

BESTIMMUNG DER DURCH APPARATPRATZEN GEWECKTEN SPANNUNGEN UND AUSBILDUNG DER OPTIMALEN PRATZENKONSTRUKTION II.

Von

L. VARGA

Lehrstuhl für Chemisches Maschinenwesen und Landwirtschaftliche Industrien, Technische
Universität Budapest

(Eingegangen am 18. Dezember, 1967).

Vorgelegt von Prof. Dr. S. SZENTGYÖRGYI

Einleitung

Im ersten Teil der vorliegenden Studie [1] gelangte Verfasser zu der Feststellung, daß sich bei Verwendung von Apparatpratzen mit Versteifung durch waagrechte Platten weit günstigere Mantelbeanspruchungen ergeben als bei Abstützung auf die üblichen unversteiften Pratzen. Die aufstützungsbedingten Biegespannungen im Mantel wurden auf Grund der allgemeinen Theorie der Biegebeanspruchung kreiszylindrischer Schalen berechnet. Die hierbei abgeleiteten Zusammenhänge waren selbst nach Berücksichtigung gewisser Vereinfachungsannahmen (Annahme einer Streckenbelastung konstanter Größe, Vernachlässigung der Belastung in Richtung der Mantellinie sowie der Schweißnahtauswirkungen usw.) noch immer recht kompliziert und unübersichtlich, was ihre praktische Anwendung erschwert. Aus diesem Grunde war es erforderlich, weitere Überlegungen anzustellen und neuere Vereinfachungsannahmen einzuführen. Verfasser gelangte auf diese Weise zu Zusammenhängen, die sich bei ausreichender Verlässlichkeit dank ihrer Handlichkeit auch in der Praxis gut bewähren.

Vorweg sei jedoch darauf hingewiesen, daß die hier folgenden Untersuchungen auf den im ersten Teil dieser Studie erarbeiteten Ergebnissen fußen, d. h. deren Kenntnis voraussetzen. Gleichfalls im ersten Teil wurde auch die Erklärung für die überwiegende Mehrzahl der Bezeichnungen gegeben. Wo hier neue Bezeichnungen eingeführt werden, geht ihre Bedeutung aus dem Text hervor.

1. Näherungsweise Bestimmung der Höchstspannungen

Nach den Ergebnissen der im ersten Teil behandelten Untersuchungen sind bei antimetrischer Beanspruchung die Biegespannungen höher als die Membranspannungen und in der Wirkungslinie der Belastung ($\bar{x} = 0, q = 0$) sowohl in Mantellinien- als auch in Umfangsrichtung gleich. Aus den ziffernmäßigen Berechnungen ging weiterhin hervor, daß bei der Aufstellung der

Näherungsformeln die Ableitungen niedrigerer Ordnung aus der Verschiebungsfunktion gegenüber den Ableitungen höherer Ordnung vernachlässigt werden können und daß ferner unter den für das Dämpfungsmaß charakteristischen Koeffizienten — bei dünnen Schalen ($\beta > 10$) und niedrigen ϑ -Werten ($\vartheta < 12$) — mit der nach Abb. 1 zulässigen Annäherung

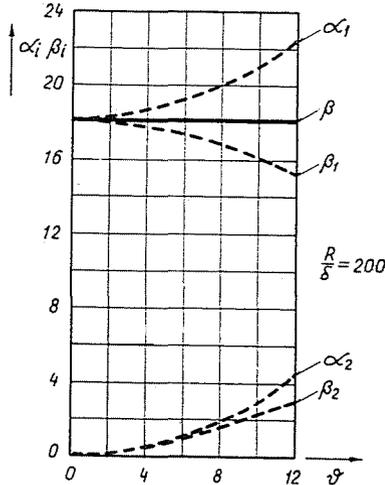


Abb. 1

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\approx \beta_1 \approx \beta \\ \alpha_2 &\approx \beta_2 \approx 0 \end{aligned} \quad (1a-b)$$

gesetzt werden darf, bzw. daß diese Annahme berechtigt ist.

Entsprechend können die Formeln der Schnittmomente, wie sie in der Wirkungslinie ($\bar{x} = 0, \varphi = 0$) der durch die Funktion $P_\vartheta \cos(\vartheta \varphi)$ beschriebenen Streckenbelastung auftreten, wieder im Sinne der Resultate der ziffernmäßigen Berechnungen mit guter Annäherung auch in der Form

$$M_{x\vartheta} \approx \frac{B}{R^2} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} (A_{j6} - \mu \vartheta^6 A_{j0}) \quad (2a)$$

bzw.

$$M_{\varphi\vartheta} \approx \frac{B}{R^2} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} (\mu A_{j6} - \vartheta^6 A_{j0}) \quad (2b)$$

geschrieben werden.

Für die Querkraft hat man mit den Vernachlässigungen

$$Q_{x\vartheta} \approx \frac{B}{R^3} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\vartheta} A_{j7}; \quad (3)$$

während aus der Gleichheit der Momente folgt, daß

$$\sum_{j=1}^4 (-1)^{j-1} C_{j\delta} A_{j\delta} = - \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\delta} \vartheta^6 A_{j\delta},$$

womit man zu der Beziehung

$$M_{x\delta} = M_{\tau\delta} \approx (1 + \mu) \frac{B}{R^2} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} C_{j\delta} A_{j\delta} \quad (4)$$

gelangt.

Sucht man nun den Zusammenhang zwischen Schnittmoment und Querkraft, dann hat man unter der durch (1a—b) beschriebenen Annahme und im Sinne der Randbedingung gemäß (27c) aus [1]

$$C_{1\delta} = C_{2\delta} = C_{\delta}. \quad (5)$$

Auf dieser Grundlage ergeben sich zur näherungsweisen Bestimmung der größten Schnittmomente und der Querkraft die Formeln

$$M_{x\delta} = M_{\tau\delta} \approx (1 + \mu) \frac{B}{R^2} 8 C_{\delta} \beta^6, \quad (6)$$

und

$$Q_{x\delta} \approx - \frac{B}{R^3} 16 C_{\delta} \beta^7. \quad (7)$$

Aus (6) und (7) hat man

$$M_{x\delta} = M_{\tau\delta} \approx - (1 + \mu) \frac{R}{2\beta} Q_{x\delta} \quad (8)$$

und schließlich unter Berücksichtigung der Randbedingung gemäß (27d) aus [1]

$$M_{x\delta} = M_{\tau\delta} \approx - (1 + \mu) \frac{P_{\delta} R}{4\beta}. \quad (9)$$

Mit (9) können aus den Formeln (5c—d) aus [1] die maximalen (durch Zug oder Druck geweckten) Biegespannungen — die den resultierenden Spannungen gleich sind —, anhand der einfachen Formel

$$\sigma_{Bx\delta} = \sigma_{B\tau\delta} \approx 1,5(1 + \mu) \frac{P_{\delta} R}{\beta \delta^2} \quad (10)$$

berechnet werden.

