

EINE NÄHERUNGSMETHODE ZUR BERECHNUNG RADIAL DURCHSTRÖMTER LAUFRÄDER MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER KOMPRESSIBILITÄT

Von

I. KURUTZ

Lehrstuhl für Strömungslehre, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 1. August 1967)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. GRUBER

Einleitung

Das Singularitätenverfahren hat sich zur Berechnung radial durchströmter Laufräder mit rückwärts gekrümmter Beschaufelung sehr gut bewährt. Diese Methode wurde von GRUBER in einer praktisch gut verwendbaren Form für die Förderung sowohl von inkompressiblen [1] als auch von kompressiblen [2] [3] Medien ausgearbeitet. Dieses Verfahren ermöglicht die Bestimmung der Schaufellinie für gewünschte Leistungskennwerte bei beliebiger Zirkulationsverteilung längs der Schaufel und bei gegebenen Hauptabmessungen des Laufrades.

Die Berechnung erleichtert es wesentlich, wenn ein guter Näherungswert des Steigungswinkels β_a jener logarithmischen Spirale von Anfang an bekannt ist, die über die Eintritts- und Austrittskante der Schaufel verläuft (Abb. 1). Wenn dieser Winkel nicht richtig gewählt wurde, muß die ganze Berechnung mit einem auf Grund des ersten Rechnungsganges korrigierten Winkelwert wiederholt werden.

Schon früher wurde ein Verfahren zur Berechnung von β_a bei inkompressiblen Medien entwickelt, das bei konstanter Laufradbreite ebenso wie bei konischer Deckscheibe verwendet werden kann und das aus einer geschlossenen Formel genügend genaue Werte liefert [4] [5].

Die Berechnung von Laufrädern mit konstanter Breite

Die Untersuchung bestimmt zunächst die annähernde Schaufellinie. Der gesuchte Wert von β_a ergibt sich als der Steigungswinkel jener logarithmischen Spirale, die über die Eintritts- und Austrittskante dieser annähernd bestimmten Schaufellinie verläuft.

Die Schaufellinie wird auf Grund der Geschwindigkeitsdreiecke bestimmt. Damit bleibt der Umstand unberücksichtigt, daß die Schaufelzirkulation eigentlich von den auf den Schaufellinien verteilten Wirbeln induziert wird.

Die Wirbelbelegung entspricht hierbei der angenommenen Zirkulationsverteilung.

Aus dem auf einen beliebigen Radius r bezogenen Geschwindigkeitsdreieck (Abb. 2) folgt:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{u}{c_r} - \frac{c_{2r}}{c_r} \quad (1)$$

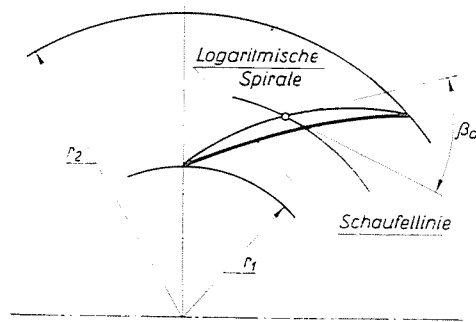


Abb. 1

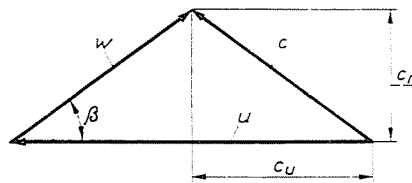


Abb. 2

Hier bedeuten: u die Umfangsgeschwindigkeit des Rades am Radius r , c_u und c_r die tangentielle und die radiale Komponente der Absolutgeschwindigkeit.

