambda_2}{\lambda} \sin \varphi; \quad \cos \varphi' = \frac{\lambda_1}{\lambda} \cos \varphi$$

daraus ist $\delta = \varphi - \varphi'$, durch Substituieren der trigonometrischen Veränderungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda \sin \delta &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \sin 2\varphi \\ \lambda \cos \delta &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (15)$$

Durch die Bezeichnungen in Abb. 2 läßt sich die Richtigkeit der Konstruktion beweisen. Die die Dehnung darstellende Gerade OP ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks OPR mit den Katheten nach Gl. (14):

$$\overline{OR} = \lambda_1 \sin \varphi; \overline{RP}_n = \overline{P_2Q} = \lambda_2 \sin \varphi$$

Auf ähnliche Weise ist zu ersehen, daß die Summen auf den rechten Seiten der Gleichungen, im Übereinstimmung mit den in der Abb. verwendeten

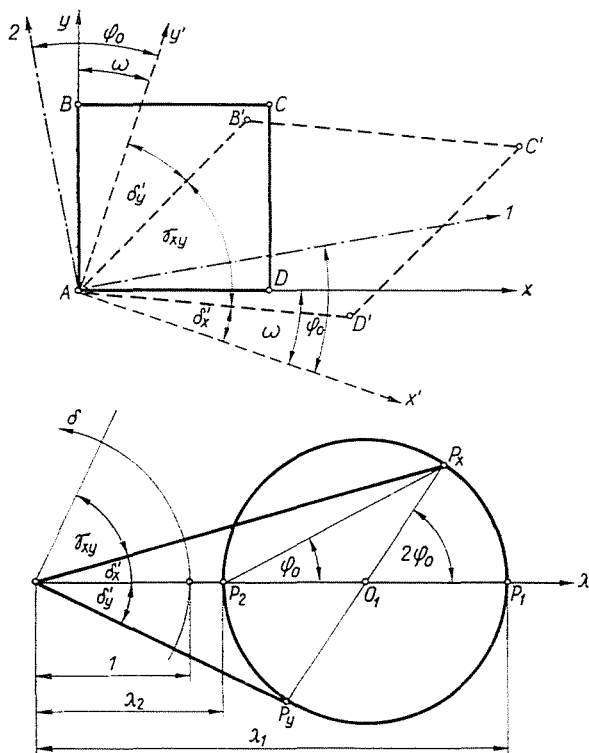


Abb. 3. Darstellung des Verformungszustandes im allgemeinen Falle

Bezeichnungen, die horizontalen und senkrechten Projektionen der Strecke λ darstellen. Der Verdrehungswinkel δ der Diagonale des Vierecks kann auf dem Kreis mit Einheitsradius abgemessen werden.

Der Verformungszustand ist auf die beschriebene Weise auch für einen allgemeinen Fall anzuwenden, dann tritt aber auch eine unbekannte Verdrehung ω auf, deren Wirkung nach der in Abb. 3 gezeigten Konstruktion in Betracht gezogen werden kann.

Das rechtwinklige Viereck geht dabei in das Parallelogramm $AB'C'D'$ über, wo die linearen Längsdehnungen λ_x , λ_y und der Winkel γ_{xy} bei dem Punkt

A zu messen sind. Mit Hilfe der erhaltenen Angaben lassen sich der Verformungskreis darstellen und dabei die Hauptdehnungswerte λ_1 und λ_2 abmessen, weiterhin die Winkel δ_x , δ_y , φ_0 und ω , die für die Hauptdehnungslage und den Dehnungswert charakteristisch sind.

4. Graphische Auswertung des Verformungszustandes durch Messung der Verschiebungen

Gummiartige Kunststoffe werden durch äußere Kräfte so stark deformiert, daß die Verschiebungen der einzelnen Punkte unmittelbar gemessen werden können. Auf die Oberfläche eines Gummielementes sollen zu den Unter-

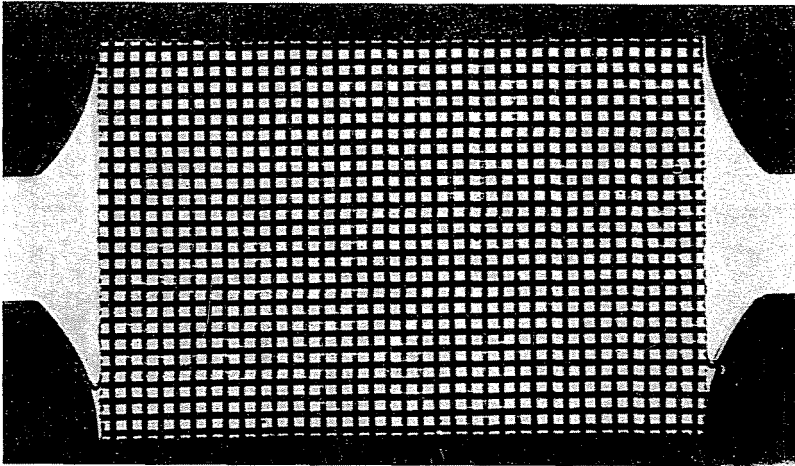


Abb. 4a. Gelatinemodell mit auf die Oberfläche aufgebrachtem Netzwerk vor (a) und nach (b) der Deformation