1.1. Höchstspannungen, verursacht durch die entlang der Einheitsbogenlänge angreifende Streckenlast

Die Spannung gemäß (10) kann auch ermittelt werden, indem man jene Spannungen superponiert, die von den rechts und links von der Stelle $\varphi = 0$ — an der Einheitsbogenlänge — angreifenden Belastungen geweckt werden. Bezeichnet man hierzu die entlang der Einheitsbogenlänge auftretende, durch eine Streckenlast der Größe Eins an der Belastungsstelle geweckte Maximalspannung mit σ_0 und berücksichtigt man ferner, daß die Dämpfung der Spannung am Umfang entlang nach den Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen (s. Abschn. 1.2) mit zulässiger Annäherung der Funktion $e^{-\beta\varphi} \cos(\beta\varphi)$ folgt, dann kann man die Beziehung

$$1,5(1 + \mu) \frac{P_\delta R}{\beta \delta^2} = 2P_\delta R \sigma_0 \int_0^\pi e^{-\beta\varphi} \cos(\beta\varphi) \cos(\vartheta\varphi) d\varphi = 2P_\delta R \sigma_0 \Omega \quad (11)$$

aufschreiben, aus der

$$\sigma_0 = \frac{1,5(1 + \mu)}{2\beta \delta^2 \Omega} \quad (12)$$

folgt. In all jenen Fällen, in denen $\beta \gg \vartheta$ ist, kann der Wert des Integrals mit guter Annäherung [2] mit

$$\Omega \approx \frac{1}{2\beta}$$

angesetzt werden, womit man zu der Formel

$$\sigma_0 = \frac{1,5(1 + \mu)}{\delta^2} \quad (13)$$

gelangt.

Aus den bekannten Werten der Funktion zur Beschreibung der Dämpfung, die die Spannungen am Umfang entlang erfahren, sowie aus dem bekannten σ_0 lassen sich nunmehr unschwer die Näherungswerte jener Höchstspannungen berechnen, die — durch beliebige Streckenbelastungen geweckt — in deren Einflußlinien auftreten. Zuvor scheint es jedoch zweckmäßig, die Resultate jener theoretischen und experimentellen Untersuchungen näher zu betrachten, die Verfasser zum Beweis der Richtigkeit der Formel (13) angestellt hat.

1.2 Berechnungen und Messungen zur Überprüfung der Richtigkeit des Ausdrucks für σ_0

Die Berechnungen zum Beweis der Richtigkeit von (13) fußen auf der Entwicklung der an der Einheitsbogenlänge angreifenden Einheitsstreckenlast

in eine Fourierreihe mit einer Folge von 25 Gliedern. Die Ausgangsgrößen waren hierbei: $R = 50$ cm; $n = 4$; $\delta = 0,4$ cm; $\mu = 0,3$ und $\Theta_0 = 0,01$. Die Teilergebnisse der theoretischen Untersuchungen sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

Tabelle 1

ϑ	$\vartheta\Theta_0$	$\sin(\vartheta\Theta_0)$	$\frac{\sin(\vartheta\Theta_0)}{\vartheta}$	$\bar{\sigma}_{R\vartheta}$	$\bar{\sigma}_{R\vartheta} \frac{\sin(\vartheta\Theta_0)}{\vartheta}$
4	0,40	0,03999	0,03999	2,2162	0,08863
8	0,08	0,07991	0,03996	2,1218	0,08448
12	0,12	0,11971	0,03990	1,7649	0,07042
16	0,16	0,15932	0,03983	1,3923	0,05546
20	0,20	0,19867	0,03973	1,1244	0,04467
24	0,24	0,23770	0,03962	0,9422	0,03733
28	0,28	0,27636	0,03948	0,8052	0,03179
32	0,32	0,31457	0,03932	0,7020	0,02760
36	0,36	0,35227	0,03914	0,6271	0,02454
40	0,40	0,38942	0,03894	0,5560	0,02165
44	0,44	0,42594	0,03872	0,5001	0,01936
48	0,48	0,46178	0,03848	0,4535	0,01745
52	0,52	0,49688	0,03822	0,4209	0,01609
56	0,56	0,53119	0,03794	0,3868	0,01468
60	0,60	0,56464	0,03764	0,3530	0,01329
64	0,64	0,59720	0,03733	0,3297	0,01231
68	0,68	0,62879	0,03699	0,3105	0,01149
72	0,72	0,65938	0,03664	0,2889	0,01059
76	0,76	0,68892	0,03626	0,2751	0,00998
80	0,80	0,71736	0,03587	0,2644	0,00948
84	0,84	0,74464	0,03546	0,2486	0,00882
88	0,88	0,77074	0,03503	0,2383	0,00835
92	0,92	0,79560	0,03459	0,2256	0,00780
96	0,96	0,81919	0,03413	0,2144	0,00732
100	1,00	0,84147	0,03366	0,2094	0,00705

$$\sum_{\vartheta=4}^{100} \bar{\sigma}_{R\vartheta} \frac{\sin(\vartheta\Theta_0)}{\vartheta} = 0,66093$$

Da sich der resultierende Spannungskoeffizient nach (24b) in [1] zu

$$\bar{\sigma}_{R\vartheta 1} = 0,9928 \frac{n\Theta_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{\vartheta=4}^{100} \bar{\sigma}_{R\vartheta} \frac{\sin(\vartheta\Theta_0)}{\vartheta}$$

schreibt, hat man mit den erwähnten Ausgangs- und den berechneten Werten

$$\bar{\sigma}_{R\varphi 1} = \frac{2}{\pi} (0,01986 + 0,66093) = 0,433$$

und damit ein

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_{R\varphi 1} \sqrt{\frac{R}{\delta}} \frac{1}{\delta} = \bar{\sigma}_{R\varphi 1} \sqrt{R\delta} \frac{1}{\delta^2},$$

woraus sich für den untersuchten Fall ein

$$\sigma_0 = \frac{1,94}{\delta^2}$$

ergibt. Ein Vergleich dieses Wertes mit dem Wert

$$\sigma_0 = \frac{1,95}{\delta^2},$$

wie er sich aus (13) nach Substitution von $\mu = 0,3$ errechnet, zeigt, daß man mit der Approximation einen praktisch genauen Wert erhält. Da nun gemäß Abb. 5 in [1] der Wert von $\bar{\sigma}_{R\varphi}$ — bei den der Einheitsbogenlänge zugehörigen relativ kleinen Winkeln $\Theta_0 = 1/2R$ — vom Verhältnis R/δ unabhängig ist, mit $\sqrt{R/\delta}$ Θ_0 hingegen in annähernd linearem funktionellem Zusammenhang steht, läßt sich unschwer nachweisen, daß σ_0 mit guter Annäherung lediglich eine Funktion von μ und δ ist.

