

# NEUE METHODE ZUR ALLGEMEINEN BESTIMMUNG GLEICHEN SPEZIFISCHEN GLEITENS BEIM EINGRIFF VON EVOLVENTENVERZÄHNUNGEN, I

ZUR ANALYSE DES VERZÄHNUNGSBEREICHES UND ZUR BESTIMMUNG  
DER TRAGFÄHIGKEIT NOTWENDIGE NEUE FORMEN VON GLEICHUNGEN  
DER GEOMETRISCHEN KENNWERTE

Von

E. OSZKAY

Lehrstuhl für Hebemaschinen und Förderanlagen, Technische Universität,  
Budapest

(Eingegangen am 15. August 1967)

Vorgelegt von Prof. Gy. GRESCHIK

## Bezeichnungen

$a$ [mm]	Achsabstand
$b$ [mm]	Zahnbreite
$b_{a\min}$ [mm]	minimale Gesamtlänge der Berührungslinien in der Wälzebene beim Eingriff
$c$ [mm]	Kopfspiel
$c'_0 = c_0/m_n$	Kopfspielfaktor des Werkzeugbezugsprofils
$c_b$	Zahnbreitenbeiwert
$c_C$	Beiwert der ungleichförmigen Linienpressung im Punkte $C$
$c_A$	Beiwert der ungleichförmigen Linienpressung im Punkte $A$
$c_E$	Beiwert der ungleichförmigen Linienpressung im Punkte $E$
$c_s$	Ölbeiwert
$c_{ii}$	Betriebsbeiwert
$d$ [mm]	im allgemeinen: Durchmesser
$d_{H1}, d_{H2}$ [mm]	Grenzdurchmesser des Ritzels bzw. des Rades (Kreis des Stirnschnittes der Evolventenverzahnung, bis zu dem das Zahnprofil beim Abwälzverfahren hergestellt wird)
$d_{m1}, d_{m2}$ [mm]	dem Endpunkt des aktiven Zahnprofils zugehöriger Ritzel- bzw. Raddurchmesser
$e_{LM}$ [mm]	den Punkten $L$ und $M$ zugehörige Eingriffsstrecke
$f_1, f_2$ [mm]	Kopfhöhe des Ritzels bzw. des Rades
$f'_1, f'_2$	Kopfhöhenfaktor des Ritzels bzw. des Rades
$f'_0$	Kopfhöhenfaktor des Bezugsprofils
$f_{1M}$ [mm]	dem Radius $r_{1M}$ zugehörige Kopfhöhenstrecke des Ritzels
$f_{2L}$ [mm]	dem Radius $r_{2L}$ zugehörige Kopfhöhenstrecke des Rades
$h$ [mm]	Zahnhöhe
$h_k$ [mm]	Gemeinsame Zahnhöhe
$h_{LM} = f_{1M} + f_{2L}$ [mm]	den Radien $r_{1M}$ und $r_{2L}$ zugehörige gemeinsame Zahnhöhenstrecke
$k$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	zulässige Flankenpressung
$k_C, k_A, k_E$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	Flankenpressung in den Punkten $C, A, E$ mit Berücksichtigung des Beiwertes $G$
$m$ [mm]	Modul einer Geradverzahnung mit proportionalem Kopfspiel und gebundenem Bezugsprofil ( $\alpha_0 = 20^\circ, f'_0 = 1, c'_0 = 1/6$ )
$m_0$ [mm]	Modul einer Geradverzahnung mit frei gewähltem Bezugsprofil
$m_n$ [mm]	Modul des Normalschnittes bei Schrägverzahnung
$p_n$ [kp/cm]	theoretische Linienpressung
$q_2$	Verteilungsfaktor zur Bestimmung der Kopfhöhe beim Ausgleich des spezifischen Gleitens ( $f_2 = q_2 \cdot h_k$ )

Wegen des großen Umfanges des Artikels folgen die Beispiele aus der Praxis und einige umfangreiche mathematische Ableitungen sowie einige Berechnungsblätter im Anhang zu Teil II. Die Hinweise im Teil I auf Beispiele, Anhang und Berechnungsblätter sind also im II. Teil zu suchen.

$r$ [mm]	im allgemeinen: Radien
$r_{1M}$ [mm]	dem Punkte $M$ zugehöriger Radius des Ritzels
$r_{2L}$ [mm]	dem Punkte $L$ zugehöriger Radius des Rades
$s$ [mm]	im allgemeinen: Zahndicken (Index 1: Ritzel, Index 2: Rad)
$s_{01}, s_{02}$ [mm]	Zahndicke auf dem Teilkreis bei Geradverzahnung
$s_{0h1}, s_{0h2}$ [mm]	Zahndicke auf dem Teilkreis im Stirnschnitt bei Schrägverzahnung
$s_{f1}, s_{f2}$ [mm]	Zahnkopfdicke bei Geradverzahnung
$s_{fh1}, s_{fh2}$ [mm]	Zahnkopfdicke im Stirnschnitt bei Schrägverzahnung
$s_{fn1}, s_{fn2}$ [mm]	Zahnkopfdicke im Normalschnitt bei Schrägverzahnung
$t_a$ [mm]	Grundteilung
$u = z_2/z_1$	Zahnzahlverhältnis
$y$	Achsabrückungsfaktor
$x_1, x_2; \Sigma x = x_1 + x_2$	bei einer Geradverzahnung mit proportionalem
$z_1, z_2; \Sigma z = z_1 + z_2$	Kopfspiel und mit gebundenem Bezugsprofil
	( $\alpha_0 = 20^\circ$ ; $c'_0 = 1$ ; $c'_0 = 1/6$ )
$(x_1)_0, (x_2)_0; \Sigma x_0 = (x_1)_0 + (x_2)_0$	bei Geradverzahnung mit
$(z_1)_0, (z_2)_0; \Sigma z_0 = (z_1)_0 + (z_2)_0$	frei gewähltem Bezugsprofil
$(x_1)_\beta, (x_2)_\beta; \Sigma x_\beta = (x_1)_\beta + (x_2)_\beta$	bei Schrägverzahnung mit
$(z_1)_\beta, (z_2)_\beta; \Sigma z_\beta = (z_1)_\beta + (z_2)_\beta$	frei gewähltem Bezugsprofil
$A$	innerer Eingriffspunkt (Beginn des Eingriffs)
$B$	Anfangspunkt des Einzeleingriffs bei Geradverzahnung
$C$	Wälzpunkt
$D$	Endpunkt des Einzeleingriffs bei Geradverzahnung
$E$	äußerer Eingriffspunkt (Ende des Eingriffs)
$L$	zwischen $N_1$ und $C$ liegender Punkt auf der Eingriffslinie
$M$	zwischen $N_2$ und $C$ liegender Punkt auf der Eingriffslinie
$N_1, N_2$	Berührungspunkt der Eingriffslinie mit dem Grundkreis des Ritzels bzw. des Rades
$A_E$ [cm <sup>3</sup> ]	zusammengefaßter geometrischer Kennwert der Geradverzahnung
$A_F$ [cm <sup>3</sup> ]	zusammengefaßter geometrischer Kennwert der Schrägverzahnung
$E_A, E_L$	den Punkten $A$ bzw. $L$ zugehörige geometrische Kennwerte
$F_E, F_M$	den Punkten $E$ bzw. $M$ zugehörige geometrische Kennwerte
$F_n$ [kp]	theoretische Zahnnormalkraft in der Eingriffsebene rechtwinklig auf die Berührungslinie
$G$	zusammengefaßter Beiwert (mathematisch unabhängig von der Belastung und von der Lage der Eingriffspunkte auf der Eingriffslinie)
$M$ [cmkp]	zulässiges Drehmoment des Stirnradpaares auf der Welle des Ritzels auf Grund der zulässigen Flankenpressung
$\alpha_0$	Eingriffswinkel des Bezugsprofils ( $\alpha_0 = 20^\circ$ genormt)
$\alpha_{0n}$	Eingriffswinkel des Bezugsprofils (von $\alpha_0$ abweichend, ungenormt)
$\alpha_{0h}$	Eingriffswinkel am Teilkreis im Stirnschnitt bei Schrägverzahnung (gehört zu $\alpha_0$ )
$\alpha_{0nh}$	Eingriffswinkel am Teilkreis im Stirnschnitt bei Schrägverzahnung (gehört zu $\alpha_{0n}$ )
$\alpha_g$	Eingriffswinkel am Wälzkreis im Stirnschnitt (ist gleich dem Pressungswinkel am Wälzkreis)
$\alpha_{f1}, \alpha_{f2}$	Pressungswinkel am Kopfpunkt des Ritzels bzw. des Rades
$\beta_0$	Schrägungswinkel am Teilzylinder
$\beta_a$	Schrägungswinkel am Grundzylinder
$\beta_{f1}, \beta_{f2}$	Schrägungswinkel am Kopfzylinder des Ritzels bzw. des Rades
$\varepsilon$	Eingriffsdauer einer Geradverzahnung mit proportionalem Kopfspiel und mit gebundenem Bezugsprofil ( $\alpha_0 = 20^\circ$ ; $f'_0 = 1$ ; $c'_0 = 1/6$ )
$\varepsilon_0$	Eingriffsdauer einer Geradverzahnung mit frei gewähltem Bezugsprofil
$\varepsilon_h$	Eingriffsdauer der Schrägverzahnung im Stirnschnitt
$\varepsilon_{ax}$	Sprungüberdeckung der Schrägverzahnung
$\zeta_d$	dynamischer Beiwert
$z_0 = \frac{b_{a \min}}{b / \cos \beta_a}$	Quotient von $b_{a \min}$ und $b / \cos \beta_a$ bei Schrägverzahnung
$\xi_A, \xi_B, \xi_D, \xi_E, \xi_L, \xi_M$	Quotienten der Krümmungsradienprodukte im Wälzpunkt und in dem, dem Index zugeordneten Punkt. z. B. $\xi_A = \varrho_{1C} \cdot \varrho_{2C} / \varrho_{1A} \cdot \varrho_{2A}$
$\varrho$ [mm]	im allgemeinen: Krümmungsradius des Evolventenprofils. Erster Index 1 bzw. 2. Ritzel bzw. Rad; der zweite Index bedeutet den Punkt auf der Eingriffslinie z. B.: zum Punkt $A$ gehören $\varrho_{1A}$ und $\varrho_{2A}$
$\Phi = \frac{\text{inv } \alpha_g - \text{inv } 20^\circ}{\text{tg } 20^\circ}$	Involut-Bruchfunktion der Geradverzahnung $\alpha_0 = 20^\circ$

$$\Phi_0 = \frac{\text{inv } \alpha_g - \text{inv } \alpha_{0n}}{\text{tg } \alpha_{0n}} \text{ Involut-Bruchfunktion der Geradverzahnung } \alpha_{0n} \cong 20^\circ$$

$$\Phi_h = \frac{\text{inv } \alpha_g - \text{inv } \alpha_{0nh}}{\text{tg } \alpha_{0n}} \text{ Involut-Bruchfunktion der Schrägverzahnung } \alpha_{0n} \cong 20^\circ$$

$$\psi = \frac{\cos 20^\circ}{\cos \alpha_g} - 1 \text{ Cosinus-Bruchfunktion der Geradverzahnung } \alpha_0 = 20^\circ$$

$$\psi_0 = \frac{\cos \alpha_{0n}}{\cos \alpha_g} - 1 \text{ Cosinus-Bruchfunktion der Geradverzahnung } \alpha_{0n} \cong 20^\circ$$

$$\psi_h = \frac{\cos \alpha_{0nh}}{\cos \alpha_g} - 1 \text{ Cosinus-Bruchfunktion der Schrägverzahnung } \alpha_{0n} \cong 20^\circ$$

## 1. Einleitung

Die theoretischen Kenntnisse der allgemeinen Evolventenverzahnung haben den ungarischen Konstrukteuren wertvolle ungarische Quellenwerke zugänglich gemacht [1—4]. Die Erschließung des Themenkreises für ungarische Verhältnisse ist also ein Verdienst jener Autoren, die ihr Können durch opferbereite Arbeit unseren Fachkonstrukteuren in Form von Publikationen weitergegeben haben.

Aus der Erschließung des Themenkreises ging hervor, daß es für allgemeine Evolventenverzahnungen 5 geometrische Kennwerte gibt, die einerseits für die Festigkeitsuntersuchungen erforderlich sind, andererseits den richtigen Eingriff der Verzahnung gewährleisten. Bei Berechnungen müssen diese Kennwerte von Fall zu Fall bestimmt werden, was einen bedeutenden Zeitaufwand erfordert.

Ein einziger ungarischer Verfasser (BOTKA) hat im Jahre 1954 unter der Benennung »Verzahnungssystem von Botka« die erwähnten 5 Kennwerte für den gesamten Bereich der Geradverzahnung ausgearbeitet und in Profilbestimmungstabellen veröffentlicht. Die Tabellen wurden für den damaligen Kopfspielfaktor und den damaligen Kopfhöhenfaktor von  $c'_0 = 1/6$  bzw.  $f'_0 = 1$  dem Rechnungssystem mit proportionalem Kopfspiel entsprechend zusammengestellt. Diesen Tabellen ist es zu verdanken, daß die Festigkeitsuntersuchung beziehungsweise der Entwurf allgemeiner Evolventen-Geradverzahnungen für unsere Projektanten heute kein Problem darstellt, sondern überaus einfach und mit wenig Rechenarbeit ausgeführt werden kann.

Die erwähnten Profilbestimmungstabellen enthalten für verschiedene Zähnesummen in Abhängigkeit von unterschiedlichen Eingriffswinkeln und Zähnezahlverhältnissen folgende Angaben (auf 3 Dezimalstellen genau):

a)  $q_2 \dots$  Verteilungsfaktor der Kopfhöhe des Rades, bei welchem in den äußeren Eingriffspunkten kein Unterschied im spezifischen Gleiten besteht.

b)  $\varepsilon \dots$  die dem Wert  $q_2$  entsprechende Eingriffsdauer.

c)  $s_{f1}/m \dots$  die dem Wert  $q_2$  entsprechende spielfreie Zahnkopfdicke des Ritzels beim Modul = 1.

d)  $\xi_B$  ... ein dem Wert  $q_2$  entsprechender Beiwert, der zur Berechnung der im Anfangspunkt des Einzeleingriffs auftretenden Flankenpressung notwendig ist.

e) Kontrolle des Unterschnitts und der Interferenz (Eingriffsstörung), u. zw. derart, daß bei den in der Tabelle angegebenen Werten weder Unterschnitt noch Interferenz eintreten kann.

