

# BESTIMMUNG DER DURCH APPARATPRATZEN GEWECKTEN SPANNUNGEN UND AUSBILDUNG DER OPTIMALEN PRATZENKONSTRUKTION, I

Von

L. VARGA

Lehrstuhl für Chemisches Maschinenwesen und Landwirtschaftliche Industrien,  
Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 18. Dezember 1967)

Vorgelegt von Prof. Dr. S. SZENTGYÖRGYI

## Einleitung

Stehende Apparate und Geräte, wie sie in der chemischen Industrie gebräuchlich sind — Druckgefäße, Behälter, Autoklaven u. dgl. m. — werden je nach dem verfügbaren Platz und den geometrischen Abmessungen, je nach Betriebsdruck und -temperatur, je nach Baustoff usw. auf Apparatpratzen oder Halteringe, auf Blech- oder Rohrgestelle sowie auf Schürzen abgestützt. Besonders häufig ist die Aufstellung auf Pratzen, weil sie billig sind und sich einfach herstellen und montieren lassen. Ihrer Verwendung setzt jedoch der Umstand Grenzen, daß sie den Apparatmantel ihrer Ausbildung entsprechend lokal belasten und daß die hierbei auftretende Spannung an Höhe den durch den Innen- oder Außendruck geweckten Spannungen nahe kommt. Die aufstützungsbedingten Biegespannungen können — weil sie dem Quadrat der Mantelwandstärke umgekehrt proportional sind — besonders hohe Werte bei Niederdruckgefäßen oder bei Flüssigkeitsbehältern annehmen, für die sich aus der üblichen Berechnung auf Grund des gleichmäßig verteilten Druckes in der Regel kleine Wandstärken ergeben. Erschwerend wirkt sich weiterhin die Tatsache aus, daß die durch die Prätze geweckten Spannungen nur mit grober Annäherung bestimmt zu werden pflegen, was die Konstrukteure veranlaßt, mit unbegründet hohen Sicherheitsgraden zu rechnen. Die vorliegende Arbeit setzt sich vor allem das Ziel, eine konstruktive Lösung und ein Berechnungsverfahren zu empfehlen, die es unter voller Wahrung der bisherigen Einfachheit von Herstellung und Montage ermöglichen eine optimale Mantelbeanspruchung zu erzielen bzw. die durch die Unterstützung geweckte Spannung relativ einfach und mit annehmbarer Genauigkeit rechnerisch zu ermitteln.

## Bezeichnungen

- $a$  — Hebelarm der Lagerreaktion [cm]
- $c$  — Korrosionszugabe [cm]
- $c_1$  — Wandstärkenzuschlag [cm]

- $d$  — Durchmesser der Kreiszyinderschale [cm]  
 $f$  — Gütegrad der Schweißnaht  
 $h$  — Schuhhöhe [cm]  
 $j$  — 1, 2, 3, 4

$$k = \frac{1}{12} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \text{ — Schalenkennwert}$$

- $n$  — Anzahl der Pratzen  
 $p$  — innerer Gasdruck [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $s$  — Wandstärke [cm]  
 $u$  — Verschiebung in Richtung der Mantellinie [cm]  
 $v$  — Verschiebung in Richtung des Umfanges [cm]  
 $v_{\max}$  — größte Verschiebung in Umfangsrichtung [cm]  
 $w$  — radiale Verschiebung [cm]  
 $w_{\max}$  — größte radiale Verschiebung [cm]  
 $u', v', w'$  — die Ableitungen der Verschiebungen nach  $\bar{x}$  [cm]  
 $u'', v'', w''$  — die Ableitungen der Verschiebungen nach  $\varphi$  [cm]  
 $x$  — Koordinate in Richtung der Mantellinie [cm]

$$\bar{x} = \frac{x}{R} \text{ — dimensionslose Koordinate in Richtung der Mantellinie}$$

- $y_1, y_2$  — Sicherheitsbeiwerte  
 $A$  — Pratzbreite [cm]  
 $A_{j\eta}$  — Koeffizienten

$$B = \frac{E \delta^3}{12(1 - \mu^2)} \text{ — Biegesteifigkeit der Schale [kp cm]}$$

$C_{j\delta}$  — Integrationskonstanten

$$D = \frac{E\delta}{1 - \mu^2} \text{ — Dehnungssteifigkeit der Schale [kp/cm]}$$

$E$  — Elastizitätsmodul [kp/cm<sup>2</sup>]

$H_A, H_M$  — Höhe der Flüssigkeitssäule [cm]

$L$  — Länge der Kreiszyinderschale

$M_x, M_{x\alpha}, M_{x\delta}$  — Meridianmomente in Richtung der Mantellinie [cmkp/cm]

$M_\varphi, M_{\varphi\alpha}, M_{\varphi\delta}$  — Ringmomente [cmkp/cm]

$M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = M$  — Drillmomente [cmkp/cm]

$\bar{M}_{x\delta}, \bar{M}_{\varphi\delta}$  — Momentbeiwerte

$N_x, N_{x\alpha}, N_{x\delta}$  — Schnittkräfte in Richtung der Mantellinie [kp/cm]

$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = N$  — Schubkräfte [kp/cm]

$\bar{N}_{x\delta}, \bar{N}_{\varphi\delta}$  — Kraftbeiwerte

$P$  — konstant große lokale Streckenbelastung [kp/cm]

$P_a$  — symmetrischer Teil der Streckenbelastung  $P$

$P_b$  — antisymmetrischer Teil der Streckenbelastung  $P$

$P_1 = P_1(\bar{x})$  — durch die unversteifte Pratze verursachte Streckenbelastung [kp/cm]

$P_2 = P_2(\varphi)$  — durch die versteifte Pratze ausgelöste Streckenbelastung [kp/cm]

$P(\varphi)$  — am Umfang entlang veränderliche Streckenbelastung

$P_\delta$  — Koeffizienten der Fourierreihe, die die Streckenbelastung beschreibt [kp/cm]

$R$  — Krümmungshalbmesser der Mittelfläche der Kreiszyinderschale [cm]

$W$  — Gewicht von Apparat und Füllung [kp]

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — Koeffizienten der Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$\beta$  — Schalenkonstante

$\gamma$  — Raumgewicht der Füllung [kp/cm<sup>3</sup>]

$\delta$  — Schalenstärke [cm]

$\varphi, \Phi$  — Winkelkoordinaten in Richtung des Umfanges

$\theta = 0, 4, 8, 12, \dots$

$\beta = 1, 2, 2, 4, \dots$

$\eta = 1, 2, 3, 4$

$\varrho$  = Unterstützungswinkel

$\mu$  = Poissonsche Zahl

- $\Theta_0$  = der der Streckenbelastung zugeordnete Zentriwinkel  
 $\psi_j$  — Verschiebungsfunktion  
 $\sigma_{Mx}, \sigma_{Mxa}, \sigma_{Mx}$  — Membranspannungen in Richtung der Mantellinie [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{M\varphi}, \sigma_{M\varphi a}, \sigma_{M\varphi b}$  — Membranspannungen in Richtung des Umfanges [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{Bx}, \sigma_{Bxa}, \sigma_{Bxb}$  — Biegespannungen in Richtung der Mantellinie [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{B\varphi}, \sigma_{B\varphi a}, \sigma_{B\varphi b}$  — Biegespannungen in Richtung des Umfanges [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{Rx}, \sigma_{R\varphi}$  — resultierende Spannungen in Richtung von Mantellinie und Umfang [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\bar{\sigma}_{Mx}, \bar{\sigma}_{Mxa}, \bar{\sigma}_{Mxb}, \bar{\sigma}_{Mx\delta}$  — Koeffizienten der Membranspannungen in Richtung der Mantellinie  
 $\bar{\sigma}_{M\varphi}, \bar{\sigma}_{M\varphi a}, \bar{\sigma}_{M\varphi b}, \bar{\sigma}_{M\varphi\delta}$  — Koeffizienten der Membranspannungen in Umfangsrichtung  
 $\bar{\sigma}_{Bx}, \bar{\sigma}_{Bxa}, \bar{\sigma}_{Bxb}, \bar{\sigma}_{Bx\delta}$  — Koeffizienten der Biegespannung in Richtung der Mantellinie  
 $\bar{\sigma}_{B\varphi}, \bar{\sigma}_{B\varphi a}, \bar{\sigma}_{B\varphi b}, \bar{\sigma}_{B\varphi\delta}$  — Koeffizienten der Biegespannung in Umfangsrichtung  
 $\bar{\sigma}_{Rx}, \bar{\sigma}_{R\varphi}, \bar{\sigma}_{R\varphi 1}$  — Koeffizienten der resultierenden Spannungen in den Mantellinien- und in Umfangsrichtung  
 $\sigma_0$  — Einheit der durch die Streckenbelastung auf der Einheit der Bogenlänge geweckten Höchstspannung [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{Fl}$  — die der Fließgrenze zugehörige Spannung [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{Am}$  — Höchstspannung in Umfangsrichtung, hervorgerufen durch die Unterstüzung [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{em}, \sigma_{\varphi m}, \sigma_{\varphi m}$  — Höchstwerte der Spannung, verursacht durch die konstant große Streckenbelastung [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{xb}, \sigma_{\varphi b}$  — an der Schaleninnenfläche gemessene Spannungen in Richtung von Mantellinie und Umfang [kp/cm<sup>2</sup>]  
 $\sigma_{xk}, \sigma_{\varphi k}$  — an der Schalenaußenfläche gemessene Spannungen in Richtung von Mantellinie und Umfang [kp/cm<sup>2</sup>]