Zur Überprüfung der theoretisch ermittelten Werte wurden schließlich Festigkeitsmessungen an einer aus Stahl geschweißten Kreiszyinderschale vorgenommen, die an ihren Rändern mit Ringen versteift war. Die Schale hatte folgende geometrische Kennwerte: $R = 32$ cm; $\delta = 0,4$ cm und $L = 4R$. Die Aufstellung der Meßvorrichtung und die Messung selbst entsprachen der Beschreibung unter Punkt 2,5 in [1] mit dem Unterschied, daß die an der Einheitsbogenlänge angreifende Streckenbelastung von $P = 100$ kp/cm auf die Schale über ein zwischengeschaltetes Kunststoff-Formstück übertragen wurde. Die unter der Belastung auftretenden spezifischen Dehnungen wurden mit Hilfe von Meßstreifen gemessen, die auf die Außenfläche der Schale aufgeklebt waren, die Spannungen selbst nach dem Hookeschen Gesetz rechnerisch ermittelt. Auf diese Weise wurden die resultierenden Spannungen an der Außen- und der Innenfläche der kreiszyindrischen Schale in Richtung der Mantellinie (σ_{xk} , σ_{xb}) und in Richtung des Umfanges ($\sigma_{\varphi k}$, $\sigma_{\varphi b}$) sowie deren Änderungen in Mantellinien- und in Umfangsrichtung gemessen. Die Resultate sind in den Abbildungen 2, 3, 4 und 5 aufgetragen bzw. in den Tabellen 2, 3, 4 und 5 zusammengefaßt.

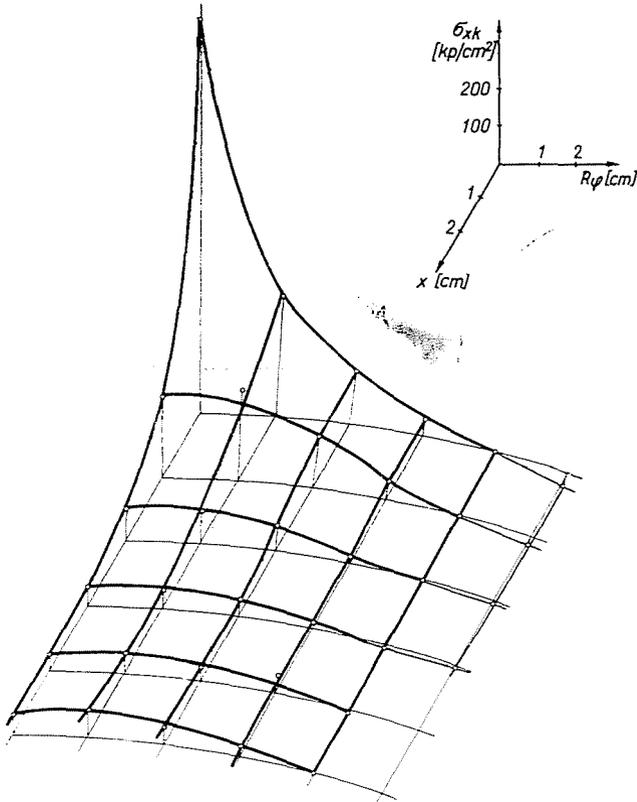


Abb. 2

Tabelle 2

σ_{xk} [kp/cm ²]							
$R\varphi$ [cm]		0	2	4	6	8	10
x [cm]							
0		1070	327	143	41,5	0	-37
2		220	245	134	48	0	-19
4		85,1	86	69,5	16	0	-5,5
6		51,7	51,2	46,9	16,6	-6,9	-4,8
8		46	55,4	39	45,3	-6,9	-
10		56,3	77,8	46	27	0	-

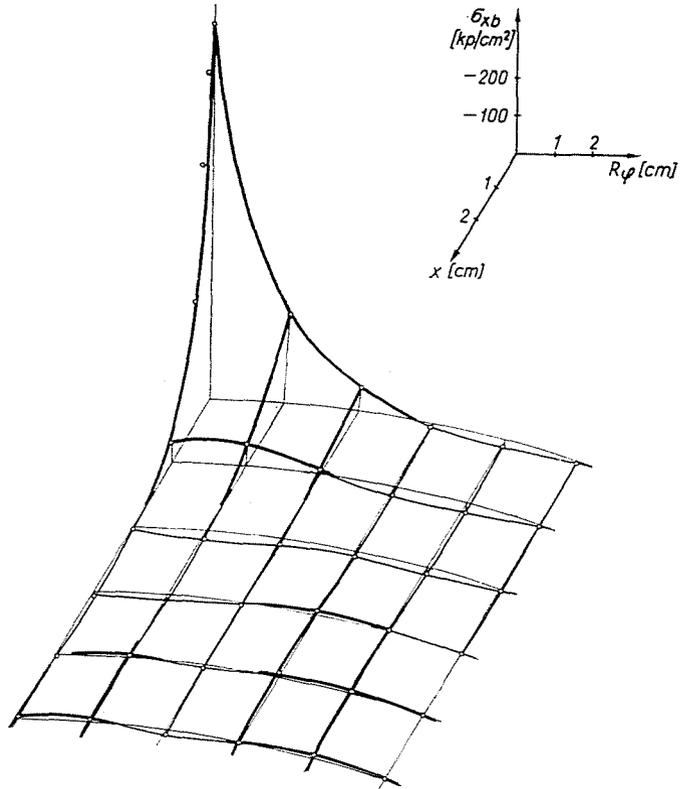


Abb. 3

Tabelle 3

σ_{zb} [kp/cm ²]							
$R\varphi$ [cm]		0	2	4	6	8	10
x [cm]							
0		-1015	-238	-62,4	16,6	20,8	8,6
2		-50,8	-58,2	-8,3	22	26	2
4		8,3	23,3	12,3	17	16,6	1,3
6		13,2	5,6	3,5	-3,5	0	2,1
8		1,4	1,4	9,7	-10,1	-8,3	0
10		-4,8	-3,7	13,8	0	-9,2	0