Bekanntlich ist von den erwähnten 5 Kennwerten außer dem Ausgleich des spezifischen Gleitens die Ermittlung der anderen 4 Größen auch nach sämtlichen ausländischen Berechnungsverfahren für die Projektierung der Verzahnung erforderlich. Die Forderung nach Ausgleich des spezifischen Gleitens in den äußeren Eingriffspunkten wird in Ungarn ziemlich verbreitet erhoben. Seine Vorteile in gewisser Beziehung sind allgemein bekannt, ebenso jedoch auch die Schwierigkeiten, die sich daraus ergeben, daß das Problem nicht in mathematisch geschlossener Form gelöst werden kann. Doch wäre es oberflächlich, zu meinen, das Beharren auf den Ausgleich des spezifischen Gleitens wäre eine ungarische Spezialität, weist doch auch das ausländische Schrifttum an vielen Stellen auf die Vorteile einer derartigen Verzahnung hin [5—8]. Die Entwicklungstendenz strebt zwecks maximaler Nutzung des Verzahnungsbereiches der Berücksichtigung möglichst vieler Veränderlicher und im Ausland auch den von  $20^\circ$  abweichenden Bezugsprofilen zu. In Ungarn konnte die allgemeine *Evolventen-Schrägverzahnung* mit dem genormten Bezugsprofil von  $\alpha_0 = 20^\circ$  deshalb nicht die erforderliche Verbreitung finden, weil der Entwurfsbearbeitung auch heute noch keine solche Möglichkeit zur Profilauswahl zur Verfügung steht, wie sie das von Botka ausgestaltete System für Geradverzahnungen bietet. Aus diesem Grunde stehen die Dinge heute so, daß die Konstrukteure von Fabriken, in denen Serienkonstruktionen nur selten vorkommen, lieber nur den Entwurf von Schrägverzahnungen  $\Sigma x_p = (x_1)_p + (x_2)_p = 0$  wählen und bei diesen das spezifische Gleiten auf Grund der Diker-Tabellen mit gewisser Annäherung ( $z' = z/\cos^3 \beta_0$ ) oder durch Probieren ausgleichen. In Fabriken, die die Möglichkeit haben, sich mit Serienkonstruktionen zu befassen, verursacht die Lösung der erwähnten Probleme durch die verfügbaren elektronischen Rechenzentren heute keinerlei Schwierigkeiten mehr. Mit der fortschreitenden industriellen Entwicklung fallen jedoch auch in diesen letzteren Betrieben zahlreiche überaus verschiedenartige Spezialverzahnungen bzw. -getriebe an, ganz zu schweigen vom Bedarf der verschiedenen Maschinenfabriken bzw. Entwurfsbüros an Entwürfen für die verschiedenartigsten Verzahnungen und Getriebe. Ein so differenzierter Bedarf ließe sich durch elektronische Rechenzentren nur dann befriedigen, wenn nahezu jede Fabrik bzw. jedes Entwurfsbüro über derartige Anlagen verfügen würde, was aber heute unter ungarischen Verhältnissen noch undenkbar ist. Zur Analyse des an Zahl der Veränderlichen erweiterten Verzahnungsbereichs ist also eine Lösung erforderlich, die einem weiten Kreis von Fachleuten

eine verhältnismäßig einfache Möglichkeit zur Untersuchung des Verzahnungsbereiches bzw. zu seiner zweckmäßigen Ausnützung bietet. Mit seiner vorliegenden Arbeit will Verfasser zur Erreichung dieses Zieles beitragen. Zu einem Teil dieser Publikation sei bemerkt, daß es Verfasser gelungen ist, für den Ausgleich des spezifischen Gleitens statt der bisher einzig möglichen stufenweisen Annäherung (Iteration oder graphisches Probieren) durch Zurückführung auf die Geradverzahnung eine Lösung in exakter und geschlossener Form zu finden.

### Das Wesen der Lösung

a) Zu jeder beliebigen, durch freie Parameter fixierten Evolventen-Außenverzahnung lassen sich mehrere (im Prinzip unendlich viele) *Außen-Geradverzahnungen* finden, die zwar in gewissen Parametern voneinander abweichen, deren Gleithyperbeln jedoch mit denjenigen der erwähnten, durch freie Parameter fixierten Verzahnung übereinstimmen. Hinsichtlich des spezifischen Gleitens sind diese Verzahnungen einander gleich bzw. gleichwertig, so daß sie im weiteren kurz als »gleichwertige Geradverzahnung« bezeichnet werden sollen.

b) Ist unter diesen »gleichwertigen Geradverzahnungen« *eine einzige bekannt*, die die Werte des Verteilungsfaktors ( $q_2$ ) in Abhängigkeit von der Zähnesumme ( $\Sigma z$ ), vom Eingriffswinkel ( $\alpha_g$ ) und vom Zähnezahlverhältnis ( $u$ ) für einen ganzen Verzahnungsbereich enthält, dann kann man für jede der hier von abweichenden Evolventen-Außenverzahnungen eine Zähnesumme ( $\Sigma z$ ) finden, bei der — und bei gegebenem  $\alpha_g$  und  $u$  — die Gleithyperbeln mit denjenigen der bekannten Geradverzahnung identisch sind. Kurz bedeutet dies, daß diese Größen wegen der Identität der  $q_2$ -Werte aus den bekannten Profilbestimmungstabellen für die Geradverzahnung bzw. aus der auf ihrer Grundlage aufgetragenen Kurvenschar abgelesen werden können.

c) Da unter ungarischen Verhältnissen die Geradverzahnung mit *proportionalem Kopfspiel*, charakterisiert durch ein Bezugsprofil mit  $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $f'_0 = 1$ ,  $c'_0 = 1/6$ , diejenige unter den Verzahnungen dieser Art ist, deren  $q_2$ -Werte für einen Verzahnungsbereich bekannt sind, kann sie für das neue Verfahren als Bezugsverzahnung bzw. hinsichtlich des spezifischen Gleitens als »gleichwertige Geradverzahnung« betrachtet werden.

d) Zu bemerken ist, daß die Profilbestimmungstabellen für die unter c) charakterisierte Geradverzahnung von dem bereits erwähnten ungarischen Autor stammen. In Weiterentwicklung dieser Arbeit hat Verfasser die Tabellen durch Berechnung der für die Schrägverzahnung erforderlichen  $\xi_A$ -Beiwerte sowie durch allgemeine Ausweitung des Eingriffswinkelbereichs bis zu einem  $\alpha_g = 30^\circ$  ergänzt. Die so aufgetragene Kurvenschar für die vollständige Profilbestimmung wurde in allen Punkten mit der elektronischen Rechen-

maschine überprüft und auf dieser Grundlage aufgetragen; die Einzelheiten bezüglich  $\Sigma z = 120$  und  $\Sigma z = 150$  sind am Ende des Artikels zu finden.

e) Da für die Bestimmung des Verteilungsfaktors  $q_2$  außer der Kurvenschar keinerlei andere mathematische Hilfsmittel erforderlich sind, kann diese Lösung im gleichen Sinne als in der Form geschlossen angesehen werden wie jede mathematische Lösung, die die Benützung trigonometrischer Tabellen oder der entsprechend aufgetragenen Kurvenscharen als Hilfsmittel erfordert.

In Abschnitt 2 wird in erster Linie durch Analyse der in geschlossener Form unlösbaren Gleichung die Möglichkeit der Rückführung auf die Geradverzahnung mathematisch bewiesen und überdies auf den Zusammenhang der Geradverzahnung mit jeder beliebigen Schrägverzahnung hingewiesen. Im Anhang hingegen finden sich Hinweise auf einige in geschlossener Form lösbare Fragen des spezifischen Gleitens (siehe Punkt 1. des Anhangs).

## 2. Bestimmung des gleichen spezifischen Gleitens in den inneren und äußeren Eingriffspunkten der der frei gewählten gemeinsamen Zahnhöhenstrecke zugehörigen Kreise

Unter frei gewählter gemeinsamer Zahnhöhenstrecke ist eigentlich ein reduzierter gemeinsamer Zahnhöhenwert zu verstehen ( $h_{LM}$  s. Abb. 1), deren durch  $f_{2L}$  fixierter Lage die in Abhängigkeit von  $f_{2L}$  bzw.  $q_2 \cdot h_{LM}$  bestimmten Kreise  $r_{2L}$  und  $r_{1M}$  zugeordnet sind. Im allgemeinen müssen diese Kreise ( $r_{2L}$ ,  $r_{1M}$ ) keine Kopfkreise sein.

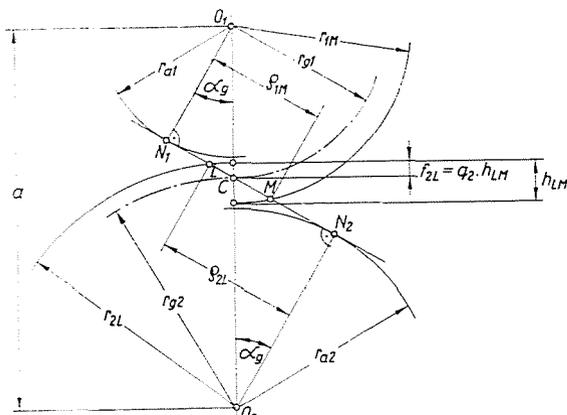


Abb. 1

Die allgemein bekannten Ausdrücke für diese Kreise sowie für die Grundkreise sind:

$$r_{2L} = r_{g2} + q_2 \cdot h_{LM} = \frac{a \cdot u}{1 + u} + q_2 \cdot h_{LM}; \quad r_{a2} = r_{g2} \cdot \cos \alpha_g = \frac{a \cdot u}{1 + u} \cos \alpha_g.$$

Aus diesen hat man

$$r_{2L}/a = \frac{u}{1 + u} + q_2 \cdot h_{LM}/a \quad \text{und} \quad r_{a2}/a = \frac{u \cdot \cos \alpha_g}{1 + u}$$

und in analoger Weise

$$r_{1M}/a = \frac{1}{1 + u} + (1 - q_2) \cdot \frac{h_{LM}}{a} \quad \text{und} \quad r_{a1}/a = \frac{\cos \alpha_g}{1 + u}.$$

Den Punkten  $L$  und  $M$  sind folgende Krümmungshalbmesser zugeordnet:

$$\varrho_{2L} = \sqrt{r_{2L}^2 - r_{a2}^2}; \quad \varrho_{1M} = \sqrt{r_{1M}^2 - r_{a1}^2}.$$

Aus diesen wird

$$\varrho_{2L}/a = \sqrt{\left(\frac{r_{2L}}{a}\right)^2 - \left(\frac{r_{a2}}{a}\right)^2} \quad \text{und} \quad \varrho_{1M}/a = \sqrt{\left(\frac{r_{1M}}{a}\right)^2 - \left(\frac{r_{a1}}{a}\right)^2}$$

und mit den vorhergehenden Ausdrücken

$$\varrho_{2L}/a = \sqrt{\left(\frac{u}{1 + u} + q_2 \cdot \frac{h_{LM}}{a}\right)^2 - \left(\frac{u \cdot \cos \alpha_g}{1 + u}\right)^2}$$

$$\varrho_{1M}/a = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + u} + (1 - q_2) \cdot \frac{h_{LM}}{a}\right)^2 - \left(\frac{\cos \alpha_g}{1 + u}\right)^2}.$$

Die Hyperbelordinaten in den Punkten  $L$  und  $M$  (s. Anhang A1 und A2) schreiben sich im Punkt  $L$  zu

$$1 + \eta_L = \frac{1}{u \cdot \left[ \frac{\sin \alpha_g}{\varrho_{2L}/a} - 1 \right]}$$

im Punkt  $M$  zu

$$1 + \eta_M = \frac{u}{\frac{\sin \alpha_g}{\varrho_{1M}/a} - 1}.$$

Kann die vorweg gegebene Länge  $h_{LM}$  auf der Geraden  $\overline{O_1O_2}$  derart abtragen, daß die den Punkten  $L$  und  $M$  zugehörigen Hyperbelordinaten gleich sind, so bedeutet dies mathematisch nichts anders als die Lösung der Gleichung

$1 + \eta_L = 1 + \eta_M$   
 nach irgendeiner Unbekannten.

$$u \cdot \frac{1}{\left[ \frac{\sin \alpha_g}{\sqrt{\left( \frac{u}{1+u} + q_2 \cdot \frac{h_{LM}}{a} \right)^2 - \left( \frac{u \cdot \cos \alpha_g}{1+u} \right)^2}} - 1 \right]} = \frac{u}{\frac{\sin \alpha_g}{\sqrt{\left( \frac{1}{1+u} + (1-q_2) \cdot \frac{h_{LM}}{a} \right)^2 - \left( \frac{\cos \alpha_g}{1+u} \right)^2}} - 1} \quad (1)$$

(das diesbezügliche graphische Verfahren mit stufenweiser Annäherung stammt von Vörös). Die Gl. (1) kann — den Fall  $u = 1$  ausgenommen — nach keiner der in ihr enthaltenen Veränderlichen in geschlossener Form gelöst werden.

Für  $q_2$  ergibt sie eine algebraische Gleichung achten Grades in der Form  $a_8 q_2^8 + a_7 q_2^7 + \dots + a_1 q_2 + a_0 = 0$ .

Wie ersichtlich, ist diese Gleichung für gegebene Werte

$$u = \frac{z_2}{z_1}, \quad \alpha_g \quad \text{und} \quad \frac{h_{LM}}{a}$$

ausschließlich eine Funktion von  $q_2$ . Die Frage, ob es sich um eine Geradverzahnung oder eine Schrägverzahnung handelt, welcher Kopfspliefaktor  $c'_0$ , welcher Kopfhöhenfaktor  $f'_0$ , welcher Bezugsprofilwinkel  $\alpha_{0n}$  zu berücksichtigen ist und ob ein Berechnungssystem mit konstantem oder proportionalem Kopfsplief am Platz ist, wird ausschließlich durch den Quotienten

$$\left( \frac{h_{LM}}{a} \right)$$

beantwortet. Die Kurvenschar für die Profilbestimmung gibt die Lösung dieser Gleichung für den Wert  $q_2$  im ganzen Verzahnungsbereich bei  $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $c'_0 = 1/6$  und  $f'_0 = 1$ , für *Geradverzahnung mit proportionalem Kopfsplief* an. Berechnet man also mit obigen Ausgangsdaten  $u$ ,  $\alpha_g$ ,  $f'_0$  z. B. den Wert

$$\frac{h_k}{a}$$

für eine *Schrägverzahnung* mit allgemeinem Bezugsprofil  $\alpha_{0n}$  und wünscht man, z. B. auf Kreisen, die einem Wert von

$$\frac{h_{LM}}{a} \leq \frac{h_k}{a}$$

entsprechen, für das spezifische Gleiten gleiche Werte zu erhalten, braucht man nichts anderes zu tun, als jene Zähnesumme ( $\Sigma z$ ) zu bestimmen, bei der die zuvor gekennzeichnete *Geradverzahnung einen Wert*

$$\frac{h_{LM}}{a}$$

hat, der gleich dem vorweg bestimmten Wert

$$\frac{h_{LM}}{a}$$

für die gesuchte *allgemeine Schrägverzahnung* ist, weil bei diesem die für die Zähnesumme der im vorhinein berechenbaren Geradverzahnung und für die gegebenen  $\alpha_g$  und  $u$  ablesbaren  $q_2$ -Werte identisch sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet aus Gl. (1) ohne weiteres ein.

Die Geradverzahnung mit der so berechneten Zähnesumme ist hinsichtlich des spezifischen Gleitens mit der allgemeinen Schrägverzahnung gleichwertig (ihre Hyperbeln kongruieren). Für ein gegebenes

$$\frac{h_{LM}}{a}$$

kann also die Zähnesumme der »gleichwertigen Geradverzahnung« (auf Grund des Ausdrucks A. 16 des Anhangs) aus der Gleichung

$$\frac{1}{1 + \psi} \left[ \frac{4}{\Sigma z} - \frac{6}{7} (\Phi - \psi) \right] = \frac{h_{LM}}{a}$$

berechnet werden, aus der sich  $\Sigma z$  nach einer mit Rücksicht auf die kleineren Werte von  $h_{LM}/a$  rechnungstechnisch zweckmäßigen Umgestaltung zu

$$\Sigma z = \frac{700}{150 (\Phi - \psi) + 1,75 (1 + \psi) \frac{h_{LM}}{0,01 a}} \quad (2)$$

errechnet. Hierin sind

$$\Phi = \frac{\text{inv } \alpha_g - \text{inv } 20^\circ}{\text{tg } 20^\circ}; \quad 1 + \psi = \frac{\cos 20^\circ}{\cos \alpha_g},$$

während  $\Sigma z$  die Zähnesumme der »gleichwertigen Geradverzahnung«,  $h_{LM}$  hingegen der im gegebenen Fall im voraus berechenbare Wert  $h_{LM} \leq h_k$  ist,

der bei der allgemeinen Schrägverzahnung dann in Frage kommt, wenn die Gleichheit der spezifischen Gleitungen nicht an den Kopfkreisen, sondern innerhalb dieser auf den dem  $h_{LM}$  entsprechenden Kreisen  $r_{2L}$  und  $r_{1M}$  bestehen soll (z. B. bei Profilrücknahme).