Die Erklärungen für weitere Bezeichnungen finden sich im Text.

### 1. Unterstützungsbedingte Mantelbeanspruchungen

Die Apparatpratzen, wie sie zur Unterstüzung kreiszylindrischer GefäÙe verwendet werden, sind für gewöhnliche Stahlblechkonstruktionen mit Versteifungen durch lotrechte Rippen (Abb. 1a) oder durch Rippen und waag-

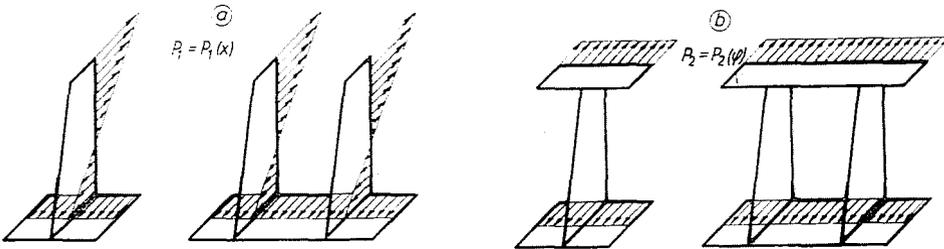


Abb. 1

rechte Platten versehen (Abb. 1b). Sie können unter Zwischenschaltung einer Auflageplatte oder auch ohne eine solche unmittelbar an den GefäÙmantel angeschweiÙt werden. Die Ausgestaltung des Berechnungsmodells, die den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet, geht von der Voraussetzung aus, daß die Pratzen ohne Auflageplatte unmittelbar an den kreiszylindrischen GefäÙmantel angeschweiÙt sind.

Von den mit unversteiften lotrechten Rippen ausgestatteten Apparatzprätzen kann angenommen werden, daß sie eine Mantelbeanspruchung verursachen, die der Kraftereinwirkung  $P_1 = P_1(x)$  im Sinne der Abb. 1a ähnlich ist. (Bei dieser Annahme handelt es sich naturgemäß lediglich um die bei der Bemessung übliche Annäherung.) Bei Berechnung der Spannungen, die die Prätze weckt, geht man weiterhin von der Annahme aus, daß sich das von der Lagerreaktion ausgelöste Moment nur längs der lotrechten Rippen auf den Gefäßmantel überträgt. Die so ermittelte Streckenbelastung wird durch zwei Kräfte ersetzt, deren eine man an dem elastischen Ring angreifen läßt, durch den man die Schale ersetzt. Sodann wird das im Ring geweckte größte Moment und aus diesem die durch den Schuh ausgelöste größte Ringspannung berechnet [4]. Obwohl dieses Berechnungsverfahren nur mit gutem Willen auch nur als Schätzung bezeichnet werden kann, ist es wegen seiner Einfachheit dennoch weit verbreitet. Einer seiner Mängel besteht darin, daß sich die größte Spannung in bestimmten Fällen in größerem Abstand von den Apparatzprätzen ergibt (bei 4 Prätzen etwa bei einem  $\varphi = 45^\circ$ ), trotzdem sich die Wirkung der Streckenbelastung in der Schale innerhalb bekanntermaßen kurzer Entfernung aufzehrt. Als sein zweiter Mangel muß die Tatsache bezeichnet werden, daß es nur für die Schätzung der Ringspannungen Anhaltspunkte bietet. Zwar trifft es zu, daß die hier behandelte Prätzenkonstruktion im Gefäßmantel verhältnismäßig große Ringspannungen und nur geringe Spannungen in Richtung der Achse weckt, während gerade das Gegenteil wünschenswert wäre, da die Ringspannungen, die der innere oder der äußere Überdruck weckt, ohnehin doppelt so groß sind wie die Spannungen in axialer Richtung. Vom Gesichtswinkel der wirtschaftlichen Materialausnutzung betrachtet, müssen die üblichen Formen der Apparatzprätzen eben wegen der auftretenden großen Ringspannungen als nicht eben glücklich bezeichnet werden.

Zur Herabsetzung der Ringspannungen eignen sich die durch waagrechte Platten versteiften Apparatzprätzen (Abb. 1b) besser, weil bei diesen die normal auf die Schalenoberfläche angreifende — nach Abb. 1b in erster Annäherung als konstant anzusehende — Streckenbelastung  $P_2 = P_2(\varphi)$  längs der Hauptkreise an den Anschlußstellen der waagrechten Platten wirkt. (Die lotrechten Rippen sind mit dem Gefäßmantel nur stellenweise — an den gestrichelten Teilen — verschweißt.) Die Ringspannungen aus dieser Art von Streckenbelastung sind — nach den hier durchgeführten Untersuchungen — annähernd ebensogroß wie die axialen Spannungen und jedenfalls weit geringer als jene, die bei den weiter oben beschriebenen Apparatzprätzen auftreten.

Hier sei bemerkt, daß die Fachliteratur [4] zur Bestimmung der Spannungen, wie sie durch Apparatzprätzen mit waagrechten Platten geweckt werden, lediglich Hinweise für die Berechnung der axialen Biegespannungen

gibt, was jedoch als grundsätzlich verfehlt bezeichnet werden muß, zumal hierzu der Gebrauch der Beziehungen für die achsensymmetrische Streckenbelastung empfohlen wird.

Außer den normal auf die untersuchte Schalenoberfläche wirkenden Streckenbelastungen greift an ihr auch eine an den Verbindungsstellen zwischen Pratzen und Gefäßwand auftretende Beanspruchung an, doch kann diese im Vergleich zur normalen Streckenbelastung in der Regel vernachlässigt werden. Hinzuzufügen wäre noch, daß sich die normal auf die Oberfläche angreifenden Belastungen an den Rippen oder Platten, genauer an den Schweißnähten entlang auf den Gefäßmantel übertragen, daß sie jedoch rechnerisch — u. zw. zu Gunsten der Sicherheit — als Streckenbelastungen behandelt werden können.

Der Materialbedarf, die Herstellungs- und Montagekosten sind für die beiden zur Untersuchung stehenden Pratzenkonstruktionen annähernd gleich. Unterschiede bestehen dagegen in der durch sie verursachten Beanspruchung der Gefäßwand. Im Interesse der optimalen Werkstoffausnutzung muß — im Sinne des bereits Gesagten — eine Apparatpratzenausgestaltung angestrebt werden, bei der sich aus der Abstützung die kleinstmöglichen Spannungen in Umfangsrichtung ergeben. Diese Tatsache, d. h. das Streben nach wirtschaftlicher Ausgestaltung läßt die Verwendung der Apparatpratzen mit waagrechter Plattenversteifung an Stelle der üblichen unverteiften Pratzen begründet erscheinen. Da jedoch das Fachschrifttum keine Beziehungen zur Bestimmung der Spannungen kennt, wie sie durch Apparatpratzen mit waagrechter Plattenversteifung verursacht werden, soll hier vor der eigentlichen Behandlung der Bemessung solcher Unterstützungen zunächst ein detailliertes Verfahren zur Berechnung der Spannungen entwickelt werden, die unter der Einwirkung der durch Apparatpratzenreaktionen verursachten Streckenbelastung auftreten.