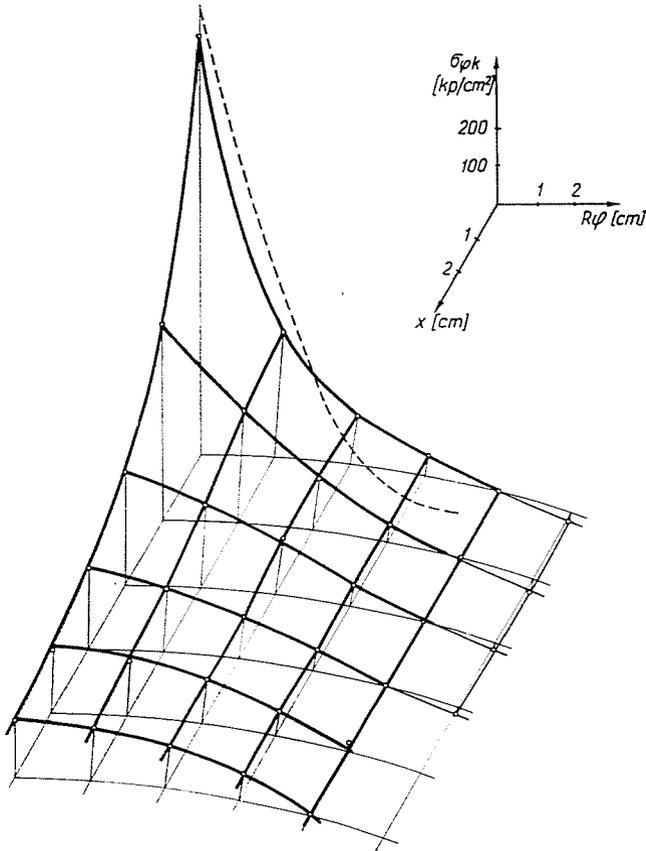


Abb. 4

Tabelle 4

$\sigma_{\phi,k}$ [kp/cm ²]							
$R\phi$ [cm]		0	2	4	6	8	10
x [cm]							
0		1128	337	130	51	0	-27,7
2		526	302	137	44	0	-35,2
4		304	220	152	53,2	0	-18,5
6		220	172	115	55,5	2,1	-16,2
8		170	150	119	65	23	—
10		157	142	111	70	0	—

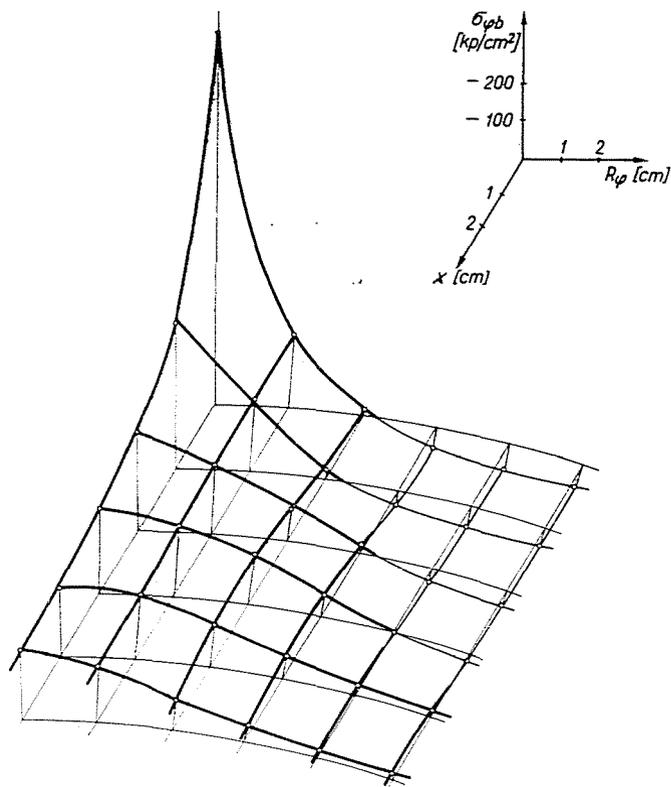


Abb. 5

Tabelle 5

$\sigma_{\varphi b}$ [kp/cm ²]	R_{φ} [cm]					
	0	2	4	6	8	10
x [cm]						
0	-1060	-196	-16,9	55,5	69,3	61,3
2	-394	-194	-27,7	38	52	46
4	-267	-186	-84,5	-20,1	34,4	40
6	-230	-192	-136	-53,6	0	20
8	-187	-173	-115	-62	-27,7	-14,3
10	-185	-153	-80	-44,8	-20,1	-13,8

Wie aus den Tabellen und Abbildungen hervorgeht, wurden die größten Spannungen an der Schalenaußenfläche in Umfangsrichtung in der Einflußlinie der Belastung ($\bar{x} = 0, R\varphi = 0$) mit einem Wert von

$$\sigma_{\varphi k} = 1128 \text{ kp/cm}^2$$

ermittelt, aus dem sich ein

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{\varphi k}}{P} = 112,8 = \frac{1,80}{\delta^2}$$

ergibt.

Der Vergleich dieses durch Messung ermittelten Wertes mit dem auf Grund des Näherungsverfahrens errechneten Wert von $\sigma_0 = 1,95/\delta^2$ erlaubt die Feststellung, daß dieser für die Praxis ausreichend genau ist. Die Auftragung der σ_0 -Funktion $e^{-\beta\varphi} \cos(\beta\varphi)$ in Abb. 4 läßt erkennen, daß auch die Annahme unter Punkt 1.1 — Dämpfung der Spannungen längs des Umfanges — als berechtigt bezeichnet werden kann.

1.3 Durch Streckenbelastungen geweckte Höchstspannungen

Aus den bekannten Werten der Funktion, die die Dämpfung der Spannungen in Richtung des Umfanges beschreibt, sowie aus dem nunmehr gleichfalls bekannten σ_0 lassen sich — wie weiter oben bereits erwähnt —, un schwer die Näherungswerte jener Höchstspannungen berechnen, die durch Streckenbelastung in deren Einflußlinien geweckt werden.

Im Sinne der Abb. 6 löst die Streckenbelastung $P(\varphi)$ in dem durch einen beliebigen Zentriwinkel bestimmten Querschnitt in Umfangsrichtung eine Spannung von

$$d\sigma_{\varphi m} = P(\varphi) R\sigma_0 e^{-\beta\varphi} \cos(\beta\varphi) d\varphi$$

bzw.

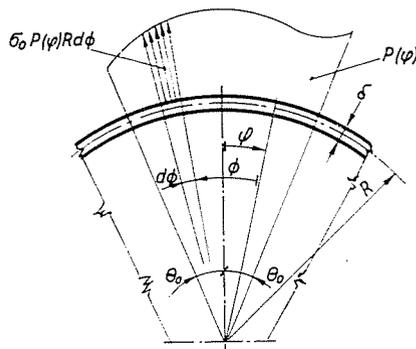


Abb. 6

$$\sigma_{\varphi m} = \int d\sigma_{\varphi m} = \sigma_0 R \left[\int_0^{\Theta_0 + \varphi} P(\varphi) e^{-\beta\varphi} \cos(\beta\Phi) d\Phi + \int_0^{\Theta_0 - \varphi} P(\varphi) e^{-\beta\varphi} \cos(\beta\Phi) d\Phi \right] \quad (14)$$

aus.