Die durch die Kopfkreise bestimmten Eingriffspunkte ergeben bei gleichen Werten für das spezifische Gleiten

$$\Sigma z = \frac{700}{150(\Phi - \psi) + 1,75(1 + \psi) \frac{h_k}{0,01 a}} \quad (3)$$

In diesem Falle kann der Wert  $h_k/a$  bei der allgemeinen Schrägverzahnung sowohl für das konstante als auch für das proportionale Kopfspiel eindeutig berechnet werden (siehe Anhang, A 10, A 11). Im überwiegenden Teil der Fälle kommt die Gl. (3) vor, die sich von Gl. (2) im Prinzip nicht unterscheidet; eine Unterscheidung wurde lediglich wegen der in Ungarn genormten Bezeichnung für die gemeinsame Zahnhöhe gemacht.

Die obigen Gleichungen bieten, wie man sieht, eine ganz allgemeine und einfache Lösung für die Zähnesumme der stets berechenbaren gleichwertigen Geradverzahnung, benötigt man doch für die Ermittlung des  $\Sigma z$  ausschließlich die Werte  $\Phi$  und  $1 + \psi$  oder  $\psi$ , die entweder berechnet oder unmittelbar aus den Tabellen für  $\Phi$  und  $\psi$  abgelesen werden können. Den Wert  $h_k$  muß die geometrische Berechnung auch unabhängig hiervon enthalten!

Die Gl. (1) erbrachte den mathematischen Beweis für die Möglichkeit der Zurückführung auf die Geradverzahnung. Sie kann aber anschaulich auch durch die Tatsache bewiesen werden, daß die zwei Arten der Verzahnungen gleiche Eingriffswinkel ( $\alpha_g$ ), Zähnezahverhältnisse ( $u$ ), Achsabstände ( $a$ ), Wälzkreise ( $r_g$ ), Grundkreise ( $r_a$ ) haben und da auch ihre Zahnhöhen ( $h_k$ ) gleich sind, müssen auch die Kopfkreise und in weiterer Folge auch die spezifischen Gleitungen und somit auch die Werte  $q_2$  gleich sein. Dagegen sind die Moduln der Normalschnitte für die beiden Verzahnungen nicht dieselben, worauf noch zurückzukommen sein wird.

Die Gl. (3) läßt sich für eventuelle analytische Untersuchungen auch in einer allgemeinen Form schreiben, die nur die Veränderlichen enthält, wenn der Wert  $h_k/a$  eingesetzt wird.

Bei ganz beliebigen Werten  $\Sigma z_\beta$ ,  $\alpha_{0n}$ ,  $\beta'_0$ ,  $\alpha_g$ ,  $f'_0$ ,  $c'_0$  und bei proportionalem Kopfspiel gilt

$$\frac{h_k}{a} = \frac{\cos \beta_0}{1 + \psi_h} \left[ \frac{4 \cdot f'_0}{\Sigma z_\beta} - \frac{f'_0}{f'_0 + c'_0} \left( \Phi_n - \frac{\psi_h}{\cos \beta_0} \right) \right]$$

(siehe Gleichung A 11 im Anhang) und

$$\Sigma z = \frac{700}{100(\Phi - \psi) + \frac{1 + \psi}{1 + \psi_h} \cdot \cos \beta_0 \left[ \frac{700 \cdot f'_0}{\Sigma z_\beta} - \frac{175 \cdot f'_0}{f'_0 + c'_0} \left( \Phi_h - \frac{\psi_h}{\cos \beta_0} \right) \right]} \quad (4)$$

Da der Wert  $h_k/a$  bei konstantem Kopfspiel und bei  $c'_0 = 0$  dem Wert  $h_k/a$  für das proportionale Kopfspiel gleich ist (siehe Anhang, Gleichungen A 10, A 11), nimmt die Gl. (4) für das Berechnungssystem mit konstantem Kopfspiel die Form

$$\Sigma z = \frac{700}{150(\Phi - \psi) + \frac{1 + \psi}{1 + \psi_h} \cos \beta_0 \left[ \frac{700 f'_0}{\Sigma z_\beta} - 175 \left( \Phi_h - \frac{\psi_h}{\cos \beta_0} \right) \right]} \quad (5)$$

an. Hieraus ist ersichtlich, daß die Funktion  $\Sigma z$  bei konstantem Kopfspiel 5 unabhängige Veränderliche ( $\alpha_{0n}, \alpha_g, \beta_0, f'_0, \Sigma z_\beta$ ) hat, was 5 Parameter-Kurvenscharen entspricht. Die Gleichung kann in geschlossener Form nur nach  $f'_0$  gelöst werden und ebenso für ganzzahlige Zähnesummen  $\Sigma z$  und  $\Sigma z_\beta$  bei frei gewählten Werten  $\alpha_{0n}, \alpha_g, \beta_0$ .

Mit schrittweiser Näherung (also nicht in geschlossener Form) kann aber die Gleichung z. B. auch bei im vorhinein fixiertem  $f'_0$  und bei ebenfalls ganzzahligem  $\Sigma z, \Sigma z_\beta$  gelöst werden, u. zw. nach jeder der restlichen Veränderlichen ( $\alpha_g, \alpha_{0n}, \beta_0$ ). Diesem Umstand kommt keine besondere praktische Bedeutung zu, er wird unter Hinweis auf das Beispiel I eher als interessant erwähnt.

Die Gleichungen (4) und (5) bieten außerdem die Möglichkeit, zu untersuchen, wie sich die Werte  $q_2, \varepsilon$  der Profilbestimmungs-Kurvenschar bei einer Geradverzahnung ändern, die sich nur im  $c'_0$  und darin unterscheidet, daß statt des proportionalen ein konstantes Kopfspiel angenommen wird.

Wird die Gl. (4) auf eine Geradverzahnung angewendet, deren Kennwerte mit der Verzahnung der Profilbestimmungs-Kurvenschar völlig übereinstimmen, d. h. bei  $\alpha_{0n} = \alpha_0 = 20^\circ, c'_0 = 1/6, f'_0 = 1$  und bei proportionalem Kopfspiel, dann erhält man nach Einsetzen der Werte

$$\frac{175 f'_0}{f'_0 + c'_0} = 150; \Phi_h = \Phi; \psi_h = \psi; \beta_0 = 0, \text{ d. h. } \cos \beta_0 = 1$$

als Ergebnis

$$\Sigma z = \frac{700}{700/\Sigma z_0} = \Sigma z_0.$$

Für eine Geradverzahnung, bei der bei *proportionalem Kopfspiel*

$$\alpha_{0n} = \alpha_0 = 20^\circ; c'_0 = 0,25; f'_0 = 1,$$

hat man nach analogen Substitutionen

$$\frac{175}{1 + c'_0} = 140.$$

Somit wird gemäß Gl. (4)

$$\Sigma z = \frac{700}{\frac{700}{\Sigma z_0} + 10(\Phi - \psi)} = \frac{\Sigma z_0}{1 + \frac{(\Phi - \psi)\Sigma z_0}{70}}. \quad (6)$$

Für eine Geradverzahnung, bei der bei *konstantem Kopfspiel*  $\alpha_{0n} = \alpha_0 = 20^\circ$ ;  $c'_0 = 0,25$ ;  $f'_0 = 1$  (wie zuvor), hat man wie vorher gemäß Gl. (5)

$$\Sigma z = \frac{700}{\frac{700}{\Sigma z_0} - 25(\Phi - \psi)} = \frac{\Sigma z_0}{1 - \frac{(\Phi - \psi)\Sigma z_0}{28}}. \quad (7)$$

Zu bemerken ist, daß die Funktion

$$\Phi - \psi \text{ bzw. } \Phi_h - \frac{\psi_h}{\cos \beta_0},$$

wie sich nach eingehender Analyse gezeigt hat, ein Maximum, eine Inflexion und ein Minimum hat, daß sie aber innerhalb der Grenzen  $0^\circ \leq \alpha_g \leq 90^\circ$  bei keinem in Frage kommenden Schrägungswinkel ( $\beta_0$ ) negative Werte annehmen kann, daß also

$$\Phi - \psi \geq 0 \text{ und } \Phi_h - \frac{\psi_h}{\cos \beta_0} \geq 0$$

gilt.

Der Beweis soll hier umgangen werden. Zur Veranschaulichung der geringen Unterschiede soll nun z. B. eine genormte Geradverzahnung bei konstantem Kopfspiel und für folgende Ausgangsgrößen untersucht werden.

$$\alpha_{0n} = \alpha_0 = 20^\circ; \quad c'_0 = 0,25; \quad f'_0 = 1; \quad \Sigma z_0 = 120; \quad \alpha_g = 25^\circ$$

$$u = \frac{(z_2)_0}{(z_1)_0} = \frac{86}{34} \cong 2,53; \quad u = \frac{96}{24} = 4; \quad u = \frac{103}{17} \cong 6,06.$$

Bei  $\alpha_g = 25^\circ$  und  $\alpha_0 = 20^\circ$  ist  $\Phi - \psi = 0,004571153$ . Gemäß Gl. (7) ist:

$$\Sigma z = \frac{\Sigma z_0}{0,980409345} = 122,39785.$$

Das berechnete  $\Sigma z$  liegt in der Kurvenschar für Profilbestimmung zwischen den Grenzen  $120 < \Sigma z < 150$ , so daß die Werte  $q_2$  sowie  $\varepsilon$  auf Grund des beschriebenen Verfahrens durch Interpolation zwischen den Zähnesummen bestimmt werden können. Der Wert  $q_2$  für die gesuchte Geradverzahnung  $\Sigma z_0 = 120$  ist gleich dem aus der Kurvenschar für die gleichwertige Verzahnung  $\Sigma z = 122,39785$  abgelesenen Wert, die Eingriffsdauer hingegen gleich dem Wert

$$\varepsilon_0 = \varepsilon \frac{\Sigma z_0}{\Sigma z},$$

wie dies im Abschnitt über die Eingriffsdauer nachgewiesen werden wird.

Tabelle 1

Zähnezahlverhältnis $u$		86/34 $\cong$ 2,53	96/24 = 4	103/17 $\cong$ 6,06
für die Zähnesummen 150 und 120 aus der Kurvenschar für Profilbestimmung abgelesene Werte	$10^3(q_2)_{150}$	456,5	425	387
	$10^3(q_2)_{120}$	445	406	361
	$10^3(\varepsilon)_{120}$	1314	1284	1240
	$10^3(\varepsilon)_{150}$	1288	1267	1232
durch Interpolation berechnete Werte	$10^3 q_2$	445,919	407,519	363,078
	$10^3 \varepsilon$	1311,922	1282,641	1,239361
berechnete Endergebnisse	$q_2$	0,4459	0,4075	0,3631
	$\varepsilon_0 = \varepsilon \Sigma z_0 / \Sigma z$	1,2862	1,2575	1,2151
Ergebnisse des elektronischen Rechenzentrums	$q_2$	0,4456	0,4078	0,3637
	$\varepsilon_0$	1,2866	1,2579	1,2163

Die Berechnung erfolgte mit einer elektrischen Rechenmaschine, die bei Multiplikationen höchstens 16stellige, bei Divisionen höchstens 8stellige Ergebnisse liefert.

Die Tabelle 1 gibt eine Zusammenfassung der interpolierten Ergebnisse sowie der im elektronischen Rechenzentrum bestimmten genaueren Ergebnisse.

Die Tabellenwerte wurden nach der Interpolationsgleichung

$$10^3 q_2 = 10^3 (q_2)_{120} + \frac{10^3 (q_2)_{150} - 10^3 (q_2)_{120}}{30} \cdot \Delta(\Sigma z)$$

$$10^3 \varepsilon = 10^3 (\varepsilon)_{120} - \frac{10^3 (\varepsilon)_{120} - 10^3 (\varepsilon)_{150}}{30} \cdot \Delta(\Sigma z)$$

berechnet, worin  $\Delta(\Sigma z) = 2,39785$ .

Nach dem interpolierten  $\varepsilon$ -Wert ist das Endergebnis für die Eingriffsdauer

$$\varepsilon_0 = \varepsilon \frac{\Sigma(z)_0}{\Sigma z} = 0,98040934 \varepsilon .$$

Die Tabelle 1 gibt die berechneten Endergebnisse für  $q_2$  und  $\varepsilon_0$  sowie die auf 4 Dezimalstellen genauen Endergebnisse der Berechnungen im elektronischen Rechenzentrum an.

Wie aus der Tabelle ersichtlich, sind die berechneten Ergebnisse in praktisch einwandfreier Übereinstimmung mit den elektronisch berechneten sehr genauen Ergebnissen. Aus der Tabelle geht aber auch hervor, daß der Unterschied gegenüber den Werten der ursprünglichen Kurvenschar für die Profilbestimmung mit steigendem Zähnezahilverhältnis wächst, und dies besonders bei der Eingriffsdauer, obwohl zwischen den beiden Verzahnungen nur im  $c'_0$  und im proportionalen bzw. konstanten Kopfspiel eine Abweichung besteht. Die Zunahme des vom Zähnezahilverhältnis abhängigen Unterschieds ist natürlich, da der Wert  $q_2$  bei  $u = 1$  von allem anderen unabhängig 0,5 beträgt. Dies leuchtet aus Gl. (14) und auch unmittelbar aus den Gleichungen (10) und (11) ein.

### 2.1. Geeignete Gleichungsformen für die Prüfung der Zahlenwerte des spezifischen Gleitens

Nach Multiplikation beider Seiten der Wurzelausdrücke  $q_{2L}/a$  und  $q_{1M}/a$ , (siehe Abschnitt 2) mit  $(1 + u)$  werden zunächst folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$(1 + u) \frac{q_{2L}}{a} = \sqrt{\left[ u + (1 + u) \frac{h_{LM}}{a} q_2 \right]^2 - (u \cdot \cos \alpha_g)^2} = \sqrt{E_L},$$

$$(1 + u) \frac{q_{1M}}{a} = \sqrt{\left[ 1 + (1 + u) \frac{h_{LM}}{a} (1 - q_2) \right]^2 - \cos^2 \alpha_g} = \sqrt{F_M},$$

$$q_{2L} = \frac{a}{1 + u} \sqrt{E_L} = r_{g1} \sqrt{E_L}, \quad (8)$$

$$q_{1M} = \frac{a}{1 + u} \cdot \sqrt{F_M} = r_{g1} \sqrt{F_M}, \quad (9)$$

$$E_L = \left[ u + (1 + u) \frac{h_{LM}}{a} q_2 \right]^2 - (u \cdot \cos \alpha_g)^2 = \left( \frac{d_{2L}}{d_{g1}} \right)^2 - (u \cdot \cos \alpha_g)^2, \quad (10)$$

$$F_M = \left[ 1 + (1 + u) \frac{h_{LM}}{a} (1 - q_2) \right]^2 - \cos^2 \alpha_g = \left( \frac{d_{1M}}{d_{g1}} \right)^2 - \cos^2 \alpha_g. \quad (11)$$

Für nicht ganzzahlige Zähnezahlverhältnisse eignen sich dagegen die Formen

$$E_L = \frac{\left[ (z_2)_\beta + \Sigma z_\beta \frac{h_{LM}}{a} \cdot q_2 \right]^2 - [(z_2)_\beta \cdot \cos \alpha_g]^2}{(z_1)_\beta^2}, \quad (12)$$

$$F_M = \left[ 1 + \frac{\Sigma z_\beta \frac{h_{LM}}{a} \cdot (1 - q_2)}{(z_1)_\beta} \right]^2 - \cos^2 \alpha_g. \quad (13)$$

Natürlich gelten die Gleichungen (10)–(13) auch für die Eingriffspunkte des Kopfkreises und für die Geradverzahnung, doch ändern sich dann die Bezeichnungen wie folgt:

$$h_{LM} = h_k; r_{2L} = r_{f2}; r_{1M} = r_{f1}; E_L = E_A; F_M = F_E.$$

Bei Geradverzahnung können überdies die Bezeichnungen  $\Sigma z_\beta = \Sigma z_0; (z_1)_\beta = (z_1)_0; (z_2)_\beta = (z_2)_0$  benützt werden.