Die Untersuchungen sollen auf jene Konstruktionen beschränkt bleiben, bei denen die Apparatpratze ohne Zwischenschaltung eines Auflagerbleches unmittelbar an die kreiszyllindrige Gefäßwand angeschweißt ist. In erster Annäherung sei hierbei angenommen, daß sich aus der mit waagrechter Platte versteiften Apparatpratze die in Abb. 1b dargestellte Streckenbelastung ergibt, d. h. es wird von der bei praktischen Berechnungen üblichen Vereinfachung ausgegangen. Angenommen sei weiterhin, daß die Streckenbelastungen an einem Hauptkreis der unendlich langen Kreiszyllinderschale wirken, und dies auf der Grundlage, daß die Wirkung der unendlichen Ausdehnung durch die an den Gefäßwandrändern in der Regel vorhandenen Versteifungen (Deckel, Ring usw.) im konkreten Fall gesichert ist.

## 2. Spannungen infolge lokaler Streckenbelastung konstanter Größe

Weiter oben ist bereits festgestellt worden, daß die durch eine waagrechte Platte versteifte Apparatzpratte längs eines dem Wert  $x = \text{konst.}$  zugehörigen Hauptkreises senkrecht auf die Schalenoberfläche steht und

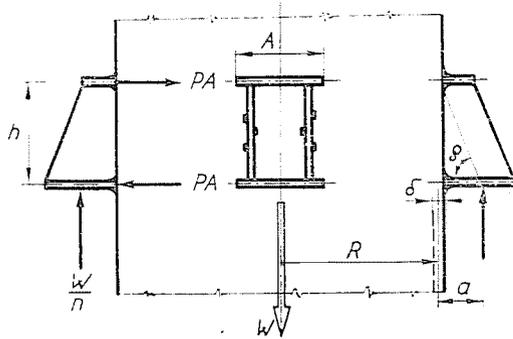


Abb. 2

eine Streckenbelastung verursacht, die in erster Annäherung als konstant groß angesetzt werden kann. Die Belastung soll durch die Abb. 2 veranschaulicht werden, in der ein Gefäßwandteil mit den angeschweißten Pratten und die aus der Abstützung herrührenden Kraftwirkungen eingezeichnet sind.

Den aus dem Gewicht von Apparat und Füllung (bei Aufstellung im Freien auch den aus dem Winddruck) herrührenden Kräften halten die an den Apparatzpratten auftretenden  $W/n$  großen Reaktionskräfte das Gleichgewicht. Das Moment  $W/n \cdot a$  aus der Reaktionskraft wird an den waagrecht liegenden Platten als Moment des Kräftepaars  $PAh$  längs der Plattenbreite auf den Gefäßmantel übertragen. An diesem greift also lokal die auf die Schalenoberfläche normale, konstant große Streckenbelastung

$$P = \pm \frac{1}{A} \frac{a}{h} \frac{W}{n} = \pm \frac{\cotg \varphi}{2R\theta_0} \frac{W}{n} \quad (1)$$

an. Ist die Apparatzpratte genügend hoch ( $h \geq 3\sqrt{R\delta}$ ), dann können die beiden einander entgegengerichteten Streckenbelastungen unabhängig voneinander untersucht werden. Für die Bemessung und Überprüfung ist bei den durch Innendruck beanspruchten Gefäßwänden die positive (nach außen gerichtete), bei Außendruck hingegen die negative (nach innen weisende) Streckenbelastung maßgebend. Im übrigen nimmt die Berechnung in beiden Fällen den gleichen Verlauf.

Zur Erleichterung der Rechenarbeit wird man die Streckenbelastung  $P$  auf die in Abb. 3 dargestellte Weise zweckmäßig in die mit dem Index  $a$  zu be-

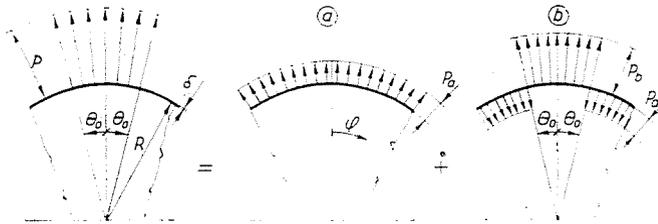


Abb. 3

zeichnende symmetrische und in die mit dem Index  $b$  zu bezeichnende antisymmetrische Belastung zerlegen.  $P_a$  und  $P_b$  errechnen sich entsprechend zu

$$P_a = \frac{n\Theta_0}{\pi} P, \quad (2)$$

$$P_b = \left(1 - \frac{n\Theta_0}{\pi}\right) P. \quad (3)$$

Die durch die Streckenbelastungen  $P_a$  und  $P_b$  geweckten Spannungen können unabhängig voneinander wie folgt berechnet werden.

### 2.1. Durch symmetrische Belastungen ausgelöste Höchstspannungen

Die Berechnung jener Spannungen, die unter den in Abb. 3 dargestellten Belastungen von der mit  $a$  bezeichneten Kräftegruppe geweckt werden, bereitet keinerlei Schwierigkeiten, weil sie auf Grund der für achsensymmetrische Belastungen geltenden Beziehungen vorgenommen werden kann. Die größten Schnittkräfte sowie die größten Meridian- und Ringmomente bzw. die aus diesen zu ermittelnden größten Membran- und Biegespannungen ergeben sich in der Wirkungslinie der Belastung (am Hauptkreis  $\bar{x} = 0$  entlang). Für die genannten Kräfte und Momente erhält man demnach mit einem  $\mu = 0,3$  die Beziehungen (3)

$$N_{\alpha a} = 0 \quad (4a-b)$$

$$N_{\tau a} = 0,6427 \sqrt{\frac{R}{\delta}} P_a$$

$$M_{\alpha a} = 0,1945 \sqrt{R\delta} P_a$$

$$M_{\tau a} = 0,05835 \sqrt{R\delta} P_a \quad (4c-d)$$

Die schnittkraftbedingten Membranspannungen sowie die von den Meridian- und Ringmomenten herrührenden größten Biegespannungen können — bekanntlich — aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}\sigma_{Mx} &= \frac{N_x}{\delta}, \\ \sigma_{M\varphi} &= \frac{N_\varphi}{\delta}, \\ \sigma_{Bx} &= \pm \frac{6M_x}{\delta^2}, \\ \sigma_{B\varphi} &= \pm \frac{6M_\varphi}{\delta^2}\end{aligned}\tag{5a-d}$$

ermittelt werden.

Mit (4a—d) leiten sich aus (5a—d) folgende Formeln für die Bestimmung der größten Membran- und Biegespannungen bzw. der ihnen proportionalen dimensionslosen Spannungskoeffizienten ab:

$$\bar{\sigma}_{Mxa} = \sqrt{\frac{\delta}{R} \frac{\delta}{P_a}} \sigma_{Mxa} = 0\tag{6a-b}$$

$$\bar{\sigma}_{M\varphi a} = \sqrt{\frac{\delta}{R} \frac{\delta}{P_a}} \sigma_{M\varphi a} = 0,6427,$$

$$\bar{\sigma}_{Bxa} = \sqrt{\frac{\delta}{R} \frac{\delta}{P_a}} \sigma_{Bxa} = 1,1669,\tag{6c-d}$$

$$\bar{\sigma}_{B\varphi a} = \sqrt{\frac{\delta}{R} \frac{\delta}{P_a}} \sigma_{B\varphi a} = 0,3501.$$

Bezieht man die Spannungskoeffizienten auf die Streckenbelastung  $P$ , dann hat man mit (2) die Beziehungen

$$\bar{\sigma}_{Mxa} = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{M\varphi a} = 0,6427 \frac{n\theta_0}{\pi},$$

$$\bar{\sigma}_{Bxa} = 1,1669 \frac{n\theta_0}{\pi},\tag{7a-d}$$

$$\bar{\sigma}_{B\varphi a} = 0,3601 \frac{n\theta_0}{\pi}.$$

## 2.2. Durch antimetrische Belastungen ausgelöste Größtspannungen

Eine weit verwickeltere Aufgabe scheint die Bestimmung jener inneren Belastung darzustellen, die auf die Kräftegruppe  $b$  zurückzuführen ist, weil die Streckenbelastung längs des belasteten Hauptkreises — in Abhängigkeit von  $\varphi$  — schwankt. Die Funktionsreihe, die die Schwankungen, d. h. die Streckenbelastung beschreibt, wird — nach der Theorie der Fourierreihen — die Form

$$P(\varphi) = \sum_{\bar{\vartheta}=1}^{\infty} P_{\bar{\vartheta}} \cos(\bar{\vartheta}\varphi) \quad (8)$$

haben müssen, wobei  $P$  und  $\bar{\vartheta}$  anhand der Beziehungen

$$P_{\bar{\vartheta}} = \frac{2P}{\pi} \frac{\sin(\bar{\vartheta}\Theta_0)}{\bar{\vartheta}} \quad (9)$$

bzw.

$$\bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{n}$$

bestimmt werden können.