Für die Streckenbelastung $P(\varphi) = P = \text{konst.}$ ergibt sich nach Integration ein

$$\sigma_{\varphi m} = \sigma_0 \frac{PR}{\beta} F_{\varphi}(\beta, \Theta_0), \quad (15)$$

worin

$$F_{\varphi}(\beta, \Theta_0) = 1 - e^{-\beta\Theta_0} \{ [\cos(\beta\Theta_0) - \sin(\beta\Theta_0)] \cos(\beta\varphi) \operatorname{ch}(\beta\varphi) + [\cos(\beta\Theta_0) + \sin(\beta\Theta_0)] \sin(\beta\varphi) \operatorname{sh}(\beta\varphi) \}. \quad (16)$$

In den den Zentriwinkeln $\varphi = 0$ und $\varphi = \Theta_0$ zugehörigen Querschnitten treten im Sinne von (15) und (16) in Richtung des Umfanges die Höchstspannungen

$$\sigma_{0m} = \sigma_0 \frac{PR}{\beta} F_0(\beta, \Theta_0) \quad (17)$$

$$\sigma_{\Theta m} = \sigma_0 \frac{PR}{\beta} F_{\Theta}(\beta, \Theta_0) \quad (18)$$

auf, wobei

$$F_0(\beta, \Theta_0) = 1 - e^{-\beta\Theta_0} [\cos(\beta\Theta_0) - \sin(\beta\Theta_0)] \quad (19)$$

$$F_{\Theta}(\beta, \Theta_0) = \frac{1}{2} \{ 1 - e^{-2\beta\Theta_0} [\cos(2\beta\Theta_0) - \sin(2\beta\Theta_0)] \}. \quad (20)$$

Anhand der Formel (17) wurden — für verschiedene Winkelwerte Θ_0 — die Spannungen in der unter Punkt 2.5 in [1] beschriebenen Schale berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 6 [1] aufgetragen (gestrichelte Linie). Sie können für den üblichen Winkelbereich von $0 < \Theta_0 < 7^\circ$ als nahezu exakt bezeichnet werden.

2. Durch Prätzen mit waagrechter Plattenversteifung geweckte Spannungen

Nach den soeben beschriebenen Untersuchungen können die Höchstspannungen in Umfangsrichtung, die eine senkrecht auf die Schalenfläche angreifende lokale Streckenbelastung $P = \text{konst.}$ in deren Einflußlinie weckt, mit guter Annäherung auf Grund der Beziehung (15) berechnet werden. Durch gewisse Änderungen läßt sich diese in eine Form bringen, in der sie

sich auch zur Berechnung der durch Prätzen mit waagrechter Plattenversteifung geweckten Spannungen, d. h. auch zur Bemessung der Abstützung eignet. Die Notwendigkeit der Änderung ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

Die bisher beschriebenen Untersuchungen bezogen sich auf Streckenbelastungen konstanter Größe, die in der Einflußlinie der Belastung in Umfangsrichtung veränderliche Verschiebungen auslösen. Zum besseren Verständnis hat Verfasser in Abb. 7 in der Einflußlinie der Belastung die Werte der aus den

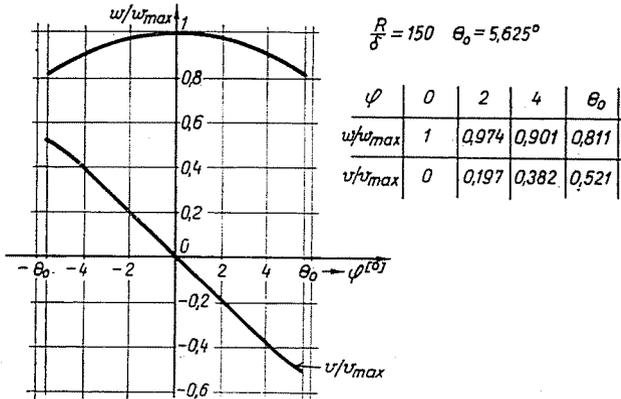


Abb. 7

Verschiebungen der Mantelfläche gebildeten Quotienten w/w_{max} und v/v_{max} aufgetragen, wie sie sich für die Kennwerte $R/\delta = 150$; $\theta_0 = \pi/32$ und $P = \text{konst.}$ aus den Formeln (11a-c) in [1] errechnen. Nach dieser Abbildung zeigen die Verschiebungen in Umfangsrichtung gewisse Änderungen, die jedoch — bei Prätzen — nicht durch die Steifigkeit der mit der Gefäßwand verbundenen waagrechten Platte ausgelöst sein können. Entsprechend weicht die Streckenbelastung von ihrer angenommenen Konstanz ab und erfährt insofern eine Änderung, als ihre Werte von Punkt zu Punkt im mittleren Teil der Platte abnehmen, gegen ihre Enden zu dagegen ansteigen. Diese Änderung in der Größe der Streckenbelastung macht es also erforderlich, die zur Ermittlung der Höchstspannung in Umfangsrichtung unter Annahme der Konstanz von P abgeleitete Formel (15) zu modifizieren. Den einfachsten Weg hierzu weist der folgende Gedankengang:

Den Zusammenhang zwischen der Streckenbelastung $P = \text{konst.}$ einerseits und den unter ihrer Einwirkung auftretenden Spannungen andererseits beschreibt annähernd die Funktion $F_\varphi(\beta, \theta_0)$. Es kann angenommen werden, daß auch die Höchstspannungen aus der Streckenbelastung durch die mit waagrechter Platte versteifte Prätze — wegen der Konstanz der Verschiebungen — an der Berührungsstelle zwischen Platte und Gefäßwand konstant sein werden. Ihre Größe kann dem Durchschnittswert der aus der konstanten

Streckenbelastung stammenden — im Sinne der Funktion $F_\varphi(\beta, \Theta_0)$ veränderlichen — Spannungen annähernd gleich gesetzt werden, es gilt somit

$$\sigma_{Am} = \sigma_0 \frac{PR}{\beta} F_A(\beta, \Theta_0), \quad (21)$$

wobei die den verschiedenen $\beta\Theta_0$ -Werten der Funktion $F_A(\beta, \Theta_0)$ aus der Formel

$$F_A(\beta, \Theta_0) = \frac{1}{\beta\Theta_0} \int_0^{\beta\Theta_0} F_\varphi(\beta, \Theta_0) d(\beta\varphi) \quad (22)$$

berechnet werden können.

Mit der Beziehung (16) für $F_\varphi(\beta, \Theta_0)$ nimmt (22) nach Integration die Form

$$F_A(\beta, \Theta_0) = 1 - \frac{1}{\beta\Theta_0} e^{-2\beta\Theta_0} \cos(\beta\Theta_0) \sin(\beta\Theta_0) \quad (23)$$

an.

Solcherart bietet die Formel (21) offenbar die geeignete Handhabe zur annähernden Bestimmung der größten Gefäßwandbeanspruchung durch Pratzten mit waagrechter Plattenversteifung.