Da es im weiteren zweckmäßig ist, die Ausgangswerte der Berechnung in dimensionsloser Form auszudrücken, wird die Druckzahl ψ_{id} und die Lieferzahl φ^* in geeigneter Weise umgeändert. Die Druckzahl wird bei der Behandlung von Laufrädern, die von inkompressiblen Medien durchströmt werden, zumeist in der Gestalt

$$\psi_{id} = \frac{\Delta p_{gid}}{\frac{\rho}{2} u_2^2} \quad (2)$$

angewandt. Hier bedeutet Δp_{gid} die ideale Gesamtdruckerhöhung, u_2 die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades mit dem Außendurchmesser D_2 und ρ die Dichte des Mediums. Diese Formel läßt sich bei drallfreiem Eintritt, d. h. bei $c_{1u} = 0$ auf Grund der Eulerschen Turbinengleichung

$$\Delta p_{gid} = \rho c_{2u} u_2$$

in der Form

$$\psi_{id} = 2 \frac{c_{2u}}{u_2} \quad (2a)$$

schreiben.

Da dieser Ausdruck von der Dichte unabhängig ist, kann er auch für Laufräder angewendet werden, die von kompressiblen Medien durchströmt werden. Die Lieferzahl ist

$$\varphi^* = \frac{Q_1}{D_2 \pi b_2 u_2} = \frac{c_{2ri}}{u_2}, \quad (3)$$

worin Q_1 das in der Zeiteinheit in das Laufrad einströmende Volumen und b_2 die Breite des Laufrades am Außendurchmesser D_2 bedeutet. Die radiale Geschwindigkeitskomponente c_{2ri} wird so berechnet, als wäre das Medium inkompressibel.

Wegen der Kompressibilität ändert sich jedoch die Dichte, die tatsächliche radiale Komponente der Absolutgeschwindigkeit wird mithin

$$c_r = c_{ri} \frac{\varrho_0}{\varrho}. \quad (4)$$

Im weiteren wird das Verhältnis der tatsächlichen Dichte ϱ zu dem Wert ϱ_0 , der Dichte im Ruhezustand vor der Verdichtung, wiederholt Verwendung finden. Dieses Verhältnis erhält man aus der Energiegleichung der Gasdynamik, wenn man sie im laufradfesten, rotierenden Koordinatensystem aufschreibt. Nach entsprechenden Umänderungen ergibt sich

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left\{ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \left[\left(\frac{r}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{w}{u_2} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{\kappa - 1}} \approx 1 + \frac{M^2}{2} \left[\left(\frac{x}{x_2} \right)^2 - \left(\frac{w}{u_2} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Hier wurde die dimensionslose Bezeichnung

$$x = \frac{r}{r_1}$$

eingeführt. Die Machsche Zahl M wird durch die Beziehung

$$M = \frac{u_2}{a_0}$$

bestimmt, in der a_0 die Schallgeschwindigkeit in Ruhezustand vor der Verdichtung bedeutet. Die Potenz mit dem Exponenten $1/(\kappa - 1)$ kann bis ungefähr $M = 0,8$ (bei Luft bis $u_2 \approx 280$ m/s) durch den Näherungswert ersetzt

werden, da sich hierbei kein zu großer Fehler ergibt. Die angegebene Beziehung für das Dichteverhältnis ist der Literatur [3] entnommen.

In diese Beziehung sollte natürlich der tatsächliche Wert von w/u_2 eingesetzt werden, dieser ist aber am Anfang der Berechnung noch nicht bekannt. Da für β_a eine geschlossene Formel gesucht wird, kommt eine schrittweise Näherung nicht in Frage. Die weitere Berechnung geht also von der Relativgeschwindigkeit w_i aus, wobei inkompressible Strömung vorausgesetzt wird.

Wie schon erwähnt, wird die annähernde Schauffellinie auf Grund der Geschwindigkeitsdreiecke bestimmt. Entsprechend werden auch die Relativgeschwindigkeiten — die zur Berechnung des Dichteverhältnisses benötigt werden — aus den Geschwindigkeitsdreiecken berechnet (Abb. 2) gemäß

$$w_i^2 = c_{ri}^2 + (u - c_u)^2 = c_{ri}^2 + u^2 - 2uc_u + c_u^2.$$

$$\left(\frac{w_i}{u_2}\right)^2 = \left(\frac{c_{ri}}{c_{2ri}}\right)^2 \left(\frac{c_{2ri}}{u_2}\right)^2 + \left(\frac{u}{u_2}\right)^2 - 2\frac{c_{2u}}{u_2} \frac{u}{u_2} \frac{c_u}{c_{2u}} + \left(\frac{c_{2u}}{u_2}\right)^2 \left(\frac{c_u}{c_{2u}}\right)^2.$$