Die Spannungen, die durch die Belastungen gemäß (8) geweckt werden, wird man zweckmäßig durch Lösung der aus der allgemeinen Zylindertheorie abgeleiteten und nach verschiedenen Vernachlässigungen aufgestellten Differentialgleichungen bestimmen.

Die homogenen Teile der Differentialgleichungen, die die Formänderungen beschreiben, lassen sich (weil am Zylinder nur die Randbelastung angreift) in der Form (2)

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1-\mu}{2} u'' + \frac{1+\mu}{2} v'' + \mu w' &= 0, \\ \frac{1+\mu}{2} u'' + v'' + \frac{1-\mu}{2} v'' + w' &= 0, \quad (10a-c) \\ \mu u' + v + w + k\Delta w &= 0 \end{aligned}$$

schreiben.

Als Lösungen des Systems der homogenen partiellen Differentialgleichungen (10a—c) erhält man nach Einführung der Verschiebungsfunktion  $\eta(\bar{x})$  für den Fall der Streckenbelastung gemäß (7) (s. [1])

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\bar{\vartheta}=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [C_{j\bar{\vartheta}} (-\bar{\vartheta}^2 \bar{\psi}'_{j\bar{\vartheta}} - \mu \bar{\psi}''_{j\bar{\vartheta}})] \cos(\bar{\vartheta}\varphi), \\ v &= \sum_{\bar{\vartheta}=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \{C_{j\bar{\vartheta}} [\bar{\vartheta}(2+\mu) \bar{\psi}''_j - \bar{\vartheta}^3 \bar{\psi}_{j\bar{\vartheta}}]\} \sin(\bar{\vartheta}\varphi), \\ w &= \sum_{\bar{\vartheta}=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [C_{j\bar{\vartheta}} (\bar{\psi}'''_{j\bar{\vartheta}} - 2\bar{\vartheta}^2 \bar{\psi}''_{j\bar{\vartheta}} + \bar{\vartheta}^4 \bar{\psi}_{j\bar{\vartheta}})] \cos(\bar{\vartheta}\varphi). \end{aligned}$$

Für die Schnittkräfte und die Momente hingegen hat man

$$N_x = \frac{D}{R} (1 - \mu^2) \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [C_{j\vartheta} (-\vartheta \bar{\psi}'_{j\vartheta})] \cos(\vartheta\varphi), \quad (12)$$

$$N_\varphi = \frac{D}{R} (1 - \mu^2) \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 (C_{j\vartheta} \bar{\psi}''_{j\vartheta}) \cos(\vartheta\varphi) \quad (13)$$

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = N = \frac{D}{R} (1 - \mu^2) \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 (C_{j\vartheta} \vartheta \bar{\psi}''_{j\vartheta}) \sin(\vartheta\varphi) \quad (14)$$

$$M_x = \frac{B}{R^2} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \{C_{j\vartheta} [\bar{\psi}''''_{j\vartheta} - \vartheta^2 (2 + \mu) \bar{\psi}''_{j\vartheta} + \vartheta^4 (1 + 2\mu) \bar{\psi}'_{j\vartheta} - \mu \vartheta^6 \bar{\psi}_{j\vartheta}]\} \cos(\vartheta\varphi) \quad (15)$$

$$M_\varphi = \frac{B}{R^2} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \{C_{j\vartheta} [\mu \bar{\psi}''''_{j\vartheta} - \vartheta^2 (1 + 2\mu) \bar{\psi}''_{j\vartheta} + \vartheta^4 (2 + \mu) \bar{\psi}'_{j\vartheta} - \vartheta^6 \bar{\psi}_{j\vartheta}]\} \cos(\vartheta\varphi), \quad (16)$$

$$M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = M = \frac{B}{R^2} (1 - \mu) \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [C_{j\vartheta} (-\vartheta \bar{\psi}''''_{j\vartheta} + 2\vartheta^3 \bar{\psi}''_{j\vartheta} - \vartheta^5 \bar{\psi}'_{j\vartheta})] \sin(\vartheta\varphi), \quad (17)$$

$$Q_x = \frac{B}{R^2} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [C_{j\vartheta} (\bar{\psi}''''_{j\vartheta} - 3\vartheta^2 \bar{\psi}''_{j\vartheta} + 3\vartheta^4 \bar{\psi}'_{j\vartheta} - \vartheta^6 \bar{\psi}_{j\vartheta})] \cos(\vartheta\varphi), \quad (18)$$

$$Q_\varphi = \frac{B}{R^2} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 [C_{j\vartheta} (-\vartheta \bar{\psi}''''_{j\vartheta} + 3\vartheta^3 \bar{\psi}''_{j\vartheta} - 3\vartheta^5 \bar{\psi}'_{j\vartheta} + \vartheta^7 \bar{\psi}_{j\vartheta})] \sin(\vartheta\varphi). \quad (19)$$

Bezeichnet man die Ordnung der Ableitungen mit  $\eta$ , dann schreiben sich die in den Beziehungen (9)–(19) figurierenden Funktionen  $\bar{\psi}_{j\vartheta}^{(\eta)}$  wie folgt:

$$\bar{\psi}_{1\vartheta}^{(\eta)} = e^{-\alpha_1 \bar{x}} [A_{1\eta} \cos(\beta_1 \bar{x}) + A_{2\eta} \sin(\beta_1 \bar{x})] \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{2\vartheta}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_1 \bar{x}} [-A_{2\eta} \cos(\beta_1 \bar{x}) + A_{1\eta} \sin(\beta_1 \bar{x})], \\ \bar{\psi}_{3\vartheta}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_2 \bar{x}} [A_{3\eta} \cos(\beta_2 \bar{x}) + A_{4\eta} \sin(\beta_2 \bar{x})], \\ \bar{\psi}_{4\vartheta}^{(\eta)} &= e^{-\alpha_2 \bar{x}} [-A_{4\eta} \cos(\beta_2 \bar{x}) + A_{3\eta} \sin(\beta_2 \bar{x})]. \end{aligned} \quad (20b-d)$$

Die Koeffizienten in (20a—d) können aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2\bar{a} + \beta}{2}; & \beta_1 &= \frac{\beta + 2\bar{b}}{2}; \\ \alpha_2 &= \frac{2\bar{a} - \beta}{2}; & \beta_2 &= \frac{\beta - 2\bar{b}}{2} \end{aligned} \quad (21a-d)$$

berechnet werden. Hierbei gilt

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \sqrt{\frac{(\vartheta^4 + \beta^4/4)^{1/2} + \vartheta^2}{2}}, \\ \bar{b} &= \sqrt{\frac{(\vartheta^4 + \beta^4/4)^{1/2} - \vartheta^2}{2}}, \end{aligned} \quad (22a-c)$$

$$\beta = \sqrt[4]{3(1 - \nu^2) \left(\frac{R}{\delta}\right)^2},$$

ferner

$$\begin{aligned} A_{1\eta} &= -\alpha_1 A_{1(\eta-1)} + \beta_1 A_{2(\eta-1)}, \\ A_{2\eta} &= -\beta_1 A_{1(\eta-1)} - \alpha_1 A_{2(\eta-1)}, \end{aligned} \quad (23a-b)$$

$$\begin{aligned} A_{3\eta} &= -\alpha_2 A_{3(\eta-1)} + \beta_2 A_{4(\eta-1)}, \\ A_{4\eta} &= -\beta_2 A_{3(\eta-1)} - \alpha_2 A_{4(\eta-1)}, \end{aligned} \quad (23c-d)$$

während

$$\begin{aligned} A_{10} &= 1; & A_{30} &= 1; \\ A_{20} &= 0; & A_{40} &= 0. \end{aligned} \quad (24a-d)$$

Die Integrationskonstanten  $C_{j\theta}$  in den Beziehungen (11)—(19) können auf Grund der bekannten Randbedingungen unschwer ermittelt werden.