3. Bemessung der Abstützung

Auf Grund der Formel (21) nimmt die Festigkeitsbemessung kreiszylindrischer, auf Pratzten mit waagrechter Versteifungsplatte abgestützter Apparate bzw. ihre Untersuchung auf Festigkeit folgenden Gang:

Mit den Beziehungen (1) und (13) in [1] sowie auf Grund der Abb. 2 in [1] und nach Einführung der Bezeichnung

$$\bar{\sigma}^* = 0,75(1 + \mu) \frac{F_A(\beta, \Theta_0)}{\beta\Theta_0} = 0,75(1 + \mu) f_A(\beta, \Theta_0) \quad (24)$$

geht (21) in die Form

$$\sigma_{AM} = \bar{\sigma}^* \cotg \varrho \frac{W}{n} \frac{1}{\delta^2} \quad (25)$$

über.

Aus Gründen der wirtschaftlichen Ausgestaltung wird man bestrebt sein, eine Lösung zu finden, bei der die aus der Abstützung resultierende zusätzliche Spannung die in der Gefäßwand in der Regel vorhandene Spannungsreserve $\Delta\sigma_\varphi$ nicht übersteigt, d. h. Zahl und Größe der Pratzten werden zweckmäßig so zu wählen sein, daß es keiner Verstärkung der Gefäßwand bedarf. Die Bedingung hierfür schreibt sich zu

$$\Delta\sigma_{\varphi} \geq \bar{\sigma}^* \cotg \varrho \frac{W}{n} \frac{1}{\delta^2}. \quad (26)$$

Der in dieser Formel aufscheinende Wert $\bar{\sigma}^*$ kann aus (24) berechnet werden, während die Spannungsreserve $\Delta\sigma_{\varphi}$ wie folgt zu ermitteln ist:

Bei Beanspruchung des kreiszylindrischen Apparates durch gleichmäßigen Gasdruck und durch Flüssigkeitsfüllung errechnet sich die erforderliche Gefäßwandstärke bekanntlich zu

$$s = \frac{(p + \gamma H_M) d}{2 \frac{\sigma_{Fl}}{y_1} f} + c + c_1, \quad (27)$$

wobei c_1 den aus der Aufrundung auf die genormte Wandstärke resultierenden Wandstärkenzuschlag, H_M hingegen die Gesamthöhe der Flüssigkeitssäule bezeichnet. Da in der Gefäßwand an der Abstützungsstelle (bei Berücksichtigung einer Füllhöhe von $H_A < H_M$) in Wirklichkeit nur eine Membranspannung von

$$\sigma_{\varphi} = \frac{(p + \gamma H_A) d}{2(s - c)} \quad (28)$$

geweckt wird. Wenn die Pratzen weit von der Längsschweißnaht [$< 0,7 \sqrt{d(s - c)}$] angebracht werden, muß für die Abstützungsstelle die Bedingung

$$\sigma_{\varphi} + \sigma_{AM} \leq \frac{\sigma_{Fl}}{y_2} \quad (29)$$

erfüllt sein. Hieraus aber folgt, daß

$$\sigma_{Am} = \Delta\sigma_{\varphi} \leq \frac{\sigma_{Fl}}{y_2} - \sigma_{\varphi}. \quad (30)$$

Nach Ordnung und Substitution nimmt (30) die brauchbarere Form

$$y_1 \frac{\Delta\sigma_{\varphi}}{\sigma_{Fl}} \leq \frac{y_1}{y_2} - \frac{p + \gamma H_A}{p + \gamma H_M} f \left(1 - \frac{c_1}{s - c} \right) \quad (31)$$

an.

In der Ableitung von (31) ist — wie ausdrücklich hervorgehoben werden soll —, die Tatsache berücksichtigt, daß der hydrostatische Druck an der Abstützungsstelle (γH_A) in der Regel unter dem für die Bemessung maßgebenden Höchstdruck (γH_M) bleibt. Überdies erscheint in der Formel außer dem auf die Membranspannung bezüglichen Sicherheitsbeiwert y_1 auch ein Sicherheitsfaktor y_2 gedeutet, u. zw. auf Grund des Umstandes, daß der Spannungs-

zuwachs σ_{Am} nur lokal auftritt und zum Großteil von der Biegebeanspruchung herrührt. An der Abstützungsstelle ist also die Bemessung bzw. Überprüfung mit dem Sicherheitsfaktor $y_2 < y_1$ denkbar.

Schließlich ergibt die Lösung von (25) nach den Pratzekennwerten mit $\delta = s - c$ und mit $\sigma_{Am} \leq \Delta\sigma_\varphi$ ein

$$n \geq \frac{\bar{\sigma}^*}{\Delta\sigma_\varphi} \frac{W}{\operatorname{tg} \varrho} \frac{1}{(s-c)^2}, \quad (32)$$

weiterhin ein

$$\operatorname{tg} \varrho \geq \frac{\bar{\sigma}^*}{\Delta\sigma_\varphi} \frac{W}{n} \frac{1}{(s-c)^2} \quad (33)$$

bzw. ein

$$h \geq \frac{\bar{\sigma}^*}{\Delta\sigma_\varphi} \frac{W}{n} \frac{a}{(s-c)^2}. \quad (34)$$

Zur Erleichterung der Bemessung bzw. Überprüfung hat Verfasser den Zusammenhang zwischen $\bar{\sigma}^*$ und $\sqrt{R/\delta} \theta_0$ — für $\mu = 0,3$ und für verschiedene R/δ -Werte — in Abb. 8 aufgetragen und in Tabelle 6 auch ziffernmäßig zusammengefaßt.

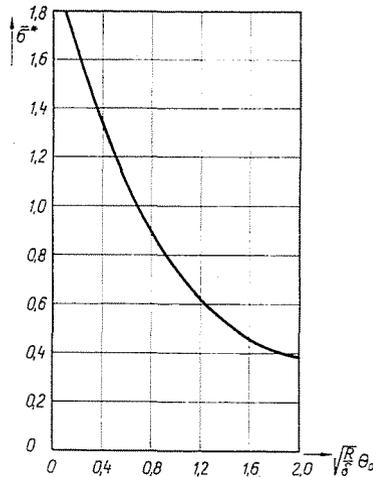


Abb. 8

Tabelle 6

$\sqrt{\frac{R}{\delta}} \theta_0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\bar{\sigma}^*$	1,79	1,62	1,47	1,33	1,20	1,09	0,985	0,891	0,815	0,747
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
	0,682	0,632	0,585	0,543	0,502	0,470	0,440	0,419	0,400	0,390

4. Vergleich der verschiedenen Pratzkonstruktionen vom Gesichtspunkt der Gefäßwandbeanspruchung aus

Interessante Resultate lieferte die der Untermauerung halber durchgeführte vergleichende Anwendung der theoretischen und praktischen Ergebnisse der geschilderten Untersuchungen auf die Berechnung und Messung der Gefäßwandbeanspruchung durch Pratz unterschiedlicher Konstruktion.

Die Vergleichsuntersuchungen wurden an zwei verschiedenen Pratzkonstruktionen, u. zw. an Pratz mit waagrechter Plattenversteifung und an den üblichen — unversteiften — Pratz vorgenommen.