suchungen gut unterscheidbare Punkte oder irgendein regelmäßiges Netzwerk aufgebracht werden, aus deren Verschiebungen bzw. Verzerrungen die Charakteristik des Verformungszustandes abzulesen ist.

Die Anwendungsweise des Verfahrens soll an der Modelluntersuchung des Gummielementes eines gefederten Eisenbahnrades dargestellt werden. Der in den Radkörper eingebaute Gummiring erfährt annähernd eine ebene Verformung, deren Untersuchung mit Hilfe eines zwischen zwei Glasplatten gesetzten Gelatine-Modells durchgeführt wurde. Auf der Oberfläche des Modells wurde ein in Abb. 4a dargestelltes Netzwerk durch vorhergehende Bearbeitung der Gießform gebildet. Das Modell wurde auf eine den tatsächlichen Verhältnissen entsprechende Weise belastet, wodurch sich das Netzwerk auf die in Abb. 4b dargestellte Weise verzerrte.

Das verformte Netzsystem wurde mit Hilfe der im Abschnitt 2 geschilderten allgemeinen Zusammenhänge ausgewertet, die aber infolge des ebenen Verformungszustandes vereinfacht werden konnten.

Wenn Nummer 3 die zur Ebene der Verformung normale Haupttrichtung bezeichnet, so wird in allen Punkten des Modells die Bedingung befriedigt:

$$\lambda_3 \equiv 1 \quad \text{bzw.} \quad e_{33} \equiv 0 \quad (16)$$

Nach Zusammenhang (16) ändern sich die Invarianten des Verformungstensors wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= e_{11} + e_{22} = e_{xx} + e_{yy} \\ I_2 &= e_{11} e_{22} = e_{xx} e_{yy} - \frac{1}{4} e_{xy}^2 \\ I_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

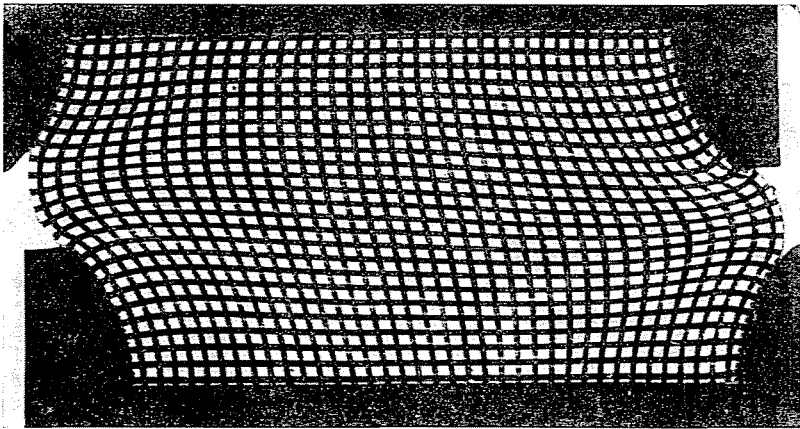


Abb. 4b

Aus dem Zusammenhang $I_3 = 0$ und der Gl. (12) folgt:

$$I_2 = -\frac{1}{2} I_1^2 \quad (18)$$

Auf diese Weise läßt sich der Verformungszustand durch eine einzige Größe charakterisieren, mit deren Hilfe die Verformungsenergie in der Umgebung des untersuchten Punktes nach einer beliebigen Elastizitätstheorie berechnet werden kann.

Die Hauptverzerrungsgrößen sind aus der vereinfachten Gleichung zu errechnen:

$$e(e^2 + I_1 e + I_2) = 0 \quad (19)$$

deren zwei von Null abweichende Wurzeln die Größen der untersuchten e_{11} und e_{22} liefern. Für die Schubbeanspruchung des Gummis hat die Kenntnis der Differenz zwischen den zwei Hauptdehnungen eine besondere Bedeutung:

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 - \lambda_2^2 &= (2 e_{11} + 1) - (2 e_{22} + 1) = \\ &= 2 (e_{11} - e_{22}) = 2 \sqrt{I_1 (1 + 2 I_1)}\end{aligned}\quad (20)$$

Der Unterschied zwischen den zwei Hauptdehnungen ist nämlich nach der von TREOLAR [1] ausführlich behandelten statistischen Theorie der im Werkstoff auftretenden Schubbeanspruchung direkt proportional. Bei ebenen Verformungszuständen stimmt übrigens diese Proportionalitätsbedingung mit anderen erfahrungsgemäßen Zusammenhängen gut überein.