Wirkt die Streckenbelastung in relativ großem Abstand von den beiden Zylinderenden (es genügt ein  $\bar{x} = \pm 1$ ) und wählt man den Ursprung des Koordinatensystems so, daß am belasteten Hauptkreis  $\bar{x} = 0$  wird, dann schreiben sich die Funktionen, die die Randbedingungen beschreiben, zu

$$\begin{aligned} N(0, \varphi) &= 0, \\ u(0, \varphi) &= 0, \\ w'(0, \varphi) &= 0, \\ Q_x(0, \varphi) &= -\frac{1}{2} P(\varphi). \end{aligned} \quad (25a-d)$$

Da die Randbedingungen für jeden  $\vartheta$ -Wert befriedigt sein müssen, nehmen sie für die Bestimmung der den verschiedenen  $\vartheta$ -Werten zugehörigen Integrationskonstanten  $C_{j\vartheta}$  — unter Berücksichtigung der durch die Verschiebungsfunktionen ausgedrückten Zusammenhänge zwischen Verschiebungen und Schnittkräften sowie der Formeln (20a—d) — die Form

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} A_{j3} &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} (\vartheta^2 A_{j1} + \mu A_{j3}) &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} (A_{j5} - 2\vartheta^2 A_{j3} + \vartheta^4 A_{j1}) &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} (A_{j7} - 3\vartheta^2 A_{j5} + 3\vartheta^4 A_{j3} - \\ &\quad - \vartheta^6 A_{j1}) = 6(1 - \mu^2) \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \frac{P_{\vartheta}}{E} \end{aligned} \quad (26a-b)$$

an.

Mit diesem Gleichungssystem (26a—d) lassen sich die Zusammenhänge (25a—d), die die Randbedingungen beschreiben, auch in die einfachere Form

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} A_{j1} &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} A_{j3} &= 0 \end{aligned} \quad (27a-b)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} A_{j5} &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} A_{j7} &= 6(1 - \mu^2) \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \frac{P_{\vartheta}}{E}. \end{aligned} \quad (27c-d)$$

Nach der Cramer-Regel schreiben sich die Lösungen der Gleichungen (27a—d) zu

$$\begin{aligned} C_{1\vartheta} &= \frac{H_1}{T}; & C_{3\vartheta} &= \frac{H_3}{T}; \\ C_{2\vartheta} &= \frac{H_2}{T}; & C_{4\vartheta} &= \frac{H_4}{T}, \end{aligned}$$

wobei  $H_1 \dots H_4$  und  $T$  die aus den entsprechenden Koeffizienten zusammengesetzten Determinanten bezeichnen.

Mit den nunmehr in der Gestalt  $C_{j\vartheta} = \bar{C}_{j\vartheta} \frac{P_{\vartheta}}{E}$  bestimmten Integrationskonstanten können die durch die Kräftegruppe  $b$  verursachten Schnittkräfte und Momente anhand der Beziehungen (12)–(19) rechnerisch ermittelt werden.

Nach den Untersuchungen ergeben sich die größten Spannungen auch in diesem Falle in der Wirkungslinie der Belastung — genauer in dem den Koordinaten  $\bar{x} = 0$  und  $\varphi = 0$  zugehörigen Querschnitten. Für die hier geweckten — einem gegebenen Wert zugeordneten — dimensionslosen Schnittkraft- und Moment-Beiwerte gelten

$$\bar{N}_{x\vartheta} = \frac{N_{x\vartheta}}{P_{\vartheta}} = \frac{\delta}{R} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} \bar{C}_{j\vartheta} (-\vartheta A_{j2}),$$

$$\bar{N}_{\varphi\vartheta} = \frac{N_{\varphi\vartheta}}{P_{\vartheta}} = \frac{\delta}{R} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} \bar{C}_{j\vartheta} A_{j4}. \quad (29a-d)$$

$$\bar{M}_{x\vartheta} = \frac{M_{x\vartheta}}{P_{\vartheta} R} = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\delta}{R} \right)^3 \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} \bar{C}_{j\vartheta} [A_{j6} - \vartheta^2(2+\mu)A_{j4} + \vartheta^4(1+2\mu)A_{j2} - \mu\vartheta^6 A_{j0}],$$

$$\bar{M}_{\varphi\vartheta} = \frac{M_{\varphi\vartheta}}{P_{\vartheta} R} = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\delta}{R} \right)^3 \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} \bar{C}_{j\vartheta} [\mu A_{j6} - \vartheta^2(1+2\mu)A_{j4} + \vartheta^4(2+\mu)A_{j2} - \vartheta^6 A_{j0}].$$

Für die Spannungskoeffizienten aus den Schnittkräften und Momenten erhält man mit (5a–d)

$$\bar{\sigma}_{Mx\vartheta} = \sqrt{\frac{\delta}{R}} \frac{\delta}{P_{\vartheta}} \sigma_{mx\vartheta} = \sqrt{\frac{\delta}{R}} \bar{N}_{x\vartheta},$$

$$\bar{\sigma}_{M\varphi\vartheta} = \sqrt{\frac{\delta}{R}} \frac{\delta}{P_{\vartheta}} \sigma_{m\varphi\vartheta} = \sqrt{\frac{\delta}{R}} \bar{N}_{\varphi\vartheta}, \quad (30a-b)$$

$$\bar{\sigma}_{Bx\vartheta} = \sqrt{\frac{\delta}{R}} \frac{\delta}{P_{\vartheta}} \sigma_{Bx\vartheta} = 6 \sqrt{\frac{R}{\delta}} \bar{M}_{x\vartheta},$$

$$\bar{\sigma}_{B\varphi\vartheta} = \sqrt{\frac{\delta}{R}} \frac{\delta}{P_{\vartheta}} \sigma_{B\varphi\vartheta} = 6 \sqrt{\frac{R}{\delta}} \bar{M}_{\varphi\vartheta}. \quad (30c-d)$$

Die durch die Kräftegruppe  $b$  verursachten Spannungen bzw. die Spannungskoeffizienten bezüglich der Streckenbelastung  $P$  errechnen sich somit zu

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{Mxb} &= \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{P_{\vartheta}}{P} \bar{\sigma}_{Mx\vartheta}, \\ \bar{\sigma}_{Mqb} &= \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{P_{\vartheta}}{P} \bar{\sigma}_{Mq\vartheta}, \\ \bar{\sigma}_{Bxb} &= \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{P_{\vartheta}}{P} \bar{\sigma}_{Bx\vartheta}, \\ \bar{\sigma}_{Bqb} &= \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{P_{\vartheta}}{P} \bar{\sigma}_{Bq\vartheta}.\end{aligned}\quad (31a-d)$$

Mit den Werten für  $P_{\vartheta}$  gemäß (9) gehen diese Formeln in die Gestalt

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{Mxb} &= \frac{2}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{Mx\vartheta} \frac{\sin(\vartheta \Theta_0)}{\vartheta}, \\ \bar{\sigma}_{Mqb} &= \frac{2}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{Mq\vartheta} \frac{\sin(\vartheta \Theta_0)}{\vartheta},\end{aligned}\quad (32a-b)$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{Bxb} &= \frac{2}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{Bx\vartheta} \frac{\sin(\vartheta \Theta_0)}{\vartheta}, \\ \bar{\sigma}_{Bqb} &= \frac{2}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{Bq\vartheta} \frac{\sin(\vartheta \Theta_0)}{\vartheta}.\end{aligned}\quad (32c-d)$$