Diese Gleichung läßt sich unter Berücksichtigung der Formeln [2] und [3] für ψ_{id} bzw. φ^* umändern. Dabei wird $\frac{u}{u_2} = \frac{x}{x_2}$, ferner — auf Grund der Kontinuitätsgleichung — $\frac{c_{ri}}{c_{2ri}} = \frac{x_2}{x}$ gesetzt. Der Wert von $\frac{c_u}{c_{2u}}$ ist von der Gestalt der Zirkulationsverteilung längs der Schaufeln abhängig.

Bei der ausführlichen Berechnung des Laufrades wird die Gestalt der Zirkulationsverteilung längs der Sehne einer Schaufel dessen geraden Schaufelgitters aufgenommen, das durch konforme Abbildung der Laufradschaufel entstand. Frühere Untersuchungen haben gezeigt, daß gute Ergebnisse erzielt werden können, wenn längs der Sehne im geraden Gitter eine konstante Zirkulation angenommen wird. Hiervon ausgehend und unter Berücksichtigung der Abbildungsfunktion kann die Änderung der Zirkulation bzw. von c_u in Abhängigkeit von r bzw. x bestimmt werden. Die Herleitung dieser Beziehungen wurde schon früher in einer Arbeit [4] veröffentlicht, die sich mit Laufrädern für die Förderung inkompressibler Medien befaßt. Hier sei nur das Endergebnis

$$\frac{c_u}{c_{2u}} = \frac{x_2}{\ln x_2} \frac{\ln x}{x}$$

angegeben. Damit nimmt die Gleichung für $(w_i/u_2)^2$ die Form

$$\left(\frac{w_i}{u_2}\right)^2 = \left(\frac{x_2}{x}\right)^2 \varphi^{*2} + \left(\frac{x}{x_2}\right)^2 - \frac{\psi_{id}}{\ln x_2} \ln x + \frac{\psi_{id}^2}{4} \left(\frac{x_2}{x}\right)^2 \left(\frac{\ln x}{\ln x_2}\right)^2$$

und die Gleichung (5) für q/q_0 die Gestalt

$$\frac{q}{q_0} = 1 + \frac{M^2}{2} \left[- \left(\frac{x_2}{x} \right)^2 \varphi^{*2} + \frac{\psi_{id}}{\ln x_2} \ln x - \frac{\psi_{id}^2}{4} \left(\frac{x_2}{x} \right)^2 \left(\frac{\ln x}{\ln x_2} \right)^2 \right] \quad (6)$$

an. Mit dieser Beziehung und mit den Gleichungen (2a), (3) und (4) kann der Ausdruck (1) für $\text{ctg } \beta$ in mehreren Schritten in die Formen

$$\begin{aligned} \text{ctg } \beta &= \frac{u}{c_r} - \frac{c_u}{c_r} = \frac{u}{u_2} \frac{u_2}{c_{2ri}} \frac{c_{2ri}}{c_{ri}} \frac{q}{q_0} - \frac{c_u}{c_{2u}} \frac{c_{2u}}{u_2} \frac{u_2}{c_{2ri}} \frac{c_{2ri}}{c_{ri}} \frac{q}{q_0}; \\ \text{ctg } \beta &= \left[\frac{1}{\varphi^*} \left(\frac{x}{x_2} \right)^2 - \frac{\psi_{id}}{2\varphi^*} \frac{\ln x}{\ln x_2} \right] \left\{ 1 + \frac{M^2}{2} \left[- \left(\frac{x_2}{x} \right)^2 \varphi^{*2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\psi_{id}}{\ln x_2} \ln x - \frac{\psi_{id}^2}{4} \left(\frac{x_2}{x} \right)^2 \left(\frac{\ln x}{\ln x_2} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

gebracht werden.