$E_L$  ist also ein nur von  $u, q_2, h_{LM}/a$  und  $\alpha_g$  abhängiger Wert und die Kenngröße für einen Punkt, der auf der Eingriffslinie zwischen  $C$  und  $N_1$  liegt (Abb. 1). Die Größe  $F_M$  ist ebenfalls von den vorerwähnten Veränderlichen abhängig und kennzeichnet einen Punkt, der auf der Eingriffslinie zwischen  $C$  und  $N_2$  liegt (Abb. 1).

Mit den so bestimmten Werten für  $\sqrt{E_L}$  und  $\sqrt{F_M}$  bzw.  $E_L$  und  $F_M$  können die Krümmungsradien der Profile von Zahnrad und Ritzel in den Punkten  $L$  und  $M$  aus den Gleichungen (8) und (9) einfach berechnet werden. Außerdem lassen sich, wie in den folgenden Abschnitten noch zu zeigen sein wird, mit den bekannten  $E_L$  und  $F_M$  sehr einfach und allgemeingültig auch die für die Berechnung der Eingriffsdauer im Stirnschnitt ( $\epsilon_h$ ) sowie der Flankenpressung in den Punkten  $L$  und  $M$  erforderlichen geometrischen Kennwerte  $\xi_L$  und  $\xi_M$  ermitteln.

Nach diesen Einführungen können die Ordinaten der Hyperbel des spezifischen Gleitens (auf Grund der Gleichungen A.1 und A.2 im Anhang) in folgender Form geschrieben werden:

in Punkt  $L$

in Punkt  $M$

$$1 + \eta_L = \frac{1}{u \cdot \left[ \frac{(1 + u) \sin \alpha_g}{\sqrt{E_L}} - 1 \right]} \quad (14)$$

$$1 + \eta_M = \frac{u}{(1 + u) \sin \alpha_g - \sqrt{F_M}} \quad (15)$$

2.2. Geeignete Gleichungsformen  
für die Prüfung der Genauigkeit des spezifischen Gleitens

Nach Gleichstellung und Ordnen der Gleichungen (14) und (15) ist die Gleichung (1) in geschlossener Form nicht, bzw. nur bei  $u = 1$  lösbar. Sie läßt sich in der Form

$$\sqrt{E_L} \left[ \frac{1}{\sqrt{F_M}} + \frac{u-1}{\sin \alpha_g} \right] - u^2 = 0 \quad (16)$$

schreiben. Nach Eliminierung der Wurzeln hat man

$$\left[ \frac{u^4 - E_L/F_M}{\frac{u-1}{\sin \alpha_g}} + \frac{u-1}{\sin \alpha_g} \cdot E_L \right]^2 - 4 \cdot u^4 \cdot E_L = 0. \quad (17)$$

*Einfluß des  $q_2$  auf die Gleichungen (14), (15), (16) und (17)  
in der Umgebung des genauen Wertes*

Wenn  $q_2$  wächst, wird gemäß Gleichung (14) auch der Wert  $1 + \eta_L$  steigen!  
Wenn  $q_2$  wächst, wird gemäß Gleichung (15) der Wert  $1 + \eta_M$  sinken!  
Wenn  $q_2$  wächst, dann sinken die Funktionswerte der Gleichungen (16) und (17).

Will man nur die Genauigkeit des Ausgleichs des spezifischen Gleitens prüfen, rechnet man mit Vorteil auf Grund der Gleichungen (16) und (17), wird dagegen auch der tatsächliche Wert des spezifischen Gleitens gesucht, bedient man sich vorteilhaft der Gleichungen (14) und (15).

Besonders gut eignet sich für die Prüfung der Genauigkeit des Ausgleichs die wurzelfreie Form von (17), weil sie die Abweichung des  $f(q_2)$  von Null überaus »lebhaft« zeigt. Dies veranschaulicht auch das folgende Beispiel: Die Kurvenschar in Abschn. 9 zeigt bei  $\Sigma z = 120$ ,  $u = 103/17 = 6,0588235$  und  $\alpha_g = 25^\circ$  einen Wert von  $q_2 = 0,361$ . Berechnet man die Kenngrößen  $E$  und  $F$  in Gleichung (17) mit dem zuvor ermittelten Wert von  $h_k/a$ , dann erhält man anhand der Gleichung (17) statt des  $f(q_2) = 0$  folgende Werte  $f(q_2)$ :

$$\begin{aligned} \text{bei } q_2 = 0,361 \quad f(q_2) &= 0,67994, \\ \text{bei } q_2 = 0,3613 \quad f(q_2) &= 0,01875, \\ \text{bei } q_2 = 0,3614 \quad f(q_2) &= -0,20461. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß der genauere Wert  $0,3613 < q_2 < 0,3614$  ist, daß also die Kurvenschar mit dem Wert  $q_2 = 0,361$  auf 3 Dezimalstellen genau ist.

Auf dieser Grundlage kann also die Genauigkeit der Werte  $q_2$  aus der Kurvenschar für die Profilbestimmung mit jeder der Gleichungen (14)–(17)

geprüft werden [besonders gut mit Gl. (17)]. In diesen Formeln beziehen sich die Kenngrößen  $E$  und  $F$  auf die äußeren Eingriffspunkte ( $A$  und  $E$ ), so daß hier  $E_L = E_A$  und  $F_M = F_E$  gesetzt werden kann. Hingegen ist in diesem Fall  $h_{LM} = h_{AE} = h_k$  die gemeinsame Zahnhöhe bei  $c'_0 = 1/6$ ;  $f'_0 = 1$  und bei proportionalem Kopfspiel.

Für derartige Prüfungen der Kurvenschergenauigkeit wird zweckmäßig die für ziffernmäßige Berechnungen geeignete Form der Funktion  $h_k/a$  verwendet (Ableitung siehe bei Gleichung A.17 im Anhang):

$$100 \frac{h_k}{a} = 85,714286 - \left[ f(\text{inv } \alpha_g) - \frac{425,67112}{\Sigma z} \right] \cdot \cos \alpha_g, \quad (18)$$

worin  $f(\text{inv } \alpha_g) = 87,480025 + 2,5061183(100 \text{ inv } \alpha_g)$ .

### 3. Allgemeine Gleichung der Eingriffsdauer

Gültig für Verzahnungen, bei denen die Eingriffslänge (der tatsächlich ausgenutzte Teil der Eingriffslinie) durch die Kopfkreise begrenzt ist.

Die allgemein bekannte Form der Gleichung für die Stirneingriffsdauer der allgemeinen Schrägverzahnung lautet:

$$\frac{\frac{\varrho_{1E} + \varrho_{2A} - a \sin \alpha_g}{m_n \pi \cos \alpha_{0nh}}}{\cos \beta_0} = \frac{a}{m_n} \cdot \frac{\cos \beta_0}{\pi \cos \alpha_{0nh}} \left[ \frac{\varrho_{1E}}{a} + \frac{\varrho_{2A}}{a} - \sin \alpha_g \right].$$

Mit den in Punkt 2.1 des Anhangs abgeleiteten Werten

$$\frac{a}{m_n} = \frac{\Sigma z_\beta}{2 \cos \beta_0} \cdot \frac{\cos \alpha_{0nh}}{\cos \alpha_g} \quad \text{und} \quad \Sigma z_\beta = (1 + u) \cdot (z_1)_\beta$$

erhält die Gleichung für  $\varepsilon_h$  die Form

$$\varepsilon_h = \frac{(z_1)_\beta \cdot [(1 + u) \cdot (\varrho_{1E}/a) + (1 + u) \cdot (\varrho_{2A}/a) - (1 + u) \cdot \sin \alpha_g]}{2 \pi \cos \alpha_g}.$$

Führt man in diese Gleichung auf Grund der Gleichungen (8) und (9) die den Kopfkreispunkten entsprechenden Werte  $(1 + u) \cdot (\varrho_{1E}/a) = \sqrt{F_E}$  und  $(1 + u) \cdot (\varrho_{2A}/a) = \sqrt{E_A}$  ein, dann ergibt sich die allgemeine Form

$$\varepsilon_h = \frac{(z_1)_\beta \cdot [\sqrt{F_E} + \sqrt{E_A} - (1 + u) \cdot \sin \alpha_g]}{2 \pi \cos \alpha_g}. \quad (19)$$

Gl. (19) hat also, wie ersichtlich, auch für die Geradverzahnung diese Form, da ein Unterschied lediglich in der unabhängigen Veränderlichen  $h_k/a$  der Werte  $F_E$  und  $E_A$  besteht.

Praktisch gesehen, ist es selbstverständlich, daß das  $\varepsilon_h$  nur positive Werte annehmen kann, daß also

$$\sqrt{F_E} + \sqrt{E_A} > (1 + u) \sin \alpha_g. \quad (20)$$

### 3.1. Bestimmung der Eingriffsdauer im Stirnschnitt für die allgemeine Schrägverzahnung auf Grund der »gleichwertigen Geradverzahnung«

Für die »gleichwertige Geradverzahnung« wurde anhand von Gl. (1) bewiesen, daß die Werte  $u$ ,  $q_2$ ,  $\alpha_g$ ,  $h_k/a$  identisch sind, woraus aus Gl. (19) folgt, daß die Eingriffsdauer ( $\varepsilon$ ) nur in der Zähnezahl abweicht, daß also  $\varepsilon_h/\varepsilon = (z_1)_\beta/z_1 = \Sigma z_\beta/\Sigma z$ , d. h. die Eingriffsdauer im Stirnschnitt beträgt für die allgemeine Schrägverzahnung

$$\varepsilon_h = \frac{\Sigma z_\beta}{\Sigma z} \varepsilon. \quad (21)$$

Aus Gl. (21) läßt sich also die Eingriffsdauer für jede allgemeine Verzahnung mit beliebigen Parametern überaus einfach berechnen, u. zw. mit einer der Festigkeitsberechnung entsprechenden Genauigkeit, wenn man nach Ermittlung des für den Ausgleich des spezifischen Gleitens ohnehin erforderlichen Wertes ( $\Sigma z$ ) aus der Kurvenschar für die Profilbestimmung die Eingriffsdauer der entsprechenden »gleichwertigen Geradverzahnung« abliest, weil, wie ersichtlich, zwischen beiden eine lineare Beziehung besteht! Die Eingriffsdauer der Geradverzahnung bei einem von  $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $f'_0 = 1$ ,  $c'_0 = 1/6$  abweichenden Bezugsprofil errechnet sich zu

$$\varepsilon_0 = \frac{\Sigma z_0}{\Sigma z} \varepsilon. \quad (22)$$

### 3.2. Beziehung des Normalmoduls ( $m_n$ ) der allgemeinen Schrägverzahnung zum Modul ( $m$ ) der »gleichwertigen Geradverzahnung«

Bei Gl. (1) wurde bewiesen, daß beide Verzahnungen die gleiche Funktion  $h_k/a$  haben. Hieraus folgt im Sinne von Gleichung A.9 im Anhang für die Beziehung zwischen den beiden Moduln

$$\frac{h_k}{a} = \frac{h_k}{m_n} \cdot \frac{2 \cdot \cos \beta_0}{\Sigma z_\beta (1 + \psi_h)} = \frac{h_k}{m} \cdot \frac{2}{\Sigma z (1 + \psi)},$$

woraus

$$\frac{m}{m_n} = \frac{\Sigma z_\beta}{\Sigma z} \frac{1 + \psi_h}{(1 + \psi) \cos \beta_0}.$$

Da

$$\frac{1 + \psi_h}{1 + \psi} = \frac{\cos \alpha_{0nh}}{\cos 20^\circ},$$

gilt für die Beziehung zwischen  $m$  und  $m_n$  schließlich

$$\frac{m}{m_n} = \frac{\Sigma z_\beta}{\Sigma z} \cdot \frac{\cos \alpha_{0nh}}{\cos 20^\circ \cos \beta_0}, \tag{23}$$

während die Beziehung zwischen  $m$  und  $m_0$  durch

$$\frac{m}{m_0} = \frac{\Sigma z_0}{\Sigma z} \cdot \frac{\cos \alpha_{0n}}{\cos 20^\circ} \tag{24}$$

beschrieben wird. (Das dem  $m$  und  $m_n$  zugehörige Bezugsprofil siehe unter »Bezeichnungen«.)

**4. Für die Berechnung der Flankenpressungen erforderliche geometrische Kennwerte in den inneren und äußeren Eingriffspunkten im allgemeinen**

Der Quotient ( $\xi_A$ ) der Krümmungsradienprodukte im äußeren Eingriffspunkt »A« hat die bekannte Form

$$\xi_A = \frac{\varrho_{1C} \cdot \varrho_{2C}}{\varrho_{1A} \cdot \varrho_{2A}}; \quad \varrho_{1C} \cdot \varrho_{2C} = \frac{u \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha_g}{(1 + u)^2}.$$

Mit den Werten  $\varrho_{1A} = a \sin \alpha_g - \varrho_{2A}$  und  $\varrho_{1C} \cdot \varrho_{2C}$  geht diese Gleichung in die Form

$$\xi_A = \frac{u \cdot \sin^2 \alpha_g}{(1 + u)^2 \cdot \frac{\varrho_{2A}}{a} \cdot \sin \alpha_g - (1 + u)^2 \cdot \left(\frac{\varrho_{2A}}{a}\right)^2}$$

über. Setzt man in den Nenner den bereits in Abschnitt 3 angewandten Wert

$$(1 + u) \frac{\varrho_{2A}}{a} = \sqrt{E_A}$$

ein, dann erhält man folgende allgemein gültige Gleichungen:

*Geometrischer Kennwert zur Berechnung der Flankenpressung in Punkt »A«*  
( $u \geq 1$ )

$$\xi_A = \frac{u \cdot \sin^2 \alpha_g}{(1 + u) \sin \alpha_g \cdot \sqrt{E_A - F_A}} \quad (25)$$

und in analoger Weise

$$\xi_E = \frac{q_{1C} q_{2C}}{q_{1E} q_{2E}};$$

nach Einsetzen von  $q_{1E} = a \sin \alpha_g - q_{2E}$  und Einführung von

$$(1 + u) \frac{q_{1E}}{a} = \sqrt{F_E}$$

hat man hieraus den geometrischen Kennwert zur Berechnung der Flankenpressung im Punkt »E«

$$\xi_E = \frac{u \cdot \sin^2 \alpha_g}{(1 + u) \sin \alpha_g \cdot \sqrt{F_E - E_E}} \quad (26)$$

Die Gleichungen (25) und (26) sind für beliebige Evolventenverzahnungen allgemein gültig, wenn man die unabhängige Veränderliche  $h_k/a$  der Werte  $E_A$  und  $F_E$  der Verzahnung entsprechend einsetzt (siehe A.10—A.17 im Anhang).

Von den in den äußeren Eingriffspunkten bei abweichendem spezifischem Gleiten nach den Gleichungen (25) und (26) berechneten geometrischen Kennwerten ist der größere maßgebend. Um feststellen zu können, welcher der größere ist, brauchen nicht beide ermittelt zu werden, wenn die für die Verzahnung kennzeichnenden Werte  $E_A$  und  $F_E$  aus früheren Berechnungen bereits bekannt sind.