### 2.3. Resultierende Spannungen

Die größten Membran- und Biegespannungen, die aus der normal auf die Schalenoberfläche wirkenden Streckenlast  $P = \text{konst.}$  herrühren, treten als Summe der durch die Kräftesysteme  $a$  und  $b$  geweckten Größtspannungen auf. Zur Bestimmung der mit dem Koeffizienten  $\sqrt{\delta/R} \delta/P$  multiplizierten Spannungswerte dienen nach (7a-d) und (32a-d) die Formeln

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{Mx} &= \frac{2}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{Mx\vartheta} \frac{\sin(\vartheta \Theta_0)}{\vartheta}, \\ \bar{\sigma}_{Mq} &= 0,6427 \frac{n \Theta_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{Mq\vartheta} \frac{\sin(\vartheta \Theta_0)}{\vartheta}, \\ \bar{\sigma}_{Bx} &= \pm 1,1669 \frac{n \Theta_0}{\pi} \pm \frac{2}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{Bx\vartheta} \frac{\sin(\vartheta \Theta_0)}{\vartheta}, \\ \bar{\sigma}_{Bq} &= \pm 0,3501 \frac{n \Theta_0}{\pi} \pm \frac{2}{\pi} \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{Bq\vartheta} \frac{\sin(\vartheta \Theta_0)}{\vartheta}.\end{aligned}\quad (33a-d)$$

Schließlich errechnen sich die resultierenden Größtspannungen in den Randfasern des Querschnitts mit den Koordinaten  $\bar{x} = 0$  und  $\varphi = 0$  zu

$$\bar{\sigma}_{Rx} = \pm 1,1669 \frac{n\theta_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{\bar{y}=1}^{\infty} (\bar{\sigma}_{Mx\bar{y}} \pm \bar{\sigma}_{Bx\bar{y}}) \frac{\sin(\vartheta\theta_0)}{\bar{y}}, \quad (34a)$$

$$\bar{\sigma}_{R\varphi} = (0,6427 \pm 0,3501) \frac{n\theta_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{\bar{y}=1}^{\infty} (\bar{\sigma}_{M\varphi\bar{y}} \pm \bar{\sigma}_{B\varphi\bar{y}}) \frac{\sin(\vartheta\theta_0)}{\bar{y}}. \quad (34b)$$

#### 2.4. Die Berechnung der Spannungen

Anhand der hier abgeleiteten Beziehungen können die Größtspannungen die eine normal auf die Schalenoberfläche wirkende Streckenbelastung  $P = \text{konst.}$  in einem beliebigen (von den Enden der Schale jedoch in größerem Abstand verlaufenden) Hauptkreis weckt, rechnerisch bestimmt werden. Wenngleich die Berechnungen grundsätzlich durchführbar sind, werden sich die Beziehungen in ihrer gegenwärtigen Form wegen ihrer Kompliziertheit für die Praxis kaum als verwendbar erweisen.

Um die Berechnung der Größtspannungen, d. h. die Bemessung bzw. Prüfung der Stützen zu erleichtern, hat Verfasser Tabellen und Diagramme ausgearbeitet, die diese Berechnung und demnach die Bemessung und Überprüfung der Abstützung wesentlich vereinfachen.

##### 2.4.1. Der Berechnungsgang

Die Berechnungen wurden für die Schalenkennwerte  $R/\delta = 100, 125, 150, 175$  und  $200$ , unter Annahme eines  $\mu = 0,3$  und einer Apparatpratzenzahl von  $n = 4$  für die den Werten  $= 0, 4, 8 \dots 100$  zugehörigen Belastungen vorgenommen. Schließlich wurden die mit dem Koeffizienten  $\sqrt{\delta/R} \delta/P$  multiplizierten dimensionslosen Spannungskoeffizienten bestimmt.

Die Berechnung nahm folgenden Gang:

1. Berechnung der Werte für  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1,$  und  $\beta_2$  anhand der Beziehungen (21a–d).
2. Bestimmung der Koeffizienten  $A_{j\bar{n}}$  aus den Beziehungen (23a–d).
3. Ermittlung der Integrationskonstanten  $C_{j\delta}$  anhand der Gleichungen (28a–d), die die Randbedingungen gemäß (25a–d) beschreiben.
4. Bestimmung der Schnittkräfte und der Ring- und Drillmomente auf Grund der Beziehungen (4a–d) und (29a–d).
5. Ermittlung der Membran- und der Biege- sowie der resultierenden Spannung bzw. der Spannungskoeffizienten aus den Zusammenhängen (33a–d) und (34a–d).
6. Tabellarische Zusammenfassung der Resultate und deren Auftragung in Schaubilder.

## 2.4.2. Zusammenfassung der Resultate

Ohne auf die Erörterung der Teilergebnisse seiner Berechnungen hier einzugehen, beschränkt sich Verfasser auf die tabellarische Zusammenfassung der ermittelten Endergebnisse.

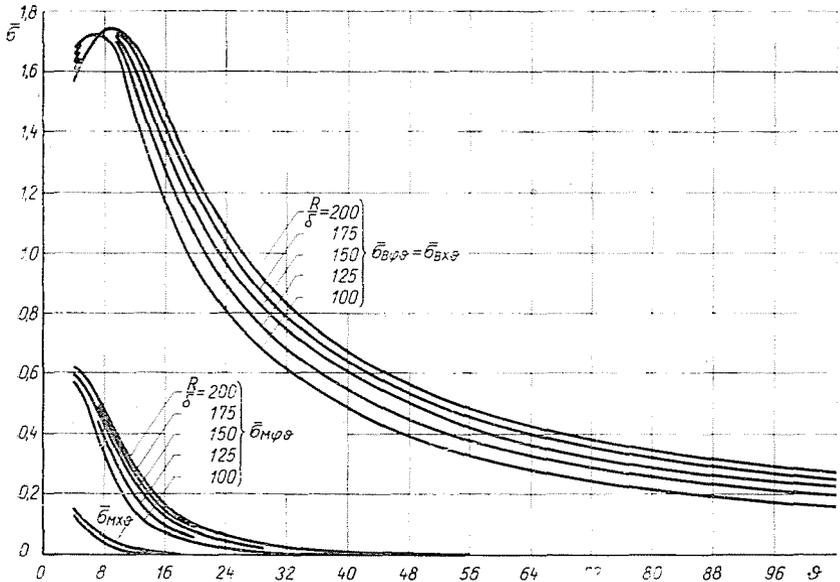


Abb. 4

Entsprechend enthält die Tabelle 1 die anhand der Beziehungen (30a—d) berechneten Werte der Spannungskoeffizienten  $\bar{\sigma}_{Mx\theta}$ ,  $\bar{\sigma}_{M\varphi\theta}$  sowie  $\bar{\sigma}_{Bx\theta} = \bar{\sigma}_{B\varphi\theta} = \bar{\sigma}_{B\theta}$  in Abhängigkeit von den untersuchten  $\theta$ - und  $R/\delta$ -Werten.

Graphisch sind die Ergebnisse in Form einer Kurvenschaar in Abb. 4 dargestellt.