4.1 Theoretische Vergleichsuntersuchungen

Die durch Pratz mit waagrechter Plattenversteifung im Gefäßmantel geweckte Höchstspannung kann anhand der Formel (25) berechnet werden, während die durch die üblichen unversteiften Pratz geweckten Spannungen — wie bereits erwähnt — nach der Theorie der elastischen Ringe bestimmt zu werden pflegen. Nach dieser errechnet sich die Höchstspannung zu

$$\sigma'_{Am} = \frac{6M_{\max}}{l\delta^2}, \quad (35)$$

wobei

M_{\max} das maximale Moment in dem die Schale ersetzenden Ring, l hingegen die gleichwertige Ringbreite bedeutet.

Das maximale Moment wird für Apparate mit 3 lotrechten Rippen und für den Winkelbereich von $0 \leq \theta_0 \leq 10^\circ$ anhand der Beziehung

$$M_{\max} = 0,75 Rf(\theta_0) \frac{W}{n} \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho} \quad (36)$$

ermittelt, in der

$$f(\theta_0) = 1 + \left(\frac{n}{\pi} - 1 \right) \cos \theta_0 + \left(\frac{n}{\pi} \theta_0 - 1 \right) \sin \theta_0 - \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}, \quad (37)$$

während sich die gleichwertige Ringbreite aus der Formel

$$l \cong 6,1 \sqrt{R\delta} \quad (38)$$

errechnet.

Mit (36) und (38) kann (35) in die Form

$$\sigma'_{Am} = \bar{\sigma}' \frac{W}{n} \frac{1}{\operatorname{tg} \varrho} \frac{1}{\delta^2} \quad (39)$$

gebracht werden, in der

$$\bar{\sigma}^{*'} = 0,7377 f(\Theta_0) \sqrt{\frac{R}{\delta}} \quad (40)$$

Die Grundlage für den Vergleich der Gefäßwandbeanspruchung durch die beiden unterschiedlichen Pratzkonstruktionen bildet (unter Annahme eines $\mu = 0,3$) die Untersuchung der ziffernmäßigen Höhe des Verhältnisses

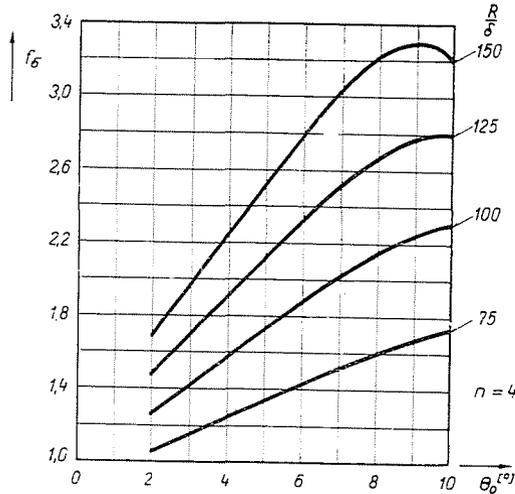


Abb. 9

$$f_\sigma = \frac{\sigma'_{Am}}{\sigma_{Am}} = \frac{\bar{\sigma}^{*'}}{\bar{\sigma}^*} = 0,7566 \frac{f(\Theta_0)}{f_A(\beta, \Theta_0)} \sqrt{\frac{R}{\delta}} \quad (41)$$

Dieses Verhältnis nimmt — für $n = 4$ und für $R/\delta = 75, 100, 125$ und 150 — in Abhängigkeit von Θ_0 die in Abb. 9 aufgetragenen Werte an. Nach dieser Abbildung verursacht die Prätze mit waagrechter Plattenversteifung im untersuchten Bereich — besonders bei dünnwandigen Schalen — eine weit geringere Beanspruchung als die unversteifte Prätze, da sich für diese letztere bei den üblichen Prätzenbreiten ($\Theta_0 = 4^\circ - 6^\circ$) um 1,8- bis 2,6mal höhere Gefäßwandspannungen errechnen.

4.2 Festigkeitsmessungen zum Vergleich der Prätzenkonstruktionen

Um die theoretischen Berechnungen für den Vergleich der Gefäßwandbeanspruchungen auf ihre Richtigkeit und Eignung überprüfen zu können, hat Verfasser die untersuchten beiden Prätzenkonstruktionen Festigkeitsmessungen unterzogen.

Die Messungen wurden an einem $H = 180$ cm hohen, aus Stahlblech geschweißten Flüssigkeitsbehälter mit Flachboden mit dem Durchmesser $d = 100$ cm und der Wandstärke $\delta = 0,4$ cm ausgeführt. Oben hatte der Behälter eine Randversteifung aus Formstahl. Die — in größerem Abstand von den Schalenrändern — einander gegenüber angeschweißten beiden Pratzten waren aus 0,4 cm starkem Stahlblech gearbeitet und hatten die gleichen geometrischen Kennwerte ($h = 18$ cm und $A = 9$ cm). Die Stützreaktion beanspruchte die Pratzten über eine an das Gestell angeschweißte Stahlkugel an einem $a = 10$ cm langen Arm in der auf dem Photo der Abb. 10 dargestellten

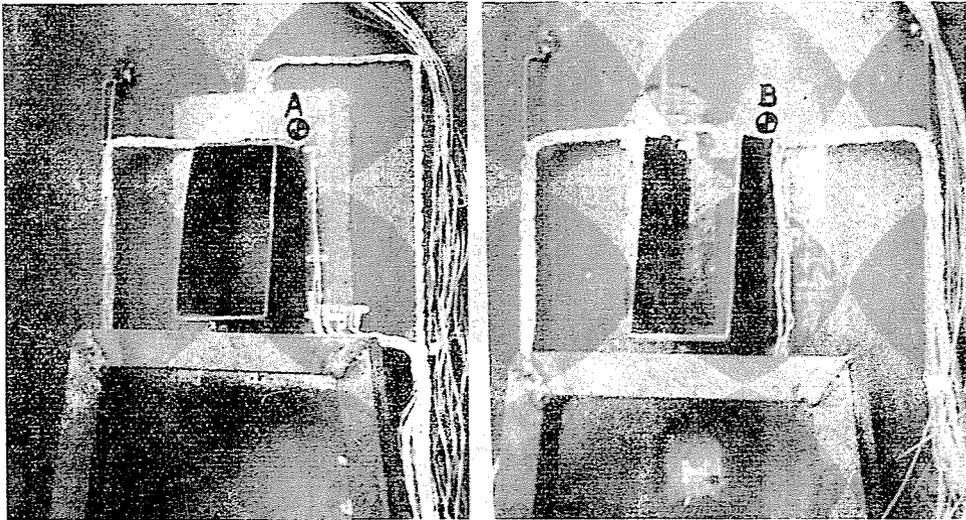


Abb. 10

Anordnung. Zur Übertragung des Moments in Gestalt einer Streckenbelastung dienten — bei den Pratzten mit waagrechter Plattenversteifung — die längs des unteren und des oberen Anschlußbogens ausgebildeten Schweißnähte, während die Schubkraft über die entlang der Mantellinie — nur in der Nähe der neutralen Faser — verlaufenden Nähte übertragen wurde. Die unversteiften Apparatzten waren mit der Gefäßwand längs der Anschlußlinie zur Gänze verschweißt.