Die Bedingungen für die Bestimmung des maßgebenden geometrischen Kennwertes sind:

$$\text{wenn } E_A \geq F_E, \quad \xi_A \geq \xi_E, \quad (27)$$

$$\text{wenn } E_A \leq F_E, \quad \xi_E \geq \xi_A. \quad (28)$$

Diese Bedingung leuchtet auch unmittelbar ein, u. zw. aus der auf die Eingriffslinie aufgetragenen Kurve  $\xi$  sowie aus den Beziehungen  $q_{2A} = r_{g1} \sqrt{E_A}$  und  $q_{1E} = r_{g1} \sqrt{F_E}$ , wie sie auf Grund der Gl. (8) und (9) geschrieben werden können. (Die Kurve ist eine Hyperbel zweiter Ordnung, deren Achse senkrecht auf die Eingriffslinie steht und deren Strecke  $a \cdot \sin \alpha_g$  halbiert.)

4.1. *Bestimmung des maßgebenden geometrischen Kennwertes  
in den inneren und äußeren Eingriffspunkten  
bei gleichen spezifischen Gleitungen*

Bei solchen Verzahnungen läßt sich nachweisen, daß der maßgebende geometrische Kennwert das gemäß Gleichung (25) berechenbare  $\xi_A$  ist, das stets größer ist als der Wert  $\xi_E$ .

Für den Beweis stehen drei Gleichungen zur Verfügung: die Funktion  $\xi_A/\xi_E$ , die Grundgleichung des spezifischen Gleitens und die Bedingung der Eingriffsdauer. In der bekannten Form ist

$$\frac{\xi_A/\xi_E}{\xi_A/\xi_E} = \frac{Q_{1E} Q_{2E}}{Q_{2A} Q_{1A}}$$

allgemein gültig.

Schreibt man die Grundgleichung für die gleichen spezifischen Gleitungen in den äußeren Eingriffspunkten (siehe A.1 und A.2 im Anhang) mit den Substitutionen

$$\frac{Q_{2A}}{u Q_{1A}} = \frac{u Q_{1E}}{Q_{2E}} \text{ bzw. } \frac{Q_{2E}}{Q_{1A}} = \frac{u^2 Q_{1E}}{Q_{2A}},$$

dann nimmt obige Gleichung die Form

$$\frac{\xi_A/\xi_E}{\xi_A/\xi_E} = \frac{u^2}{(Q_{2A}/Q_{1E})^2}$$

an. Führt man der Einfachheit halber für den Wert  $\xi_A/\xi_E$  den Ausdruck  $Q_{2A}/Q_{1E} = \varphi$  ein, dann erhält man auf Grund der Gleichungen (8) und (9)

$$\varphi = \sqrt{\frac{E_A}{F_E}} \quad \xi_A/\xi_E = \frac{u^2}{\varphi^2} \tag{29}$$

Zu bemerken ist, daß man zum gleichen Ergebnis gelangt, wenn die Grundgleichungen (25), (26) sowie (16) benützt werden, doch gestaltet sich die Ableitung in diesem Fall langwieriger.

Nach obigen Ausführungen bleibt noch zu beweisen, daß  $u^2/\varphi^2 \geq 1$ . Der Nachweis kann mit Hilfe der Gleichung für die Eingriffsdauer sowie der Grundgleichung (16) des spezifischen Gleitens erbracht werden.

Auf Grund der Gl. (19) läßt sich schreiben

$$\sqrt{F_E} + \sqrt{E_A} = \frac{2 \pi \cdot \varepsilon_n \cdot \cos \alpha_g}{(z_1)_\beta} + (1 + u) \sin \alpha_g \cdot$$

Bezeichnet man den Bruch mit  $D$  und benützt man ähnlich wie oben die Bezeichnung

$$\sqrt{\frac{E_A}{F_E}} = \varphi,$$

dann schreibt sich die Gleichung für die Eingriffsdauer zu

$$(1 + \varphi) \cdot \sqrt{F_E} = D + (1 + u) \cdot \sin \alpha_g.$$

Die Gleichung der gleichen spezifischen Gleitungen lautet gemäß (16)

$$\varphi + \frac{\varphi(u-1)}{\sin \alpha_g} \sqrt{F_E} = u^2.$$

Aus der Gleichung für die Eingriffsdauer wird der Wert  $\sqrt{F_E}$  ermittelt. Mit diesem geht die Gl. (16) des spezifischen Gleitens nach Ordnen in die Form

$$\varphi^2 + \frac{D(u-1)\varphi}{\sin \alpha_g} = u^2$$

bzw. in die Form

$$1 + \frac{D(u-1)}{\varphi \sin \alpha_g} = \frac{u^2}{\varphi^2}$$

über. Hieraus und aus Gl. (29) folgt

$$\xi_A/\xi_E = 1 + \frac{D(u-1)}{\varphi \sin \alpha_g}. \quad (30)$$

Wie ersichtlich, gilt in den äußeren Eingriffspunkten bei gleichen spezifischen Gleitungen, da das  $D$  und  $\varphi$  keine negativen Werte annehmen kann, bei  $u \geq 1$

$$\xi_A/\xi_E \geq 1.$$

#### 4.2. Bestimmung des maßgebenden geometrischen Kennwertes in den inneren und äußeren Eingriffspunkten bei gleichen spezifischen Gleitungen auf Grund der »gleichwertigen Geradverzahnung«

Wie aus den bisher abgeleiteten allgemeinen Gleichungen ersichtlich, sind der Wert  $q_2$  des spezifischen Gleitens und der geometrische Kennwert  $\xi$  von denselben Parametern abhängig; von diesen sind für die Verzahnung die Faktoren  $E_A$  und  $F_E$  die kennzeichnendsten, so daß nach deren Ermittlung beide Kennwerte berechnet werden können. In den Abschnitten 2 und 3 wurde

schon darauf hingewiesen, daß der Wert  $q_2$  des spezifischen Gleitens sowie der Wert  $\varepsilon$  der Eingriffsdauer auf Grund der Zähnesummè ( $\Sigma z$ ) für die »gleichwertige Geradverzahnung« ebenfalls aus der Kurvenschar abgelesen oder, wenn nötig, interpoliert werden kann. Entsprechend ist es also *nicht erforderlich*, nach Gleichung (25) für den Fall gleicher spezifischer Gleitungen in den äußeren Eingriffspunkten den Beiwert  $\xi_A$  rechnerisch zu ermitteln, weil auch dieser von der Kurvenschar für die Profilbestimmung abgelesen werden kann.

4.3. *Zusammenhang zwischen Tragfähigkeit, maßgebender Flankenpressung und geometrischen Kennwerten*

4.31. *Bestimmung der Tragfähigkeit auf Grund der zulässigen Flankenpressung bei allgemeiner Schrägverzahnung*

Die Praxis begnügt sich im allgemeine damit, bei Schrägverzahnung die Flankenpressung im Wälzpunkt (C) und in den äußeren Eingriffspunkten (»A« und »E«), bei der Geradverzahnung hingegen nur im Anfang- und Endpunkt des Einzeleingriffes zu prüfen.

Bei der Schrägverzahnung berücksichtigen die verschiedenen Berechnungssysteme für gewöhnlich folgende Beiwerte:

$\xi_d \geq 1$ , ein dynamischer Beiwert, im allgemeinen abhängig von der Verzahnungsqualität und von der Umfangsgeschwindigkeit  
 $c_b \leq 1$ , der Zahnbreitenbeiwert, im allgemeinen abhängig vom Quotienten  $b/d_g$  oder vom Produkt  $\frac{b}{a} \cdot (1+u)$ ,

$c_s$ , der Ölbeiwert, abhängig von der Viskosität und von der Sorte des Öls,  
 $c_{ü}$ , der Betriebsfaktor, vom Charakter des Betriebs abhängig,  
 $c_t$ , der Beiwert der Lastverteilung längs der Eingriffsstrecke, bringt im allgemeinen die von der theoretischen abweichende Linienpressung zum Ausdruck.

Im Wälzpunkt C beträgt die Linienpressung  $c_C \cdot p_n$ . In den Punkten A und E beträgt die Linienpressung:  $c_A \cdot p_n$ .  
 (Die Werte für die beiden Punkte können im allgemeinen als gleich angenommen werden, jedoch gilt stets  $c_C > c_A$ .)

Verschiedene Berechnungssysteme machen einige dieser Beiwerte außer von den angeführten auch noch von anderen Angaben, z. B. auch von der Belastung abhängig; bei solchen Beiwerten kann die Tragfähigkeit in der Regel nicht in geschlossener Form bestimmt werden, u. zw. selbst dann nicht, wenn sämtliche geometrische Abmessungen der Verzahnung bekannt sind.

$$p_n = \frac{10 \cdot F_n}{b_{a \min}}$$

ist die theoretische Linienpressung in [kp/cm].

Auf dieser Grundlage beträgt die um sämtliche Faktoren erhöhte Flankenpressung im Wälzpunkt

$$k_C = \frac{10 \cdot p_n \cdot c_C}{Q_{nC}} \cdot \frac{c_{ü} \cdot \xi_d}{c_b \cdot c_s}$$

Zieht man die von der Lage der Eingriffspunkte und von der Belastung unabhängigen Faktoren die Bezeichnung

$$G = \frac{c_b \cdot c_s}{c_{\tilde{u}} \cdot c_d} \text{ zusammen, dann wird } k_C = \frac{10 \cdot p_n \cdot c_C}{\varrho_{rC}} \cdot \frac{1}{G}.$$

Auf Grund der bekannten evolvententrigonometrischen Beziehungen der Schrägverzahnung läßt sich schreiben

$$\varrho_{nC} = \frac{\varrho_C}{\cos \beta_a}; \quad \varrho_C = \frac{2\varrho_{1C} \cdot \varrho_{2C}}{\varrho_{1C} + \varrho_{2C}} = \frac{2u \cdot a \cdot \sin \alpha_g}{(1+u)^2}; \quad z_0 = \frac{b_{a \min} \cdot \cos \beta_a}{b}.$$

Der Wert  $z_0$  kann mit dem bekannten  $\varepsilon_h$  und  $\varepsilon_{ax}$  aus der bekannten Karasschen Formel berechnet werden. Bei  $\varepsilon_{ax} =$  ganze Zahl gilt  $z_0 = \varepsilon_h$ . Bei einem gegebenen Drehmoment  $M_0$  (cmkp) an der Welle des Ritzels ist

$$F_n = \frac{10 \cdot M_0 (1+u)}{a \cdot \cos \beta_a \cdot \cos \alpha_g} \text{ und damit } p_n = \frac{10 \cdot F_n}{b_{a \min}} = \frac{10^2 M_0 (1+u)}{a \cdot b \cdot z_0 \cdot \cos \alpha_g}.$$

Mit diesen Werten hat man für die Flankenpressung im Wälzpunkt

$$k_C = \frac{10^3 \cdot M_0 \cdot \cos \beta_a}{b \cdot a^2 \cdot z_0 \cdot \sin 2\alpha_g} \cdot \frac{(1+u)^3}{u} \cdot \frac{c_C}{G}.$$

Mit den zusammengezogenen geometrischen Kennwerten gemäß

$$A_F = \frac{b \cdot a^2 \cdot z_0 \cdot \sin 2\alpha_g}{10^3 \cdot \cos \beta_a} \cdot \frac{u}{(1+u)^3} \quad (31)$$

wird schließlich

$$k_C = \frac{M_0}{A_F} \cdot \frac{c_C}{G} \text{ [kp/cm}^2\text{]}. \quad (32)$$

Ähnlich wie beim Ausgang ergeben sich die Flankenpressungen in den Punkten  $A$  und  $E$  zu

$$k_A = \frac{10 \cdot p_n \cdot c_A}{\varrho_{nA}} \cdot \frac{1}{G} = k_C \cdot \frac{c_A}{c_C} \cdot \frac{\varrho_{nC}}{\varrho_{nA}} \text{ und } \frac{\varrho_{nC}}{\varrho_{nA}} = \frac{\varrho_{1C} \cdot \varrho_{2C}}{\varrho_{1A} \cdot \varrho_{2A}} = \xi_A.$$

woraus im Sinne der obigen Ausführungen

$$k_A = k_C \cdot \frac{c_A}{c_C} \cdot \xi_A \text{ und ähnlich } k_E = k_C \cdot \frac{c_A}{c_C} \cdot \xi_E$$

wird. Setzt man in diese Gleichungen für  $k_A$  und  $k_E$  aus Gleichung (32) den Wert  $k_C$  ein, dann treten bei einem Drehmoment  $M_0$  in den Punkten  $A, E, C$  die Flankenpressungen

$$k_A = \frac{M_0}{A_F} \cdot \frac{c_A}{G} \cdot \xi_A; \quad k_E = \frac{M_0}{A_F} \cdot \frac{c_A}{G} \cdot \xi_E; \quad k_C = \frac{M_0}{A_F} \cdot \frac{c_C}{G}$$

auf. Bezeichnet man die zulässige Flankenpressung mit  $k$ , dann wird unter den 3 Tragfähigkeiten

$$M_C = A_F \cdot G \cdot \frac{k}{c_C}; \quad M_A = A_F \cdot G \cdot \frac{k}{c_A \cdot \xi_A}; \quad M_E = A_F \cdot G \cdot \frac{k}{c_A \cdot \xi_E}$$

die kleinste auch die zulässige sein. Von den drei Drehmomenten kann das kleinste, das sogenannte maßgebende oder zulässige Drehmoment auf Grund der geometrischen Angaben auch im allgemeinen Fall im vorhinein bestimmt werden, wenn die in den Beziehungen (27) und (28) vorkommenden Werte  $E_A$  und  $F_E$  oder  $\varrho_{2A}$  und  $\varrho_{1E}$  bekannt sind. Die mathematischen Bedingungen sind in Tabelle 2 zusammengefaßt. Sie gelten auch für Schrägverzahnungen, bei denen die spezifischen Gleitungen in den äußeren Eingriffspunkten nicht gleich sind, jedoch nur in Berechnungssystemen, in denen der mit  $G$  bezeichnete Kennwert von der Belastung unabhängig ist.

Tabelle 2

Fall des Vorkommens	Zulässige Flankenpressung $k$ [kp/cm <sup>2</sup> ] mit entsprechender Sicherheit unter der Dauerfestigkeitsgrenze			
	Bedingung	Folgerung	Weitere Bedingung	Zulässiges Drehmoment auf der Welle des Ritzels [cmkp]
1	$E_A \geq F_E$	$\xi_A \geq \xi_E$	$\xi_A \leq c_C/c_A$	$M = A_F \cdot G \cdot \frac{k}{c_C}$
	oder $\varrho_{2A} \geq \varrho_{1E}$		$\xi_A \geq c_C/c_A$	$M = A_F \cdot G \cdot \frac{k}{c_A \cdot \xi_A}$
2	$E_A \leq F_E$	$\xi_E \geq \xi_A$	$\xi_E \leq c_C/c_A$	$M = A_F \cdot G \cdot \frac{k}{c_C}$
	oder $\varrho_{2A} \leq \varrho_{1E}$		$\xi_E \geq c_C/c_A$	$M = A_F \cdot G \cdot \frac{k}{c_A \cdot \xi_E}$

Bei allgemeinen Schrägverzahnungen mit gleichem spezifischen Gleiten in den äußeren Eingriffspunkten kann das zulässige Drehmoment jederzeit gemäß Fall 1 der Tabelle 2 berechnet werden, da gemäß Punkt 4.1  $\xi_A \geq \xi_E$  ist.

Für ungarische Verhältnisse wird der Beiwert der ungleichförmigen Linienpressung auf Grund der Forschungen von Merrit und Karas im allgemeinen wie folgt angenommen:

im Wälzpunkt  $c_C = 1,15$ ; in den Punkten  $A$  und  $E$  ist  $c_A = c_E \cong 0,75$ .  
Auf dieser Grundlage ist  $c_C/c_A = 1,15/0,75 \cong 1,533$ .