Auf Grund der Werte aus Tabelle 1 sowie der Beziehungen (9), (33a—d) und (34a—d) für die Werte

$$\frac{R}{\delta} = 100, 150 \text{ und } 200 \text{ bzw. für}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{96}, \frac{\pi}{64}, \frac{\pi}{48}, \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{16} \text{ und } \frac{\pi}{8}$$

Koeffizienten  $\sqrt{\delta/R} \delta/P$  multiplizierten Spannungswerte ermittelt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefaßt. Zur Ausschaltung der geringfügigen

Tabelle 1

$\frac{R}{\delta}$	100			125			150			175			200		
	$\bar{\sigma}_{Bx\delta} = \bar{\sigma}_{Bq\delta} = \bar{\sigma}_{B\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mq\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mx\delta}$	$\bar{\sigma}_{B\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mq\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mx\delta}$	$\bar{\sigma}_{B\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mq\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mx\delta}$	$\bar{\sigma}_{B\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mq\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mx\delta}$	$\bar{\sigma}_{B\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mq\delta}$	$\bar{\sigma}_{Mx\delta}$
0	$\bar{\sigma}_{Bqa} = 0,3501;$			$\bar{\sigma}_{Bxa} = 1,1669;$			$\bar{\sigma}_{Mqa} = 0,6427;$			$\bar{\sigma}_{Mxa} = 0;$					
4	1,6560	0,5714	0,1431	1,6303	0,5859	0,1470	1,6043	0,5977	0,1493	1,5782	0,6046	0,1506	1,5527	0,6089	0,1510
8	1,7124	0,3558	0,0445	1,7206	0,4012	0,0511	1,7271	0,4456	0,0557	1,7325	0,4772	0,0586	1,7367	0,4987	0,0599
12	1,4791	0,1559	0,0124	1,5561	0,2088	0,0176	1,6244	0,2553	0,0213	1,6724	0,2892	0,0237	1,7045	0,3098	0,0249
16	1,1742	0,0783	0,0049	1,2862	0,1061	0,0068	1,3793	0,1343	0,0082	1,4458	0,1574	0,0094	1,4945	0,1755	0,0103
20	0,9601	0,0416	0,0021	0,0665	0,0579	0,0029	1,1543	0,0741	0,0037	1,2228	0,0893	0,0042	1,2743	0,1029	0,0045
24	0,8095	0,0223	0,0010	0,9085	0,0337	0,0014	0,9756	0,0453	0,0018	1,0400	0,0545	0,0021	1,0886	0,0615	0,0023
28	0,6982	0,0154	0,0005	0,7835	0,0220	0,0008	0,8545	0,0287	0,0010	0,9078	0,0344	0,0012	0,9442	0,0393	0,0014
32	0,6146	0,0109	0,0003	0,6871	0,0149	0,0005	0,7522	0,0189	0,0006	0,8022	0,0227	0,0007	0,8381	0,0264	0,0008
36	0,5441	0,0075	0,0002	0,6167	0,0104	0,0003	0,6745	0,0133	0,0004	0,7196	0,0161	0,0005	0,7515	0,0186	0,0005
40	0,4866	0,0053	0,0001	0,5486	0,0074	0,0002	0,6068	0,0095	0,0002	0,6469	0,0116	0,0003	0,6792	0,0135	0,0003
44	0,4335	0,0041	0,0001	0,4944	0,0057	0,0001	0,5498	0,0073	0,0002	0,5889	0,0089	0,0002	0,6203	0,0102	0,0002
48	0,3955	0,0032	0,0001	0,4492	0,0043	0,0001	0,5041	0,0055	0,0001	0,5412	0,0067	0,0001	0,5698	0,0079	0,0001
52	0,3588	0,0024		0,4176	0,0033		0,4644	0,0043	0,0001	0,4948	0,0053	0,0001	0,5288	0,0063	0,0001
56	0,3285	0,0020		0,3840	0,0028		0,4294	0,0036		0,6400	0,0042		0,4870	0,0049	0,0001
60	0,3055	0,0016		0,3508	0,0022		0,3957	0,0029		0,4316	0,0035		0,4581	0,0041	
64	0,2825	0,0014		0,3278	0,0019		0,3725	0,0024		0,4028	0,0030		0,4315	0,0035	
68	0,2625	0,0011		0,3090	0,0015		0,3495	0,0020		0,3812	0,0024		0,4051	0,0028	
72	0,2465	0,0009		0,2876	0,0013		0,3277	0,0016		0,3580	0,0020		0,3850	0,0024	
76	0,2295	0,0008		0,2740	0,0011		0,3105	0,0014		0,3411	0,0017		0,3662	0,0021	
80	0,2185	0,0007		0,2634	0,0010		0,2985	0,0012		0,3256	0,0015		0,3447	0,0018	
84	0,2055	0,0006		0,2478	0,0008		0,2845	0,0011		0,3144	0,0013		0,3331	0,0016	
88	0,1945	0,0005		0,2376	0,0007		0,2709	0,0009		0,2991	0,0011		0,3175	0,0014	
92	0,1851	0,0005		0,2250	0,0006		0,2593	0,0008		0,2855	0,0010		0,3065	0,0012	
96	0,1775	0,0004		0,2138	0,0006		0,2487	0,0007		0,2770	0,0009		0,2978	0,0010	
100	0,1685	0,0004		0,2089	0,0005		0,2401	0,0006		0,2654	0,0008		0,2856	0,0009	

gen Streuung in den rechnerisch ermittelten Werten, hat Verfasser in Abb. 5 auch den funktionellen Zusammenhang zwischen den Spannungskoeffizienten und  $\sqrt{R/\delta} \Theta_0$  aufgetragen.

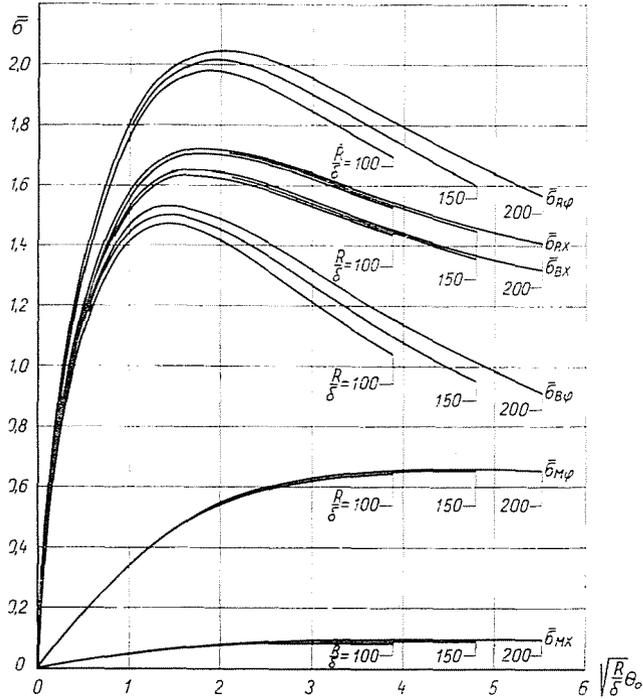


Abb. 5

### 2.5. Messung der Spannungen

Um die Ergebnisse aus den auf Grund theoretischer Erwägungen abgeleiteten Beziehungen auf ihre Richtigkeit prüfen zu können, hat Verfasser an einer an beiden Enden versteiften kreiszylindrischen Schale Festigkeitsmessungen vorgenommen. Die Schale hatte folgende Kennwerte:

$$\begin{aligned}
 R &= 50 \text{ cm} & E &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \\
 \delta &= 0,4 \text{ cm} & \mu &= 0,3 \\
 L &\approx 4R
 \end{aligned}$$

Bei den Messungen (Abb. 6) wurde die Streckenbelastung über einen mit Flüssigkeit gefüllten Gummischlauch (2) auf den oberen Abschnitt der Schale (1) übertragen, während die Reaktionskraft in Gestalt einer gleichmäßig