Zur Bestimmung der an den Verbindungsstellen und in ihrer Umgebung auftretenden Spannungen dienten Dehnungsmeßstreifen, die an die Innen- und an die Außenfläche der Gefäßwand angeklebt waren. Mit diesen Meßstreifen wurden die unter der Belastung auftretenden Dehnungen ermittelt und aus diesen nach dem Hooke'schen Gesetz die Spannungen berechnet. Verfasser beschränkt sich hier auf die Erörterung der wichtigsten Meßergebnisse. Nachdem der auf $n = 2$ Stück konstruktiv unterschiedlich ausgebildete,

in ihren Hauptabmessungen jedoch einander gleiche Prätzen abgestützte Behälter mit $W = 1000$ kp belastet worden war, wurden die Höchstspannungen in Umfangsrichtung an den auf den Photos mit A und B bezeichneten Punkten ($\varphi = \vartheta_0$) ermittelt, u. zw. für die Prätze mit waagrechter Versteifungsplatte (Punkt A) mit einem Wert von

$$\sigma_{Am} = 825 \text{ kp/cm}^2,$$

für die unversteifte Prätze (Punkt B) hingegen mit einem Wert von

$$\sigma'_{Am} = 1390 \text{ kp/cm}^2.$$

Zu diesen Werten der Höchstspannungen in Umfangsrichtung und zu den Stellen ihres Auftretens sei bemerkt, daß sie — wegen der endlichen Ausdehnung von Schweißnähten und Dehnungsmeßstreifen — nur in einem Abstand von etwa 0,7 cm von der Verbindungsstelle in Richtung der Mantellinie gemessen werden konnten.

4.3. Vergleich der theoretischen mit den experimentellen Ergebnissen, Schlußfolgerungen

Nach den Resultaten der Festigkeitsmessungen weckt die Prätze mit waagrechter Plattenversteifung in der kreiszylindrischen Gefäßwand im Abstand $x = 0,7$ cm von der Wirkungslinie der Streckenbelastung eine Spannung in Umfangsrichtung von $|\sigma_{Am}|_{x=0,7} = 825 \text{ kp/cm}^2$. Auf Grund der Formel (25) ergibt sich in der Wirkungslinie der Belastung ($x = 0$) in Umfangsrichtung eine Spannung von $|\sigma_{Am}|_{x=0} = 1295 \text{ kp/cm}^2$. Da es längs der Mantellinie zu einer raschen Spannungsdämpfung kommt (die in der unmittelbaren Nähe des Anschlusses der waagrechten Platte mit guter Annäherung der für achs-symmetrische Belastungen aufgestellten Funktion $e^{-\beta\bar{x}}[\cos(\beta\bar{x}) - \sin(\beta\bar{x})]$ folgt), kann im Abstand $x = 0,7$ cm von der Wirkungslinie der Belastung nur noch mit einer Spannung von $|\sigma_{Am}|_{x=0,7} = 828 \text{ kp/cm}^2$, d. h. mit einem Wert gerechnet werden, der eine gute Übereinstimmung mit dem gemessenen zeigt.

Im Einklang mit den Ergebnissen der theoretischen Untersuchungen beweisen die Messungen weiterhin, daß die übliche unversteifte Prätze in der Gefäßwand in Umfangsrichtung eine 1,7mal höhere Spannung weckt als die Prätze mit waagrechter Plattenversteifung.

Aus den Ergebnissen der theoretischen und der experimentellen Untersuchungen lassen sich folgende Schlußfolgerungen ziehen:

Die Apparatprätze mit waagrechter Plattenversteifung stellt, was die abstützungsbedingten Spannungen in Umfangsrichtung betrifft, eine weit

günstigere Lösung dar als die übliche Pratze ohne Versteifung. Besondere Bedeutung kann diese Tatsache bei der Abstützung schwererer Niederdruckgefäße gewinnen, bei denen es vorkommen kann, daß die relativ schwache Gefäßwand bei den üblichen Prätzenabmessungen der Beanspruchung durch die resultierenden Spannungen nicht gewachsen ist. In solchen Fällen pflegt man zur lokalen Verstärkung zwischen Gefäßwand und Pratze eine Auflageplatte einzulegen, doch ist hierbei die Annahme berechtigt, daß die Herabsetzung der Spannungen infolge Versteifung der Pratze durch die waagrechte Platte die gleichen Vorteile bietet wie die verstärkende Wirkung der Auflageplatte, so daß sich deren Einbau als überflüssig erweisen kann. Eine Ausnahme bilden jene dünnwandigen säurebeständigen Apparate, bei denen es unvermeidlich ist, zur Verhinderung der Umlagerung eine Auflageplatte zwischenzuschalten.

Für die Anwendung von Prätzen mit waagrechtter Plattenversteifung spricht auch der Umstand, daß sich die Abstützung anhand der hier ausgearbeiteten Berechnungsmethode relativ exakt bemessen bzw. auf ihre Festigkeit überprüfen läßt. Demgegenüber kann das Verfahren zur Berechnung der Spannungen, wie sie durch unversteifte Prätzen geweckt werden, lediglich als Näherungsmethode bezeichnet werden, deren Ergebnisse — was ihre Verlässlichkeit anlangt — lediglich als Schätzungen gewertet werden können. Überdies erfordert die Bemessung bzw. Überprüfung bei Verwendung versteifter Prätzenkonstruktionen eine weit weniger umfangreiche Rechenarbeit.

Zusammenfassung

Um die im ersten Teil dieser Arbeit abgeleiteten Zusammenhänge in eine zur einfachen Bestimmung der Gefäßwandbeanspruchung durch versteifte Apparatprätzen geeignete Form bringen zu können, mußten sie weiter vereinfacht und modifiziert werden. Diese Vereinfachungen und Modifizierungen enthält der vorliegende Teil II, der anhand der Resultate weiterer theoretischer und experimenteller Untersuchungen auch den Beweis für die Vorzüge der versteiften Prätzenkonstruktionen erbringt. Die in diesem Teil der Arbeit angegebenen Zusammenhänge eignen sich auch für die praktische Bemessung oder Überprüfung der Abstützung.

Literatur

1. VARGA, L.: Bestimmung der durch Apparatprätzen geweckten Spannungen und Ausbildung der optimalen Prätzenkonstruktion, I *Periodica Polytechnica* **12**, 291 (1967).
2. GRÖBNER, W.: *Integraltafeln*. Wien 1950, Springer Verlag.
3. BROWNELL, E.: *Process Equipment Design*. New York 1959, John Wiley Inc.

Dr. László VARGA, Budapest, XI. Műgyetem rkp. 9. Ungarn