#### 4.32. Bestimmung der Tragfähigkeit auf Grund der zulässigen Flankenpressung bei allgemeiner Geradzahnung

Bei der Geradzahnung kann die maximale Flankenpressung im Anfangs- oder im Endpunkt des Einzeleingriffes auftreten. Aus den bekannten geometrischen Abmessungen kann sie wie folgt berechnet werden:

Die Grundgleichung schreibt sich zu

$$M = \frac{A_E}{\xi} \cdot G \cdot k. \quad (33)$$

Für den zusammengefaßten geometrischen Beiwert zwischen den Eingriffsdauergrenzen  $1 < \varepsilon < 2$  gilt

$$A_E = \frac{b \cdot a^2 \cdot \sin 2\alpha_g}{10^3} \cdot \frac{u}{(1+u)^3} [\text{cm}^3]. \quad (34)$$

Bei  $q_{2A} \geq q_{1E}$  ist in Gleichung (33)  $\xi = \xi_B$ , (35)

bei  $q_{2A} \leq q_{1E}$  hingegen  $\xi = \xi_D$  einzusetzen.

Es gilt weiterhin

$$\xi_B = \frac{u \cdot \left( \frac{a \cdot \sin \alpha_g}{1+u} \right)^2}{q_{1B} \cdot q_{2B}} \quad (36)$$

$$\xi_D = \frac{u \cdot \left( \frac{a \cdot \sin \alpha_g}{1+u} \right)^2}{q_{1D} \cdot q_{2D}} \quad (37)$$

$$q_{1B} = q_{1E} - t_a; \quad q_{2B} = a \cdot \sin \alpha_g - q_{1B}$$

$$q_{1D} = q_{1A} + t_a; \quad q_{2D} = a \cdot \sin \alpha_g - q_{1D}$$

$G = \frac{c_b \cdot c_c}{c_{ii} \cdot \zeta_d}$  hat dieselbe Bedeutung wie unter Punkt 4.31.

Bei gleichen Werten für das spezifische Gleiten in den äußeren Eingriffspunkten läßt sich mathematisch nachweisen, daß  $\xi_B \geq \xi_D$  ist, d. h. daß in die Gleichung (33) in solchen Fällen stets  $\xi = \xi_B$  einzusetzen ist.

## 5. Eingriffsstörungen bei Evolventen-Außenverzahnungen (Interferenz)

Diese Erscheinung tritt auf, wenn der letzte Evolventenpunkt des Zahnkopfes eines Zahnrades mit der Fußkurve des Gegenrades in Eingriff kommt.

Dieses Phänomen wurde bei Geradverzahnungen für den Fall  $\alpha_g < \alpha_0$  von SZENICZEI im Jahre 1941 erkannt und als »untere Interferenz« in seinem Werk »Allgemeine Verzahnung« veröffentlicht.

Später und unabhängig von ihm hat die Erscheinung für Werte von  $\alpha_g > \alpha_0$  ebenfalls bei Geradverzahnungen auch der oben bereits erwähnte ungarische Autor (BOTKA) im Jahre 1952 festgestellt und sowohl in Ungarn als auch im Ausland publiziert.

Die bisher veröffentlichten ungarischen Quellenwerke haben dieses bis dahin unbekanntes Problem für Geradverzahnungen geklärt. Auf dieser Grundlage war es möglich, die Probleme im weiteren auch für Schrägverzahnungen zu bereinigen. In diesem Abschnitt behandelt Verfasser die von ihm ausgearbeitete Untersuchung der Interferenz, u. zw. in ganz allgemeiner Fassung für allgemeine Evolventen-Außenverzahnungen mit beliebig gewählten Parametern und auch in dem Sinne, daß die Interferenz auf Grund der von ihm abgeleiteten Zusammenhänge geprüft werden kann, ohne daß sämtliche geometrische Abmessungen der Verzahnung (Kopfkreise, Grundkreise, Modul, Achsabstand) bekannt sein müßten.

Die Bedingungen für die Eliminierung der Interferenz lassen sich für die allgemeine Schrägverzahnung anhand der bekannten Gleichungen der Geradverzahnung ableiten (siehe Gleichungen A.35, A.36 im Anhang). Weniger bekannt sind die wurzelfreien Formen dieser Gleichungen (siehe im Anhang die Gleichungen A.36 und A.37), die sich als überaus vorteilhaft erweisen, wenn die geometrischen Abmessungen der Verzahnung aus vorhergehenden Berechnungen bereits bekannt sind. Auch letzterer Gleichung haftet der Nachteil an, daß sie auch Größen enthält, von denen das Auftreten der Interferenz unabhängig ist (zum Beispiel:  $a$ ,  $m_n$ ,  $d_0$ ,  $d_a$ ,  $d_f$ ), bzw. die auch von anderen in der Gleichung vorkommenden Veränderlichen abhängen. Aus diesem Grund ist die Gleichung A.37 für eine Analyse des Verzahnungsbereichs ungeeignet. Für derartige Untersuchungen erweisen sich Gleichungen als zweckmäßig, die ausschließlich Parameter enthalten, die die Interferenz — bzw. deren Eliminierung — beeinflussen. Bei der allgemeinen schrägen Außenverzahnung und bei konstantem Kopfspiel wird die Interferenz nur durch folgende 7 Hauptkennwerte bzw. Veränderliche beeinflusst: Bezugsprofil ( $\alpha_{0n}$ ,  $f'_0$ );  $\alpha_g$ ;  $\beta_0$ ;  $(z_1)_\beta$ ;  $(z_2)_\beta$ ;  $f'_2$  (bzw. an Stelle von  $f'_2$  das  $q_2$  oder  $(x_1)_\beta$  oder  $(x_2)_\beta$ ).

Die auf diese Veränderlichen aufgebauten Bedingungsgleichungen sind folgende (die Ableitungen siehe bei den Gleichungen A.38, A.39 im Punkt 5,2 des Anhangs):

Interferenz tritt nicht ein, wenn folgende Bedingung erfüllt ist (gültig für allgemeine Evolventen-Außenschrägverzahnung bei konstantem Kopfspiel bzw. für Geradverzahnung mit den entsprechenden trigonometrischen Substitutionen  $\beta_0 = 0$  usw.):

$$\text{beim Ritzel} \quad F(J_1) = (f'_2)^2 - f'_2 b_1 + c_1 \geq 0, \quad (38)$$

$$\text{beim Rad} \quad F(J_2) = (f'_1)^2 - f'_1 b_2 + c_2 \geq 0. \quad (39)$$

wischen den in diesen Gleichungen vorkommenden Bezeichnungen bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} f'_1 &= f_1/m_n, \quad f'_2 = f_2/m_n, \quad f_1 = (1 - q_2)h_k, \quad f_2 = q_2 h_k \\ f'_1 &= \frac{h_k}{m_n} - f'_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Für  $f'_1$  beziehungsweise  $f'_2$  kann statt  $q_2$  auch  $x_1$  oder  $x_2$  gesetzt werden (siehe A.31 im Anhang). Dies wird sich als nötig erweisen, wenn bei der Verzahnung die Werte des spezifischen Gleitens in den äußeren Eingriffspunkten einander nicht gleich sind.

$$A = \sin \alpha_g \cdot \operatorname{tg} \alpha_{0nh}, \quad (41)$$

$$B = 1/\cos \alpha_{0nh} - \cos \alpha_g \quad (42)$$

$$b_1 = \frac{2a}{m_n} \left( \operatorname{tg} \alpha_{0nh}^2 - \frac{A}{\cos \alpha_{0nh}} \right) + \frac{d_{01}}{m_n} \cdot \psi_h \quad (43)$$

$$c_1 = \left( \frac{r_{g1}}{m_n} \right)^2 \cdot (A - B) \cdot \left( \frac{A \cdot [\Sigma z_\beta + (z_2)_\beta]}{(z_1)_\beta} - B \right) \quad (44)$$

$$b_2 = \frac{2a}{m_n} \left( \operatorname{tg} \alpha_{0nh}^2 - \frac{A}{\cos \alpha_{0nh}} \right) + \frac{d_{02}}{m_n} \cdot \psi_h \quad (45)$$

$$c_2 = \left( \frac{r_{g2}}{m_n} \right)^2 \cdot (A - B) \cdot \left( \frac{A [\Sigma z_\beta + (z_1)_\beta]}{(z_2)_\beta} - B \right). \quad (46)$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Ausdrücke

$$\frac{2a}{m_n}; \quad \frac{d_0}{m_n}; \quad \frac{r_g}{m_n}$$

stehen nicht im Widerspruch zu den erwähnten 7 Veränderlichen, weil diese unabhängig von den Werten des Achsabstands, des Moduls des Teilkreises und des Wälzkreises sind, wie dies in den Punkten 2.1 und 3 des Anhangs bewiesen wird:

$$\frac{2 a}{m_n} = \frac{\Sigma z_\beta}{\cos \beta_0} (1 + \psi_h); \quad \frac{d_0}{m_n} = \frac{(z)_\beta}{\cos \beta_0}; \quad \frac{r_g}{m_n} = \frac{0,5(z)_\beta (1 + \psi_h)}{\cos \beta_0}.$$

Bei den Werten  $d_0, r_g, (z)_\beta$  bezieht sich der Index 1 auf das Ritzel, der Index 2 auf das Rad.

Wie ersichtlich, werden die Gleichungen (38) und (39) ausschließlich durch die erwähnten 7 Kennwerte bzw. durch die 7 Veränderlichen beeinflusst. Sie sind für beliebige Evolventen-Außenverzahnungen (Schräg-, Hoch- oder Stumpfverzahnung) bei *konstantem Kopfspiel* gültig. Die Frage der Hoch-, Stumpf- oder genormten Bezugsprofile für die Verzahnung ist im Ausdruck  $h_k/m_n$  der Gleichung (40) verborgen, u. zw. im Wert  $f'_0$ , der gemäß Gleichung A.7 des Anhangs berechnet werden kann. Die Gleichung gilt natürlich auch für Geradverzahnungen, wenn man  $\cos \beta_0 = 1$  einsetzt bzw. statt  $\Phi_h$  das  $\Phi_0$  und an Stelle von  $\psi_h$  das  $\psi_0$  als trigonometrische Beziehung verwendet, sowie die Bezeichnungen  $\Sigma z_\beta = \Sigma z_0$  bzw.  $(z_1)_0, (z_2)_0$  für die Zähnezahln setzt.

Ähnlich kann die Gleichung der Interferenz für Verzahnung mit proportionalem Kopfspiel angesetzt werden, jedoch wird sie wegen des veränderlichen Kopfspiels komplizierter ausfallen. Da in der Praxis immer mehr das Berechnungssystem mit konstantem Kopfspiel benützt wird, soll die letztere Berechnungsart hier nicht besprochen werden. Bemerkenswert wäre noch, daß die Interferenz bei proportionalem Kopfspiel wegen der etwas größeren Kopfhöhe entsprechend früher einsetzt als bei den gleichen Basiskennwerten mit konstantem Kopfspiel. Aus den Gleichungen (38) und (39) leuchtet unmittelbar die nicht allgemein bekannte Tatsache ein, daß — bei Verzahnungen mit  $\alpha_g = \alpha_{0nh}$  bzw.  $\Sigma x_\beta = (x_1)_\beta + (x_2)_\beta = 0$  — keine Interferenz möglich ist. Der Beweis ist nach obigen Ausführungen überaus einfach:

$$\text{bei } \alpha_{0nh} = \alpha_g \text{ ist } A = \frac{1 - \cos^2 \alpha_g}{\cos \alpha_g} \quad \text{und} \quad \frac{A}{\cos \alpha_{0nh}} = \frac{1}{\cos^2 \alpha_g} - 1 = \text{tg}^2 \alpha_g$$

$$\text{bei } \alpha_{0nh} = \alpha_g \text{ ist } B = \frac{A}{\cos \alpha_g} - \cos \alpha_g,$$

woraus  $A - B = 0$  und somit  $c_1 = 0 = c_2$ .

Hingegen ist

$$\text{tg}^2 \alpha_{0nh} - \frac{A}{\cos \alpha_{0nh}} = \text{tg}^2 \alpha_g - \text{tg}^2 \alpha_g = 0,$$

so daß  $b_1 = 0 = b_2$  (da auch  $\psi_h = 0$  ist!).

Damit nehmen die Gleichungen (38) und (39) folgende Gestalt an:

beim Ritzel  $(f_2)^2 \geq 0,$

beim Rad  $(f_1)^2 \geq 0,$

eine Interferenz ist also unmöglich, da selbst bei  $f'_1 = 0$  oder  $f'_2 = 0$  (beide Werte können nicht zu gleicher Zeit Null sein) erst die Grenzwerte der Interferenz erreicht sind, ganz zu schweigen davon, daß z. B. beim Wert  $f'_1 = 0$  der Kopfkreis des Ritzels mit dem Wälzkreis zusammenfällt, was als überaus seltener Fall zu betrachten ist.

Die quadratischen Gleichungen (38) und (39) lassen sich ausschließlich nach  $f'_2$  oder  $f'_1$  auflösen. Mit diesen Werten kann man bei gegebenem  $f'_0$  das  $x_1$  oder das  $x_2$  oder  $q_2$ , bei gegebenen Werten von  $x_1$  oder  $x_2$  oder  $q_2$  hingegen den Grenzwert  $f'_0$  des Kopfhöhenfaktors für das Bezugsprofil berechnen. Auf dieser Grundlage bietet sich die Möglichkeit, anhand von 6 der 7 Daten, z. B. aus Bezugsprofil  $(\alpha_{0n}, f'_0)$ ,  $z_g, \beta_0, (z_1)_\beta, (z_2)_\beta$  jene Grenzwerte der Profilverschiebung  $x_{1 \min}, x_{1 \max}$  zu bestimmen, zwischen denen die Verzahnung interferenzfrei ausführbar ist; auf diese Weise kann auch die Grenzkurve der interferenzfreien Profilverschiebung ermittelt werden. Die konkrete Berechnung wird im Beispiel 1 gezeigt werden.

## 6. Allgemeine Gleichung der Zahnkopfdicke

Auf Grund der allgemein bekannten Gleichungen läßt sich der spielfreie Wert der Zahnkopfdicke im Normalschnitt bei allgemeiner Schrägverzahnung beim Ritzel zu

$$\frac{s_{f1}}{m_n} = \frac{d_{f1}/m_n}{1/\cos \beta_{f1}} \cdot \frac{s_{f0}}{d_{f1}} \quad (47)$$

ableiten.

*Kopfkreisdurchmesser, auf den Einheitsmodul bezogen:*

Außer den im Anhang angegebenen Zusammenhängen kann bei bekanntem  $x_1$  bei konstantem Kopfspiel auch die Form

$$\frac{d_{f1}}{m_n} = \frac{(z_1)_\beta}{\cos \beta_0} + 2 \left[ (x_1)_\beta + \frac{h_k}{m_n} - f'_0 \right] \quad (48)$$

benutzt werden.