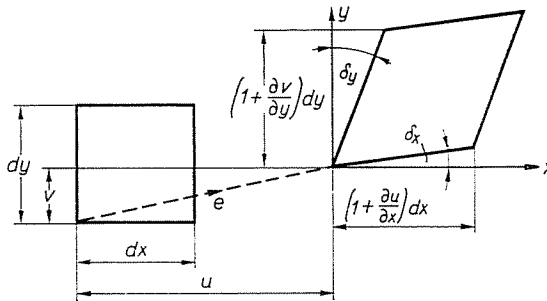


Abb. 5. Verformung eines Netzwerks in der Umgebung des untersuchten Punktes P

Die Berechnung des Invarianten I_1 erfolgt mit Hilfe der Gl. (17) bzw. (7) durch die Zusammenhänge:

$$I_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (21)$$

Die Ableitungen im Ausdruck (21) können so erstellt werden, daß man die Diagramme der gemessenen Verschiebungskomponenten u und v längs der Geraden in den Richtungen x und y des Modells in unbelastetem Zustand zeichnet, wobei die Tangenten der Kurventangenten die Zahlenwerte der vier verschiedenen Ableitungen liefern.

Eine etwas einfachere Auswertung kann mit Hilfe des im Abschnitt 3 erörterten Verformungskreises erhalten werden. Nach Abb. 5 genügt in diesem Falle die graphische Bestimmung der Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, die zur Konstruktion notwendigen sonstigen Angaben können nämlich auf folgende Weise ermittelt werden:

$$\lambda_x = \frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{\cos \delta_x}; \quad \lambda_y = \frac{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}{\cos \delta_y} \quad (22)$$

Die zur Konstruktion benötigten Winkel δ_x , δ_y und γ_{xy} sind bei den untersuchten Punkten direkt zu messen.

5. Bestimmung der Verformungscharakteristik nach polarisations-optischen Methoden

Zur Untersuchung nach polarisations-optischen Methoden von gummiartigen Materialien werden von mehreren Verfassern (z. B. SCHRAUD [6]) Modelle aus Gelatine, Wasser und Glycerin empfohlen.

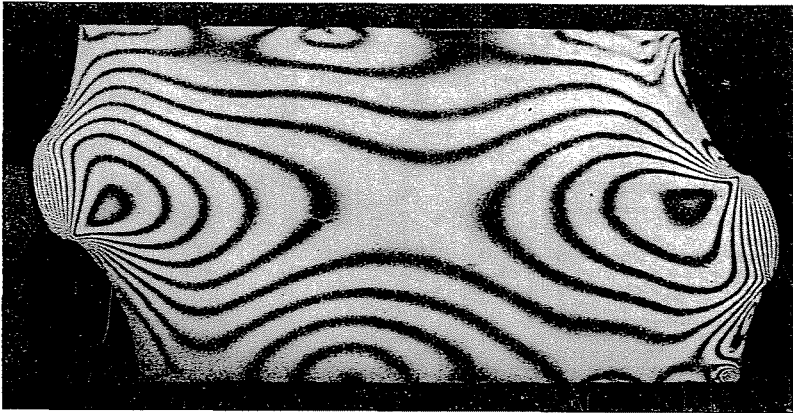


Abb. 6. Isochromatenaufnahme eines Gelatinemodells bei ebener Formänderung

Die Nachbildung im Modell eines ebenen Verformungszustandes erfolgt mit Hilfe dieser Stoffe so, daß das Modell von entsprechender Form zwischen parallelen Glasplatten belastet wird. Die Innenflächen der Glasplatten werden mit einem Schmiermittel behandelt. Unter einer Beleuchtung zwischen aufeinander senkrecht gestellten Polarisationsfiltern erscheinen auf dem Modell die wohlbekannten Isoklinen- und Isochromaten-Linien (Abb. 6).

Mit Hilfe der Isoklinen lassen sich die Richtungen der Hauptachsen des Verformungszustandes von Punkt zu Punkt einfach feststellen, da bei der Verdrehung der Polarisationsfilter die Isoklinen für die verschiedenen Winkel über jeden Punkt des Modells gehen.

Zwischen den Ordnungszahlen der Isochromaten und den Differenzen der Hauptdehnungen besteht bei festen Modellstoffen ein linearer Zusammenhang. Für hochelastische Modellstoffe sollte aber eingehend untersucht werden, wie sich dieses Verhältnis bei großen Deformationen gestaltet, da hier auch die mathematische Beschreibung der Verformung nur auf einer abweichenden Weise möglich ist.