Es ist leicht einzusehen, daß sich die rechte Seite dieser Gleichung in zwei Teile aufteilen läßt:

$$\text{ctg } \beta = (\text{ctg } \beta)_i + \Delta \text{ctg } \beta. \quad (7)$$

Das erste Glied, $(\text{ctg } \beta)_i$ ist von der Machschen Zahl unabhängig und ist gleich jenem Wert, der sich für inkompressible Strömung ergibt. Das von M abhängige Glied ist:

$$\begin{aligned} \Delta \text{ctg } \beta &= \left[\frac{1}{\varphi^*} \left(\frac{x}{x_2} \right)^2 - \frac{\psi_{id}}{2\varphi^*} \frac{\ln x}{\ln x_2} \right] \left[- \left(\frac{x_2}{x} \right)^2 \varphi^{*2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi_{id}}{\ln x_2} \ln x - \frac{\psi_{id}^2}{4} \left(\frac{x_2}{x} \right)^2 \left(\frac{\ln x}{\ln x_2} \right)^2 \right] \frac{M^2}{2}. \end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung folgt daraus, daß

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \text{ctg } \beta}{M^2} &= - \frac{\varphi^*}{2} + \frac{\psi_{id}}{2\varphi^* x_2^2 \ln x_2} x^2 \ln x - \frac{3}{8} \frac{\psi_{id}^2}{\varphi^* (\ln x_2)^2} (\ln x)^2 + \\ &\quad + \frac{\psi_{id} \varphi^* x_2^2}{4 \ln x_2} \frac{\ln x}{x^2} + \frac{\psi_{id}^3 x_2^2}{16 \varphi^* (\ln x_2)^3} \frac{(\ln x)^3}{x^2}. \end{aligned}$$

Der Steigungswinkel der über die Eintritts- und Austrittskante der Schaufel verlaufenden logarithmischen Spirale läßt sich — aus dem bekannten $\text{ctg } \beta$ — aus folgender Beziehung berechnen:

$$\operatorname{ctg} \beta_a = \frac{1}{\ln x_2} \int_1^{x_2} \frac{\operatorname{ctg} \beta}{x} dx. \quad (8)$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit Gl. (17) in der Publikation [4], die sich mit der gleichen Frage befaßt.

Setzt man den Ausdruck (7) für $\operatorname{ctg} \beta$ in die Gleichung (8) ein, kann jedes der beiden Glieder selbständig integriert werden. Die Integration des ersten Gliedes ergibt die schon früher — Gl. (18) in [4] — abgeleitete Beziehung für $(\operatorname{ctg} \beta_a)_i$:

$$(\operatorname{ctg} \beta_a)_i = \frac{1}{2 \varphi^* \ln x_2} \frac{x_2^2 - 1}{x_2^2} - \frac{\psi_{id}}{4 \varphi^*}. \quad (9)$$

Das zweite Glied ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \operatorname{ctg} \beta_a}{M^2} &= \frac{1}{\ln x_2} \left[-\frac{\varphi^*}{2} \int_1^{x_2} \frac{dx}{x} + \frac{\psi_{id}}{2 \varphi^* x_2^2 \ln x_2} \int_1^{x_2} x \ln x dx - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{8} \frac{\psi_{id}^2}{\varphi^* (\ln x_2)^2} \int_1^{x_2} \frac{(\ln x)^2}{x} dx + \frac{\psi_{id} \varphi^* x_2^2}{4 \ln x_2} \int_1^{x_2} \frac{\ln x}{x^3} dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi_{id}^2 x_2^2}{16 \varphi^* (\ln x_2)^3} \int_1^{x_2} \frac{(\ln x)^3}{x^3} dx. \right. \end{aligned}$$