*Hilfswert des Schrägungswinkels am Kopfzylinder des Ritzels:*

$$1/\cos \beta_{f1} = \sqrt{1 + \left[ \frac{(d_{f1}/m_n) \cdot \sin \beta_0}{(z_1)_\beta} \right]^2} \quad (49)$$

*Kosinuswert des Pressungswinkels am Kopfpunkt beim Ritzel:*

$$\cos \alpha_{f1} = \frac{d_{a1}}{d_{f1}} = \frac{d_{a1}/m_n}{d_{f1}/m_n} = \frac{(z_1)_\beta \cdot [\cos \alpha_{0n} / \cos \beta_0]}{d_{f1}/m_n} \quad (50)$$

Radianwert des Zahnwinkels am Teilkreis beim Ritzel:

$$\frac{s_{0h1}}{d_{01}} = \frac{0,5 \pi + 2 (x_1)_\beta \cdot \operatorname{tg} \alpha_{0n}}{(z_1)_\beta} \quad (51)$$

Radianwert des Zahnwinkels am Kopfkreis beim Ritzel:

$$\frac{s_{fh1}}{d_{f1}} = \frac{s_{0h1}}{d_{01}} - (\operatorname{inv} \alpha_{f1} - \operatorname{inv} \alpha_{0nh}) \quad (52)$$

Der in der Praxis übliche zulässige spielfreie Wert schreibt sich zu

$$\underline{s_{fn1}/m_n \geq 0,25}.$$

Ist der berechnete spielfreie Wert nur etwas größer als 0,25, dann muß man den Wert  $(s_{fn1}/m_n)_{\min}$  auf Grund des vorgeschriebenen bzw. in der Fabrikation möglichen maximalen Zahnspiels untersuchen und auf dieser Grundlage beurteilen, ob die Verzahnung im Endergebnis als entsprechend angesehen werden kann. Diese nachträgliche Berechnung darf man bereits mit dem Rechenschieber durchführen:

$$\Delta \left( \frac{s_{fh1}}{d_{f1}} \right) = \frac{(0,5/\cos \alpha_{0n}) \cdot j_{\max}}{m_n \cdot (z_1)_\beta} \quad \text{bei } \alpha_{0n} = \alpha_0 = 20^\circ : \\ 0,5/\cos \alpha_{0n} \cong 0,533.$$

$$\left( \frac{s_{fn1}}{m_n} \right)_{\min} = \frac{s_{fn1}}{m_n} - \frac{(d_{f1}/m_n) \Delta (s_{fh1}/d_{f1})}{1/\cos \beta_{f1}}.$$

Die obenstehenden Zusammenhänge gelten mit Index 2 auch für das Rad sowie auch für die Geradverzahnung bei trigonometrischen Substitutionen, die einem  $\beta_{11} = 0^\circ$  entsprechen.

## 7. Die Anwendung der Kurvenschar für die Profilbestimmung

Im Rahmen der Abhandlung wurde die zur Konstruktion nötige Kurvenschar für die Profilbestimmung für den ganzen Verzahnungsbereich ausgearbeitet (teilweise ist sie in Abschn. 9 dargestellt).

Die Kurven sind teilweise mit voll ausgezogenen, teilweise mit gestrichelten Linien aufgetragen. *Mathematisch haben jedoch sämtliche Koordinaten der Kurven für beliebige Außenverzahnungen (stumpfe, erhöhte Schrägverzahnung oder von der Bezugsverzahnung abweichendes Bezugsprofil der Geradverzahnung) zur Bestimmung ihrer geometrischen Kennwerte  $q_2$ ,  $\varepsilon_h$ ,  $\xi_A$  selbst dann*

Gültigkeit, wenn zum Beispiel die abgelesene Eingriffsdauer kleiner ist als die Einheit (im Sinne der Gleichungen (21) und (22) kann das  $\varepsilon_h$  bzw.  $\varepsilon_0$  auch in solchen Fällen für die Praxis entsprechen).

Bei Geradverzahnungen mit proportionalem Kopfspiel ( $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $f'_0 = 1$ ,  $c'_0 = 1/6$ ), die auf Grund der Werte der voll ausgezogenen Kurven bemessen werden, kann weder Interferenz noch Unterschnitt vorkommen und auch die Kopfdicke hat den Wert  $s_{f1}/m \geq 0,25$ . (Das gleiche gilt auch für die Geradverzahnungen, die von den obigen nur im konstanten Kopfspiel  $c'_0 = 0,25$  abweichen.)

Derartige Verzahnungen können also mit den von den Kurven abgelesenen Werten bemessen und ohne jegliche Überprüfung auf Interferenz, Kopfdicke und Unterschnitt ausgeführt werden. Hieraus darf jedoch nicht der Schluß gezogen werden, daß sämtliche allgemeinen Schrägverzahnungen oder eine von der oben geschilderten abweichende Geradverzahnung hinsichtlich Interferenz, Kopfdicke und Unterschnitt entsprechen wird, wenn deren Punkte  $q_2$ ,  $\varepsilon$ ,  $\xi_A$  innerhalb der Grenzen der voll ausgezogenen Kurven liegen. Derartige Verzahnungen sind nur hinsichtlich der Gleithyperbeln mit der geraden Bezugsverzahnung gleichwertig, folglich ist es unbedingt erforderlich, sie vor ihrer Ausführung auf Interferenz, Zahnkopfdicke und Unterschnitt zu überprüfen.

Die gestrichelten Kurven weisen darauf hin, daß bei der Geradverzahnung mit dem erwähnten Bezugsprofil entweder Interferenz auftritt oder die Eingriffsdauer kleiner als Eins ist oder daß beides zutrifft. Geradverzahnungen dieser Art sind also fiktiv, d. h. sie sind nicht ausführbar. Diese Umstände sind also bei der Benützung der Kurvenschar für die Profilbestimmung stets sorgfältig zu berücksichtigen.

### 8. Gemeinsame und abweichende Parameter der allgemeinen Schrägverzahnung und der »gleichwertigen Geradverzahnung« identische Parameter

Die Werte  $a$ ,  $u$ ,  $\alpha_g$ ,  $h_k$ ,  $\eta$ ,  $r_f$ ,  $r_g$ ,  $r_a$  sind gemeinsame Größen! Die Werte  $q_2$ ,  $\xi_A$  sind bei der berechneten Zähnesumme der »gleichwertigen Geradverzahnung« ( $\Sigma z$ ) identisch mit denjenigen für die Evolventen-Außenverzahnung, die entworfen werden soll; sie können nach dem neuen Verfahren von der Kurvenschar unmittelbar oder im Falle eines Ausgleichs der Werte des spezifischen Gleitens interpoliert abgelesen werden.

#### *Abweichende oder nur in Ausnahmefällen gemeinsame Parameter*

Die Werte  $\Sigma z$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  der Zähnezahlen weichen voneinander im allgemeinen ab, in Sonderfällen können sie aber auch gleich sein!

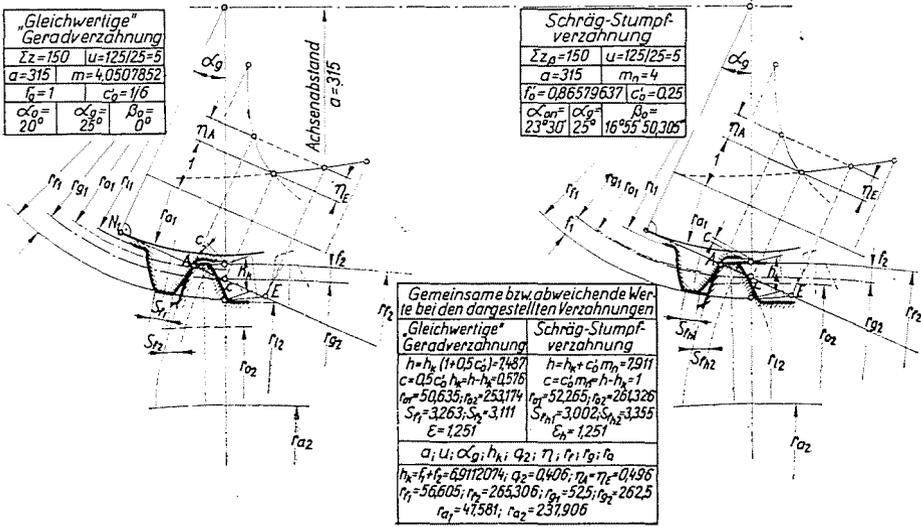


Abb. 2

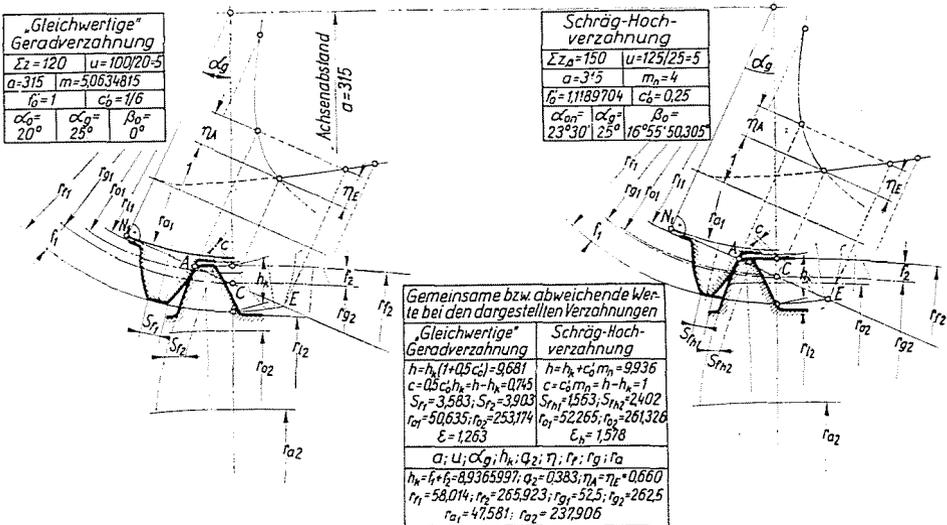


Abb. 3

Kurvenschar für Profilbestimmung  $\Sigma z = 120$

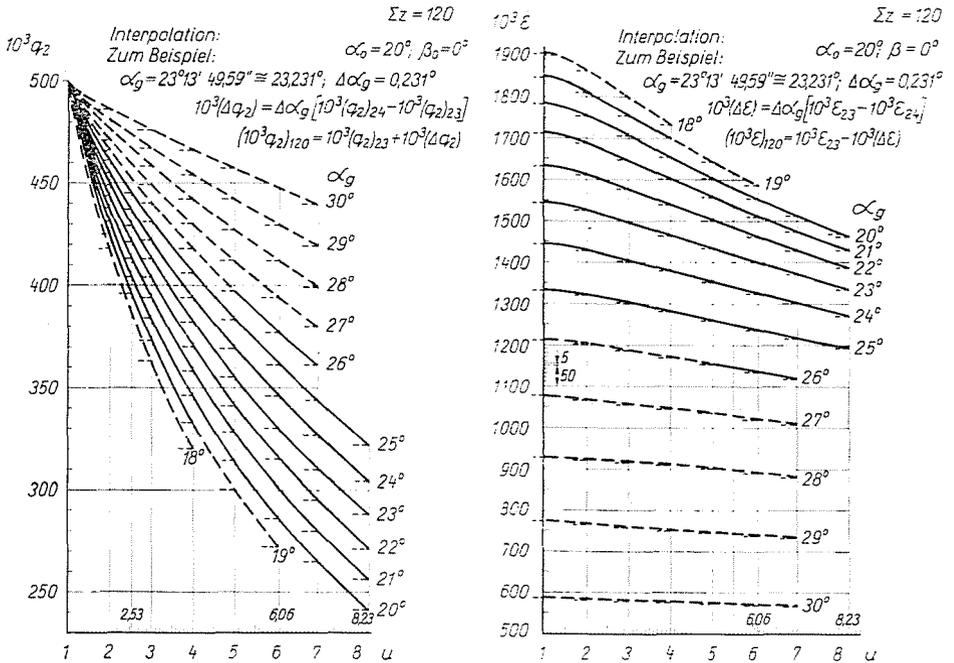


Abb. 4

Bezugsprofil: die  $\alpha_{0n}$ -,  $f'_0$ -,  $c'_0$ -Werte können sowohl abweichend als auch gleich sein.

Modul des Normalschnittes ( $m_n$ ) bei der Schrägverzahnung und Modulwert ( $m$  oder  $m_0$ ) bei der Geradverzahnung weichen voneinander ab.

Die Werte der Profilverschiebungsfaktoren ( $\Sigma x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ) weichen voneinander ab.

Die Werte für Kopfspiel ( $c$ ), Zahnhöhe ( $h$ ), Teilkreise ( $r_0$ ), Fußkreise ( $r_f$ ) sind verschieden.

Die Werte der Eingriffsdauer im Stirnschnitt ( $\epsilon_h$ ) bei der Schrägverzahnung und der Eingriffsdauer  $\epsilon$  bei der »gleichwertigen Geradverzahnung« weichen voneinander im allgemeinen ab, doch läßt sich das  $\epsilon_h$  auf Grund der linearen Beziehung aus den von den Kurven abgelesenen  $\epsilon$ -Werten stets einfach ermitteln.

Zur Veranschaulichung des Gesagten sind in den Abb. 2 und 3 je eine Stumpfverzahnung und eine Hochverzahnung mit den zugehörigen »gleichwertigen Geradverzahnungen« dargestellt. In den Tabellen der Abbildungen sind die Hauptkennwerte sowie die gemeinsamen und die abweichenden Parameter der Verzahnungen zusammengefaßt.

Kurvenschar für Profilbestimmung  $\Sigma z = 150$

Interpolation:

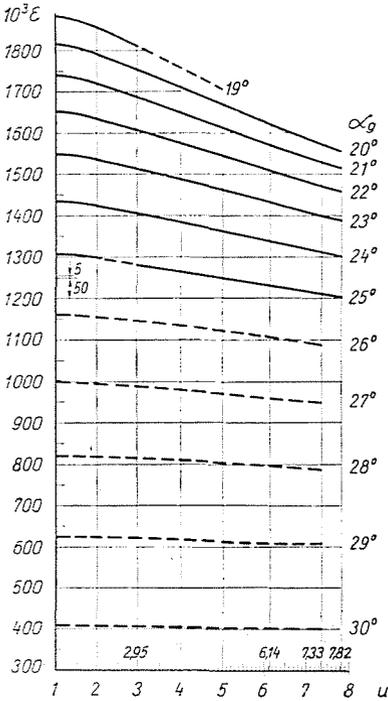
Zum Beispiel:  $\alpha_g = 23^\circ 13' 49.59'' \approx 23,231^\circ$ ;  $\Delta\alpha_g = 0,231^\circ$

$$10^3(\Delta\epsilon) = \Delta\alpha_g [10^3\epsilon_{23} - 10^3\epsilon_{24}]$$

$$\Sigma z = 150$$

$$(10^3\epsilon)_{150} = 10^3\epsilon_{23} - 10^3(\Delta\epsilon)$$

$$\alpha_0 = 20^\circ, \beta_0 = 0^\circ$$



$u = \frac{\Sigma z}{z_1}$	1	100/50	112/38	120/30	125/25	129/21	132/18
		= 2	≈ 2,95	= 4	= 5	≈ 6,14	≈ 7,33
$\alpha_g$		°					
20	1,0457	1,2250	1,3704	1,5247	1,6666	1,8255	1,9657
21	1,0374	1,1979	1,3274	1,4651	1,5934	1,7361	1,8825
22	1,0302	1,1729	1,2875	1,4096	1,5235	1,6522	1,7828
23	1,0240	1,1498	1,2503	1,3574	1,4575	1,5709	1,6683
24	1,0186	1,1283	1,2153	1,3077	1,3945	1,4936	1,5957
25	1,0140	1,1081	1,1823	1,2613	1,3353	1,4195	

Interpolation:

Zum Beispiel:  $\alpha_g = 23^\circ 13' 49.59'' \approx 23,231^\circ$ ;  $\Delta\alpha_g = 0,231^\circ$

$$\Sigma z = 150$$

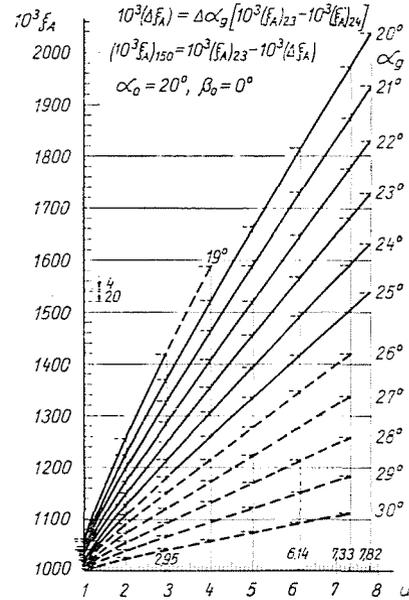


Abb. 5

Diese Verzahnungen können als Besonderheiten des Verzahnungsbereiches erwähnt werden. Während die Bezugsprofile der beiden Verzahnungen voneinander weitgehend abweichen, sind die Evolventen, der Achsabstand ( $a$ ), der Eingriffswinkel ( $\alpha_g$ ), die Kopfkreise ( $r_f$ ), die Wälzkreise ( $r_g$ ), die Grundkreise ( $r_a$ ) kongruent. Außerdem sind Achsabstand ( $a$ ), Eingriffswinkel ( $\alpha_g$ ) und Zähnesumme der »gleichwertigen Geradverzahnung« ( $\Sigma z$ ) sowie Zähnezahlnverhältnis ( $u$ ) ganze Zahlen, ferner ist diese Zähnesumme ( $\Sigma z$ ) der Zähnezahlnsumme der Stumpf-Schrägverzahnung gleich ( $\Sigma z = \Sigma z_\beta$ ). Bei der Schräg-Hochverzahnung ist dem Wert  $\Sigma z_\beta = 150$  auch eine ganzzahlige Zähnezahlnsumme der »gleichwertigen Geradverzahnung« mit dem Wert  $\Sigma z = 120$  zugeordnet.