Das Ergebnis der zahlreichen Versuche war, daß die Ordnungszahlen bei Gelatine und anderen hochelastischen Stoffen (z. B. PVC) der Differenz der Logarithmen der Hauptdehnungen proportional sind (FEKETE [7]):

$$n = n_0(\ln \lambda_1 - \ln \lambda_2) \quad (23)$$

wo n die Ordnungszahl bedeutet und n_0 eine von Material und Dicke des Modells und von der Wellenlänge der angewandten Lichtstrahlen abhängige Konstante ist.

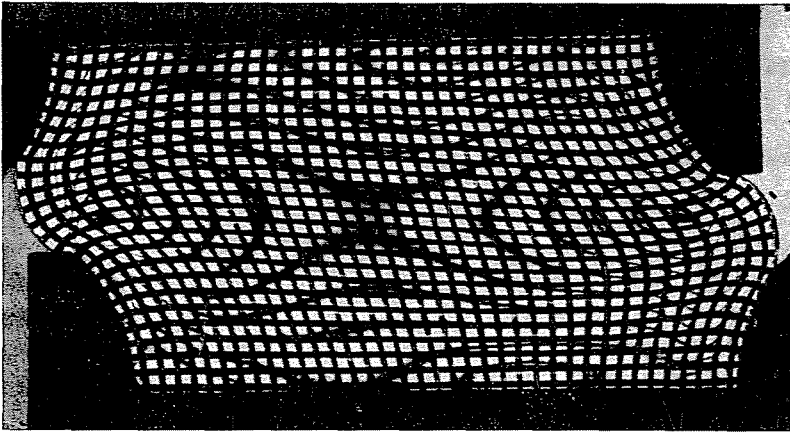


Abb. 7. Isochromatenaufnahme eines Gelatinemodells mit verformtem Netzwerk

Wird in Betracht gezogen, daß zwischen den zwei Hauptdehnungen der Zusammenhang besteht:

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\lambda_1^2 = e^{n/n_0}; \quad \lambda_2^2 = e^{-n/n_0}$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 = 2 \left(\operatorname{ch} \frac{n}{n_0} - 1 \right) \quad (24)$$

Der Proportionalitätsfaktor n_0 in Gl. (23) kann so bestimmt werden, daß auf die Oberfläche des untersuchten durchsichtigen Modells ein Netzwerk aufgebracht und von dem beliebig deformierten Modell eine photographische Aufnahme gefertigt wird, auf der mit dem Bild des verformten Netzes auch die Isochromatenlinien zu sehen sind (Abb. 7). Bei einer für mehrere Punkte durchgeführten Auswertung liegen die zusammengehörigen Daten entlang einer Geraden im Koordinatensystem nach Gl. (23). Aus der Steilheit der Geraden läßt sich n_0 ermitteln.

Zusammenfassung

Die Bestimmung der genauen Spannungsverteilung von verschiedenen Werkstoffen mit gummiartigen Eigenschaften ist nach der Theorie der hochelastischen Verformungen durchzuführen. Das Haupthindernis für die praktische Anwendung der Theorie besteht darin, daß die Spannungen im allgemeinen nur mit Hilfe von vorherigen Deformationshypothesen zu errechnen sind. In der Abhandlung werden — nach Übersicht der theoretischen Zusammenhänge —, Meßverfahren vorgeschlagen, die zur Feststellung der tatsächlichen Verformungszustände von Gummielementen verschiedener Form und unter verschiedenen Beanspruchungen geeignet sind. Dabei werden für den ebenen Verformungszustand das Verfahren auf Grund der unmittelbar meßbaren Verschiebungen sowie die polarisations-optische Methode an Hand durchsichtiger Modelle ausführlich erörtert.

Literatur

1. TRELOAR, L. R. G.: The Physics of Rubber Elasticity, Clarendon Press, Oxford, 1958.
2. RIVLIN, R. S.: Phil. Trans. A **240**, 459 (1948).
3. KAPPUS, R.: Z. angew. Math. Mech. **19**, 271 (1939).
4. PONOMARJOV, Sz. D.: Szilárdsági számítások a gépészetben. Bd. I, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.
5. JASCHKE, R.: Rundschau **10**, 56 (1939).
6. SCHRAUD, R.: Z. VDI **95**, 2 271 (1953).
7. FEKETE, T.: Beiträge zur Spannungs- und Dehnungsanalyse V., Akademie-Verlag, Berlin, 1968.

Dr. Tibor FEKETE, Budapest IX., Kinizsi u. 1—7. Ungarn