Nach Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \operatorname{ctg} \beta_a}{M^2} &= -\frac{\varphi^*}{2} + \frac{\psi_{id}}{4 \varphi^*} \left[\frac{1}{\ln x_2} - \frac{x_2^2 - 1}{x_2^2} \frac{1}{2 (\ln x_2)^2} \right] - \\ &\quad - \frac{\psi_{id} \varphi^*}{8} \left[\frac{1}{\ln x_2} - \frac{x_2^2 - 1}{2 (\ln x_2)^2} \right] - \frac{\psi_{id}^2}{8 \varphi^*} - \\ &\quad - \frac{\psi_{id}^3}{32} \left[\frac{1}{\ln x_2} + \frac{3}{2} \frac{1 + \ln x_2}{(\ln x_2)^3} - \frac{3}{4} \frac{x_2^2 - 1}{(\ln x_2)^4} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Demnach errechnet sich $\operatorname{ctg} \beta_a$ aus den Gleichungen (9) und (10) zu

$$\operatorname{ctg} \beta_a = (\operatorname{ctg} \beta_a)_i + \Delta \operatorname{ctg} \beta_a, \quad (11)$$

woraus folgt, daß $\operatorname{ctg} \beta_a$ mit dem Quadrat der Machschen Zahl proportional wächst.

Die hier abgeleitete Formel ist zwar etwas kompliziert, doch ermöglicht ihre Anwendung eine erhebliche Arbeitseinsparung, weil sie die Wiederholung der ausführlichen Berechnung gegenstandslos macht.

Der Kontrolle dieser Beziehungen wurden die Ergebnisse einiger früherer ausführlicher Berechnungen zugrunde gelegt. Die Ausgangsdaten und die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefaßt.

$D_2/D_1 = x_2$	1,5	1,6	2,0
ψ_{id}	0,9	1,2	1,0
φ^*	0,3	0,3	0,2
M	0,736	0,7	0,75
β_a aus der ausführlichen Berechnung	31° 26'	38° 28'	31° 44'
$(\beta_a)_N$ Näherungswerte nach den Formeln (9), (10) und (11)	30° 50'	38° 44'	32° 04'
$\beta_a - (\beta_a)_N$	+0° 36'	-0° 16'	-0° 20'

Die Genauigkeit der Näherungsformel ist befriedigend. Sie ermöglicht, die wiederholte Durchführung der ausführlichen Berechnung zu vermeiden.

Die Berechnung von Laufrädern mit konischer Deckscheibe

Die Untersuchungen zur Bestimmung des Winkels β_a erstreckten sich auf Laufräder mit konischer Deckscheibe.

Wenn die Deckscheibe ein Kegel (die Erzeugende eine Gerade) ist, so gilt für das Breitenverhältnis

$$\frac{b}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} - \frac{x-1}{x_2-1} \left(\frac{b_1}{b_2} - 1 \right).$$

Hier bedeuten b_2 und b_1 die Laufradbreite am Außen- bzw. am Eintrittsdurchmesser.

Die Breitenänderung muß auch bei der Bestimmung der Radialkomponente der Absolutgeschwindigkeit berücksichtigt werden, es wird also

$$\frac{c_{ri}}{c_{2ri}} = \frac{b_2}{b} \frac{x_2}{x},$$

was in die Gleichung (1) und in die Berechnung von w/u_2 einzugehen hat. Es werden ferner die Beziehungen

$$B = \frac{b_1/b_2 - 1}{x_2 - 1}$$

und

$$A = \frac{b_1}{b_2} + B$$

eingeführt. Unter Umgehung der Herleitung sei festgestellt, daß sich das Ergebnis in einer der Gleichung (11) ähnlichen Form aufschreiben läßt, daß aber $\Delta \operatorname{ctg} \beta_a$ jetzt nicht in geschlossener Form erscheint:

$$\operatorname{ctg} \beta_a = (\operatorname{ctg} \beta_a)_i + \frac{1}{\ln x_2} \int_1^{x_2} \frac{\Delta \operatorname{ctg} \beta}{x} dx.$$

Das $(\operatorname{ctg} \beta_a)_i$ kann nach der früheren Publikation [5] bestimmt werden:

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} \beta_a)_i = & \frac{1}{2 \varphi^* \ln x_2} \left[\frac{x_2^2 - 1}{x_2^2} A - \frac{2}{3} \frac{x_2^3 - 1}{x_2^2} B \right] - \\ & - \frac{\psi_{id}}{4 \varphi^*} \left\{ A - 2 B \left[\frac{x_2}{\ln x_2} - \frac{x_2 - 1}{(\ln x_2)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Der Integrand zur Bestimmung von $\Delta \operatorname{ctg} \beta_a$ ist durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} \frac{\Delta \operatorname{ctg} \beta}{x} = & - \frac{A \varphi^*}{2x(A - Bx)^2} + \frac{2 A \psi_{id}}{2 \varphi^* x_2^2 \ln x_2} x \ln x - \\ & - \frac{3 A \psi_{id}^2}{8 \varphi^* (\ln x_2)^2} \frac{(\ln x)^2}{x} + \frac{B \varphi^*}{2(A - Bx)^2} - \frac{B \psi_{id}}{2 \varphi^* x_2^2 \ln x_2} x^2 \ln x + \\ & + \frac{3 B \psi_{id}^2}{8 \varphi^* (\ln x_2)^3} (\ln x)^2 + \frac{A \psi_{id} \varphi^* x_2^2}{4 \ln x_2} \frac{\ln x}{x^3 (A - Bx)^2} + \\ & + \frac{A \psi_{id}^3 x_2^2}{16 \varphi^* \ln x_2^3} \frac{(\ln x)^3}{x^2} - \frac{B \psi_{id} \varphi^* x_2^2}{4 \ln x_2} \frac{\ln x}{x^2 (A - Bx)^2} + \\ & + \frac{B \psi_{id}^3 x_2^2}{16 \varphi^* (\ln x_2)^3} \frac{(\ln x)^3}{x^2} \end{aligned}$$

gegeben. Nachdem man die Konstanten aus den Ausgangsdaten berechnet hat, kann man den Integranden für verschiedene Werte von x tabellarisch

berechnen und die Integration graphisch durchführen. Steht zur Berechnung des Laufrades keine elektronische Rechenmaschine zur Verfügung, ermöglicht auch dieses Näherungsverfahren eine Arbeitseinsparung, doch ist die Bestimmung von β_a wesentlich langwieriger als bei Laufrädern mit konstanter Breite.

Zusammenfassung

Die rückwärtsgekrümmte Beschauflung eines radialen Laufrades kann auch dann nach dem Singularitätenverfahren berechnet werden, wenn es kompressible Medien fördert. Das Verfahren geht von der logarithmischen Spirale aus, die über die Eintritts- und Austrittskante der Schaufel verläuft. Wird der Steigungswinkel dieser Spirale zu Beginn nicht richtig angenommen, muß der Rechnungsgang wiederholt werden.

Nach dem hier geschilderten Näherungsverfahren kann der Steigungswinkel mit befriedigender Genauigkeit bei Laufrädern von konstanter Breite aus einer geschlossenen Formel, bei Laufrädern mit konischer Deckscheibe durch graphische Integration berechnet werden.

Das hier bekanntgegebene Näherungsverfahren ermöglicht es, Wiederholungen der ausführlichen Berechnung zu vermeiden.

Literatur

1. GRUBER, J.: Die Konstruktion von Schaufelsternen mit rückwärts gekrümmter Beschauflung. *Periodica Polytechnica — Maschinen- und Bauwesen* 1. 43—49 (1957).
2. GRUBER, J.: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung von rotierenden Kreisgittern mit Berücksichtigung der Kompressibilität. *ZAMM* 41, Sonderheft. T 132—133 (1961).
3. GRUBER, J.: Radiális átömlésű, végtelen vékony, hátrahajló lapátosú forgó lapátkörácsok számítása. Dissertation. Ung. Akademie der Wissenschaften, 1963.
4. KURUTZ, I.: Eine Näherungsmethode zur Erleichterung der Berechnung von radialen Laufrädern. *Periodica Polytechnica, Maschinen- und Bauwesen*, 3. 223—235 (1959).
5. KURUTZ, I.: Die Berechnung radialer Laufräder mit konischer Deckscheibe. *Periodica Polytechnica, Maschinen- und Bauwesen* 4. 267—276 (1960).

Imre KURUTZ, Budapest, XI. Bertalan Lajos u. 4—6. Ungarn