Tabelle 2

$\frac{R}{\delta}$	$\Theta_0$ [rad]	$\left  \frac{R}{\delta} \Theta_0 \right $	$\bar{\sigma}$					
			$\bar{\sigma}_{B\varphi}$	$\bar{\sigma}_{Bz}$	$\bar{\sigma}_{M\varphi}$	$\bar{\sigma}_{Mz}$	$\bar{\sigma}_{R\varphi}$	$\bar{\sigma}_{Rz}$
100	$\pi/96$	0.3272	0.9256	0.9597	0.1308	0.0173	1.0565	0.9770
	$\pi/64$	0.4909	1.1162	1.1672	0.1917	0.0256	1.3079	1.1928
	$\pi/48$	0.6545	1.2452	1.3133	0.2484	0.0336	1.4936	1.3469
	$\pi/32$	0.9817	1.4296	1.5317	0.3488	0.0484	1.7784	1.5801
	$\pi/24$	1.3090	1.4718	1.6080	0.4314	0.0612	1.9033	1.6692
	$\pi/16$	1.9635	1.4326	1.6368	0.5481	0.0801	1.9808	1.7170
	$\pi/12$	2.6180	1.2998	1.5721	0.6135	0.0903	1.9134	1.6624
	$\pi/8$	3.9270	1.0383	1.4467	0.6563	0.0887	1.6946	1.5354
150	$\pi/96$	0.4008	1.0526	1.0866	0.1599	0.0199	1.2126	1.1066
	$\pi/64$	0.6012	1.2299	1.2809	0.2323	0.0295	1.4622	1.3105
	$\pi/48$	0.8016	1.3427	1.4108	0.2980	0.0386	1.6408	1.4494
	$\pi/32$	1.2024	1.5033	1.6054	0.4092	0.0549	1.9125	1.6604
	$\pi/24$	1.6032	1.5026	1.6387	0.4937	0.0686	1.9963	1.7074
	$\pi/16$	2.4017	1.4017	0.6059	0.5978	0.0876	1.9995	1.6935
	$\pi/12$	3.2063	1.2399	1.5123	0.6428	0.0962	1.8828	1.6085
	$\pi/8$	4.8095	0.9530	1.3614	0.6552	0.0909	1.6082	1.4523
200	$\pi/96$	0.4628	1.1280	1.1620	0.1789	0.0211	1.3069	1.1831
	$\pi/64$	0.6942	1.2949	1.3460	0.2582	0.0311	1.5532	1.3771
	$\pi/48$	0.9256	1.3965	1.4646	0.3291	0.0406	1.7256	1.5052
	$\pi/32$	1.3884	1.5421	1.6442	0.4454	0.0575	1.9875	1.7017
	$\pi/24$	1.8512	1.5127	1.6488	0.5295	0.0714	2.0422	1.7202
	$\pi/16$	2.7768	1.3719	1.5761	0.6234	0.0901	1.9954	1.6662
	$\pi/12$	3.7024	1.1933	1.4655	0.6558	0.0980	1.8491	1.5635
	$\pi/8$	5.5536	0.9137	1.3221	0.6537	0.0913	1.5674	1.4134

verteilten Last den unteren Zylinderteil beanspruchte. Zwischen Gummischlauch und Dynamometer war eine Holzeinlage (3) und eine Stahlplatte (4) eingelegt. Die belastende Kraft lieferte eine Druckwasservorrichtung. Die Untersuchungen erfolgten bei veränderlichen Zentriwinkeln  $2\Theta_0$  mit der ihnen jeweils zugehörigen und als konstant angenommenen Streckenbelastung von  $P = 10$  kp/cm, wobei die Dehnungen in Umfangsrichtung und in Richtung der Erzeugenden mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen gemessen wurden. Aus den größten Dehnungen wurden nach dem Hookeschen Gesetz die größten Spannungen in Umfangsrichtung ermittelt. Die Ergebnisse einer aus sieben Einzelmessungen bestehenden Meßreihe sind in Abb. 6 aufgetragen und in Tabelle 3 ziffernmäßig zusammengefaßt.

Der Vergleich der gemessenen mit den auf theoretischem Wege ermittelten Werten (s. Abb. 6 — die voll ausgezogene Kurve) zeigt eine praktisch gute Übereinstimmung und dies besonders in dem üblichen Winkelbereich von  $0 < \Theta_0 < 7^\circ$ . (Die gestrichelte Linie in Abb. 6 veranschaulicht die Ergebnisse einer Annäherung, die im zweiten Teil dieser Studie [5] behandelt werden soll.) Die Streuung in den Meßergebnissen ist offenbar dem ungleichmäßigen Aufliegen des Gummischlauches zuzuschreiben. Zu erwähnen ist auch die Tatsache,

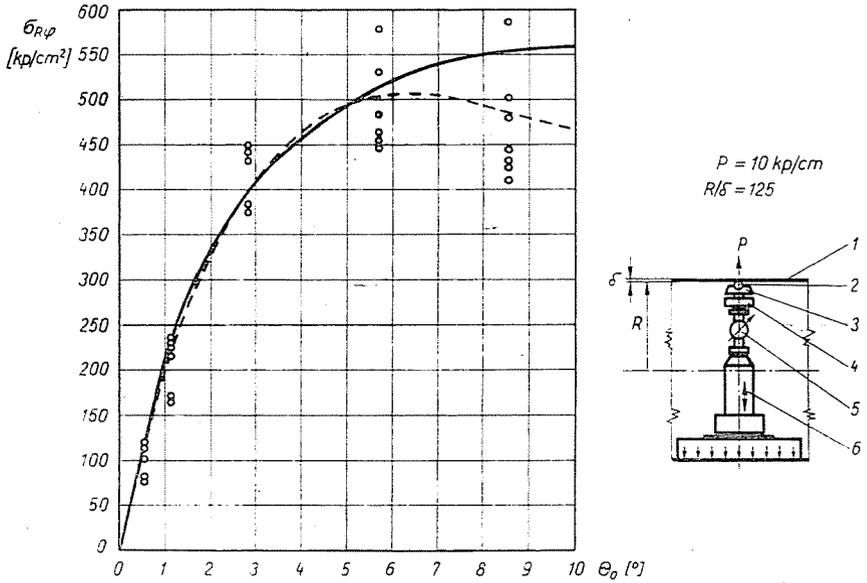


Abb. 6

Tabelle 3

Länge der belasteten Strecke [cm]	1	2	5	10	15
$\Theta_0 [0]$	0,57	1,14	2,86	5,73	8,59
$\sigma_{R\varphi} \text{ [kp/cm}^2\text.]$	78 114 81	171 165 171	432 384 432	442 483 579	588 432 546
	78 114 102 117	216 225 231 237	450 375 444 384	465 483 531 456	504 480 426 411

daß sich die Berechnungen auf den Fall  $n = 4$  beziehen, während die Messungen bei einem  $n = 2$  vorgenommen wurden. Da die Spannungen in Umfangsrichtung verhältnismäßig schnell abklingen, ist der obige Vergleich berechtigt, ja die so gewonnenen Resultate können bei ausreichender Genauigkeit auch für die Fälle von Apparatprätzenzahlen von  $2 \leq n \leq 8$  verallgemeinert werden, vorausgesetzt, daß  $\Theta_0 < \pi/4n$ .

Bemerkt sei hierzu noch, daß bei Bestimmung der Spannungen für den Abmessungsbereich von  $50 \leq R/\delta \leq 100$  mit den dem Wert  $R/\delta = 100$  zugehörigen Kräften gerechnet werden kann, weil sich der aus der Abweichung resultierende geringfügige Fehler im Sinne einer Erhöhung der Sicherheit auswirkt.

### Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit — die aus zwei Teilen besteht —, behandelt die Bemessung der Stützen für Druckbehälter. Sie gelangt zu Vorschlägen für eine als optimal zu bezeichnende Ausgestaltung der Apparatpratzenkonstruktion. Nach den Untersuchungen ist die Gefäßwandbeanspruchung durch Apparatpratzen mit Versteifung durch waagrechte Platten weit günstiger als die Beanspruchung durch die üblichen unversteiften Pratzen. Zur Berechnung der Gefäßwandbeanspruchung durch den versteiften Apparatpratzen war es erforderlich, die Spannungen zu bestimmen, die durch die lokale, normal auf die Schalenoberfläche wirkende Streckenlast konstanter Größe verursacht wird. Die theoretischen und experimentellen Untersuchungen hierüber sind im Teil I dieser Arbeit enthalten, während die weitere Erörterung des Problems dem Teil II vorbehalten bleibt.

### Literatur

1. VARGA, L.: Bestimmung der an randbelasteten Kreiszylinderschalen angreifenden Schnittkräfte und Schnittmomente Forsch. Ing.-Wes. Bd. 28, 1962.
2. FLÜGGE, W.: Stresses in Shells. Berlin, Springer Verlag 1960.
3. TIMOSHENKO, S.: Theory of Plates and Shells. New York, Mc. Graw-Hill 1959.
4. BROWNELL, E.: Process Equipment Design. New York, John Wiley, Inc.
5. VARGA, L.: Bestimmung der durch Apparatpratzen geweckten Spannungen und Ausbildung der optimalen Pratzenkonstruktion II (im Druck).

DR. LÁSZLÓ VARGA, Budapest, XI., Műegyetem rkp. 9, Ungarn