Die ausführliche geometrische und die Tragfähigkeitsberechnung der Verzahnungen nach dem neuen Verfahren enthält der II. Teil der Abhandlung.

Hilftabelle zur Berechnung von  $\Sigma z$  nach Gleichung (3)

$\alpha_0 = 20^\circ$					$\alpha_0 = 20^\circ$				
$\alpha_R^0$	150 ( $\varphi - \psi$ )	1,75 (1 + $\psi$ )	100 ( $\varphi - \psi$ )	100 $\psi$	$\alpha_R^0$	150 ( $\varphi - \psi$ )	1,75 (1 + $\psi$ )	100( $\varphi - \psi$ )	100 $\psi$
23.00	0.22988455	1.78647845	0.15325638	2.08448284	23.50	0.31858223	1.79318905	0.21238815	2.46794559
23.01	0.23150197	1.78661085	0.15433464	2.09204816	23.51	0.32051907	1.79332518	0.21367940	2.47572474
23.02	0.23312800	1.78674332	0.15541867	2.09961795	23.52	0.32246452	1.79346137	0.21497635	2.48350688
23.03	0.23475955	1.78687584	0.15650637	2.10719072	23.53	0.32441442	1.79359765	0.21627628	2.49129422
23.04	0.23639746	1.78700844	0.15759831	2.11476796	23.54	0.32637335	1.79373400	0.21758222	2.49908529
23.05	0.23804134	1.78714114	0.15869423	2.12235041	23.55	0.32833704	1.79387042	0.21889135	2.50688084
23.06	0.23969039	1.78727389	0.15979359	2.12993659	23.56	0.33030785	1.79400692	0.22020523	2.51468085
23.07	0.24134657	1.78740673	0.16089771	2.13752724	23.57	0.33228535	1.79414348	0.22152358	2.52248459
23.08	0.24300942	1.78753963	0.16200628	2.14512162	23.58	0.33426886	1.79428014	0.22284590	2.53029354
23.09	0.24467750	1.78767262	0.16311834	2.15272121	23.59	0.33625828	1.79441686	0.22417220	2.53810622
23.10	0.24635229	1.78780568	0.16423485	2.16032453	23.60	0.33825638	1.79455366	0.22550424	2.54592337
23.11	0.24803376	1.78793880	0.16535584	2.16793157	23.61	0.34026114	1.79469053	0.22684076	2.55374424
23.12	0.24972235	1.78807200	0.16648156	2.17554309	23.62	0.34226961	1.79482748	0.22817973	2.56157033
23.13	0.25141649	1.78820529	0.16761101	2.18315907	23.63	0.34428594	1.79496452	0.22952396	2.56940089
23.14	0.25311814	1.78833863	0.16874542	2.19077878	23.64	0.34630977	1.79510162	0.23087318	2.57723518
23.15	0.25482269	1.78847207	0.16988178	2.19840370	23.65	0.34833915	1.79523880	0.23222610	2.58507394
23.16	0.25653622	1.78860557	0.17102415	2.20603235	23.66	0.35037564	1.79537605	0.23358376	2.59291716
23.17	0.25825533	1.78873915	0.17217023	2.21366547	23.67	0.35242035	1.79551338	0.23494690	2.60076411
23.18	0.25998192	1.78887279	0.17332128	2.22130232	23.68	0.35446952	1.79565079	0.23631302	2.60861628
23.19	0.26171333	1.78900652	0.17447554	2.22894363	23.69	0.35652620	1.79578826	0.23768412	2.61647217
23.20	0.26345259	1.78914032	0.17563506	2.23658942	23.70	0.35858952	1.79592581	0.23905968	2.62433179
23.21	0.26519591	1.78927420	0.17679726	2.24423968	23.71	0.36065885	1.79606344	0.24043924	2.63219662
23.22	0.26694857	1.78940813	0.17796571	2.25189291	23.72	0.36273532	1.79620115	0.24182353	2.64006593

23.23	0.26870456	1.78954217	0.17913637	2.25955211	23.73	0.36481921	1.79633894	0.24321281	2.64793895
23.24	0.27046992	1.78967626	0.18031328	2.26721429	23.74	0.36690835	1.79647680	0.24460556	2.65581720
23.25	0.27223894	1.78981043	0.18149263	2.27488168	23.75	0.36900418	1.79661474	0.24600279	2.66369917
23.26	0.27401623	1.78994468	0.18267749	2.28255280	23.76	0.37110710	1.79675275	0.24740473	2.67158561
23.27	0.27579831	1.79007900	0.18386554	2.29022838	23.77	0.37321717	1.79689084	0.24881145	2.67947652
23.28	0.27758749	1.79021340	0.18505833	2.29790844	23.78	0.37533390	1.79702899	0.25022260	2.68737115
23.29	0.27938338	1.79034787	0.18625558	2.30559223	23.79	0.37745777	1.79716723	0.25163851	2.69527026
23.30	0.28118560	1.79048241	0.18745708	2.31328048	23.80	0.37958685	1.79730556	0.25305790	2.70317458
23.31	0.28299454	1.79061702	0.18866303	2.32097246	23.81	0.38172337	1.79744395	0.25448226	2.71108262
23.32	0.28480944	1.79075172	0.18987297	2.32866965	23.82	0.38386819	1.79758240	0.25591212	2.71899440
23.33	0.28662994	1.79088650	0.19108663	2.33637132	23.83	0.38601819	1.79772095	0.25734545	2.72691138
23.34	0.28845790	1.79102135	0.19230527	2.34407671	23.84	0.38817376	1.79785958	0.25878250	2.73483284
23.35	0.29029255	1.79115625	0.19352836	2.35178583	23.85	0.39033756	1.79799827	0.26022503	2.74275802
23.36	0.29213320	1.79129126	0.19475547	2.35950016	23.86	0.39250812	1.79813705	0.26167209	2.75068842
23.37	0.29398054	1.79142632	0.19598702	2.36721821	23.87	0.39468464	1.79827589	0.26312309	2.75862254
23.38	0.29583499	1.79156147	0.19722333	2.37494074	23.88	0.39686823	1.79841483	0.26457883	2.76656114
23.39	0.29769348	1.79169669	0.19846232	2.38266774	23.89	0.39905930	1.79855382	0.26603954	2.77450346
23.40	0.29955909	1.79183199	0.19970606	2.39039921	23.90	0.40125638	1.79869290	0.26750425	2.78245099
23.41	0.30143370	1.79196735	0.20095579	2.39813440	23.91	0.40346089	1.79883204	0.26897394	2.79040225
23.42	0.30331233	1.79210280	0.20220823	2.40587406	23.92	0.40567180	1.79897126	0.27044786	2.79835798
23.43	0.30519731	1.79223832	0.20346487	2.41361819	23.93	0.40788788	1.79911058	0.27192525	2.80631893
23.44	0.30709054	1.79237391	0.20472703	2.42136605	23.94	0.41011372	1.79924997	0.27340917	2.81428360
23.45	0.30899011	1.79250958	0.20599339	2.42911838	23.95	0.41234517	1.79938943	0.27489679	2.82225274
23.46	0.31089489	1.79264533	0.20726325	2.43687593	23.96	0.41458142	1.79952896	0.27638762	2.83022635
23.47	0.31280559	1.79278115	0.20853706	2.44463720	23.97	0.41682821	1.79966856	0.27788547	2.83820369
23.48	0.31472531	1.79291704	0.20981688	2.45240219	23.98	0.41907871	1.79980826	0.27938578	2.84618624
23.49	0.31664947	1.79305302	0.21109966	2.46017240	23.99	0.42133814	1.79994802	0.28089210	2.85417252

Kurvenschar für Profilbestimmung  $\Sigma z = 120$  und  $\Sigma z = 150$

$u$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$z_8$
1	89/40	90/30	96/24	100/20	103/17	105/15		
	= 2	= 3	= 4	= 5	≈ 6,05	= 7		
$\alpha_G$	$f_n$							
19	1,5667	1,3417	1,5622	1,7707				
20	1,0726	1,2995	1,4674	1,6842	1,8553	2,0510	2,2112	
21	1,0578	1,2623	1,4364	1,6059	1,7690	1,9373	2,0822	
22	1,0459	1,2290	1,3850	1,5348	1,6801	1,8315	1,9635	
23	1,0377	1,1986	1,3363	1,4684	1,5983	1,7325	1,8507	
24	1,0297	1,1713	1,2913	1,4068	1,5205	1,6400	1,7439	
25	1,0230	1,1460	1,2497	1,3493	1,4477	1,5512	1,6430	

Interpolation:

Zum Beispiel:

$$\alpha_G = 23^\circ 13' 49,59'' \approx 23,231^\circ$$

$$\Delta \alpha_G = 0,231^\circ$$

$$10^3(\Delta f_n) = \Delta \alpha_G [10^3(f_n)_{23} - 10^3(f_n)_{24}]$$

$$(10^3 f_n)_{120} = 10^3(f_n)_{23} - 10^3(\Delta f_n)$$

$\Sigma z = 120$

$\Sigma z = 150$

Interpolation:

Zum Beispiel:

$$\alpha_G = 20^\circ, \beta_2 = 0^\circ$$

$$\alpha_G = 23^\circ 13' 49,59'' \approx 23,231; \Delta \alpha_G = 0,231^\circ$$

$$10^3(\Delta q_2) = \Delta \alpha_G [10^3(q_2)_{24} - 10^3(q_2)_{23}]$$

$$(10^3 q_2)_{150} = 10^3(q_2)_{23} + 10^3(\Delta q_2)$$

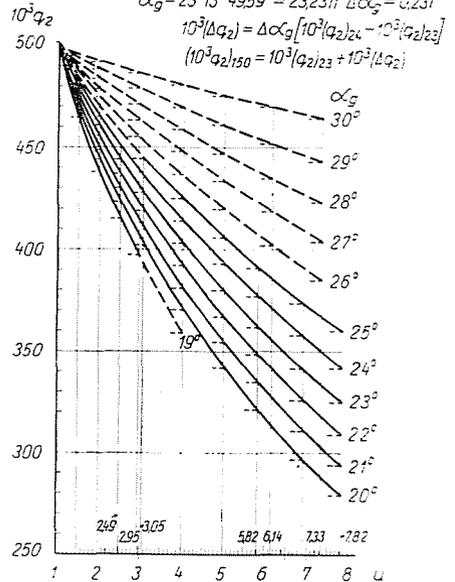
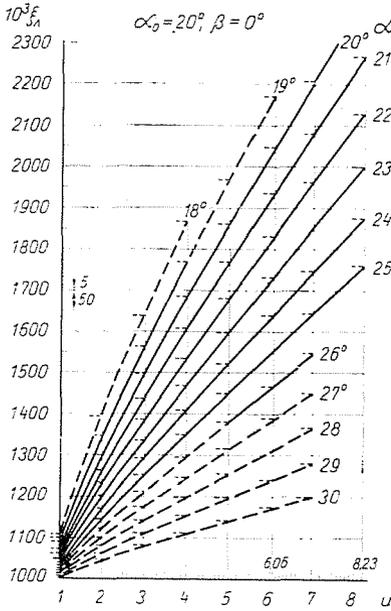


Abb. 6

Zur Tragfähigkeit sei bemerkt, daß die maximale Tragfähigkeit auf Flankenpressung, wie sie den Extremwerten des Profilverschiebungsfaktors — bestimmt nach dem Berechnungssystem gemäß Abschnitt 4.31 — zugeordnet ist, nach den Erfahrungen der analytischen Untersuchungen von Schrägverzahnungen mit genormtem Bezugsprofil ( $\alpha_{0n} = 20^\circ$ ;  $f_0 = 1$ ,  $c_0 = 0,25$ ) von der Tragfähigkeit der auf spezifisches Gleiten ausgeglichenen Verzahnung nur unwesentlich abweicht, so daß diese letztere hinsichtlich der Flankenpressung praktisch als optimal angesehen werden kann.

## Zusammenfassung

Verfasser beschreibt in der vorliegenden Abhandlung ein Verfahren zur exakten und einfachen Bestimmung des Ausgleichs auf spezifisches Gleiten und zur Ermittlung jener geometrischen Kennwerte, die zur Bemessung für die Flankenpressung auch in jedem anderen der bekannten Berechnungssysteme benötigt werden. Der Ausgleich des spezifischen Gleitens konnte bisher nur nach den Methoden der Iteration gelöst werden — in Ungarn bilden eine Ausnahme hiervon die Geradzahnungen mit genormtem Bezugsprofil —, und dies bildete den Grund dafür, daß die allgemeine Schrägverzahnung die wünschenswerte Verbreitung noch nicht gefunden hat. Weiterhin hat Verfasser für den gesamten Verzahnungsbereich auch eine Kurvenschar für die Profilbestimmung ausgearbeitet, die in Abschnitt 9 teilweise wiedergegeben ist. Von dieser Kurvenschar können die benötigten geometrischen Kennwerte mit der für den Entwurf erforderlichen Genauigkeit abgelesen bzw. durch Interpolation ganz einfach bestimmt werden. In Abschn. 5 gibt Verfasser auch eine Formel für die Eliminierung der Interferenz an, die es gestattet, diese auch in Abhängigkeit von den Hauptkennwerten der Verzahnung allein zu untersuchen. Damit entfällt bei derartigen Untersuchungen des Verzahnungsbereiches die Anwendung jener kennzeichnenden Zahnradabmessungen, die bei den in der Literatur bekannten Interferenzuntersuchungen bisher benötigt wurden.

## Literatur

1. VIDÉKY, E.: The rationalisation of gear cutting. Budapest 1933.  
Beiträge zur Berechnung der Zahnräder. Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins 1908.
2. SZENICZEI, L.: Az általános fogazás. 1941 (ungarisch).
3. VÖRÖS, I.: I Fogaskerekek. 1943 (ungarisch).
4. BOTKA, I.: Egységes magyar (Ganz—Botka) fogazási rendszér. 1953 (ungarisch).
5. KECK, K. F.: Die Zahnradpraxis I, 83 (1956).
6. DUDLEY/WINTER: Zahnräder, 44, 50 (1961).
7. HARRISON, W. H.: Addendum Modifikation and Distribution. Power Transmission 1955 pp. 481—493.
8. WOLKENSTEIN: Direkte Ermittlung der Profilverchiebungsfaktoren an Zahnradgetrieben für ausgeglichene spezifische Gleitung bei 20° Außen- und Innenverzahnung. Maschinenmarkt 71, Nr. 56, 21/26 und Nr. 73 29/32 (1965).

Ernő OSZKAY, Budapest XI. Társ u. 7, Ungarn