О ВЛИЯНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПУАССОНА ЗАПОЛНИТЕЛЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Л. ПОМАЗИ и В. Н. МОСКАЛЕНКО*

Кафедра технической механики Будапештского Политехнического Университета

(Поступило 19 сентября 1966 г.)

Представлено проф. Дь. Козманном

При выводе уравнений теории слоистых пластин и оболочек, состоящих из жестких и мягких слоев, обычно используется упрощающее допущение, что коэффициенты Пуассона для мягких слоев равны нулю [1—4].

Это предположение обосновано, если коэффициенты Пуассона достаточно малы. Представляет интерес оценить связанную с этим допущением погрешность, так как для ряда материалов, используемых в качестве мягких слоев, коэффициент Пуассона близок к 0,5.

Настоящая статья посвящена исследованию влияния коэффициентов Пуассона трансверсально-изотропного заполнителя на критические усилия в задаче об устойчивости многослойной регулярной пластины, прямоугольной в плане. Определяется также относительная погрешность критических усилий, полученных в предположении, что коэффициенты Пуассона заполнителя равны нулю. При этом используются некоторые результаты работ [3, 4].

1. В теории многослойных пластин, состоящих из слоев с резко различающимися упругими характеристиками, обычно используются гипотезы, учитывающие это обстоятельство. Для «жестких» слоев считается справедливой гипотеза Кирхгофа—Лява; для «мягких» слоев существенными предполагаются деформации поперечного сдвига и, может быть, поперечного обжатия («трансверсально мягкие слои») [1—4]. В. В. Болотин [1] на основе оценки порядка членов, входящих в формулу для плотности энергии деформации многослойной пластины, дал классификацию «жестких» и «мягких» (трансверсально мягких) слоев. При этом для плотности потенциальной энергии жесткого слоя справедлива формула:

$$\bar{U} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\varepsilon}_y + \bar{\tau}_{xy} \bar{\gamma}_{xy}) + \bar{E}\,\bar{\varepsilon}^2\, 0(\delta). \tag{1.1}$$

* Московский Энергетический Институт, кафедра сопротивления материалов.

Аналогичное выражение для трансверсально мягкого (в дальнейшем просто мягкого) слоя будет:

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}) + \bar{E}\,\bar{\varepsilon}^2\, 0(\delta). \tag{1.2}$$

Здесь σ_k, τ_{kl} — напряжения, ε_k, γ_{kl} — деформации, чертой снабжены величины, относящиеся к «жестким» слоям. Кроме того, $\bar{E}$ — характерный модуль упругости жесткого слоя, $\bar{\varepsilon}$ — характерная деформация, δ — малый параметр, характеризующий порядок величины пренебрегаемых членов. O_{xyz} — декартова система координат, ось z которой перпендикулярна срединным плоскостям слоев.

Учитывая, что выражение (1.1) получено на основе гипотезы Кирхгофа—Лява, и допуская, что выражения (1.1) и (1.2) могут иметь одинаковый порядок, находим для энергетической погрешности δ следующую оценку:

$$\delta \sim \left(\frac{H^2}{\lambda^2},\ \frac{E}{\bar{E}}\right).$$

Здесь H — толщина слоистой пластины, λ — величина, обратно пропорциональная показателю изменяемости напряженно-деформированного состояния, E — характерный модуль упругости мягкого слоя.

Более полное исследование энергетической погрешности дано в работе [1] в случае, когда коэффициент Пуассона для мягких слоев равен нулю. Видоизменим соответствующие рассуждения применительно к ортотропным мягким слоям с отличными от нуля коэффициентами Пуассона.

2. Рассмотрим многослойную пластину с ортотропными мягкими слоями. Пусть плоскости упругой симметрии материала мягких слоев параллельны координатным плоскостям. Тогда, пользуясь законом Гука для ортотропного материала, находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= b_{11}\varepsilon_x + b_{12}\varepsilon_y + b_{13}\varepsilon_z, & \tau_{xy} &= G_{12}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= b_{12}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y + b_{23}\varepsilon_z, & \tau_{xz} &= G_{13}\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= b_{13}\varepsilon_x + b_{23}\varepsilon_y + b_{33}\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= G_{23}\gamma_{yz}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{E_1}{\theta}(1 - \nu_{23}\nu_{32}), & b_{22} &= \frac{E_2}{\theta}(1 - \nu_{13}\nu_{31}), \\ b_{12} &= \frac{E_1}{\theta}(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}), & b_{23} &= \frac{E_3}{\theta}(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}), \\ b_{13} &= \frac{E_3}{\theta}(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}), & b_{33} &= \frac{E_3}{\theta}(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\theta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{32}\nu_{21} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}.$$

В рамках гипотезы Кирхгофа—Лява для жестких слоев справедливы соотношения:

$$\bar{\sigma}_x \sim \bar{\sigma}_y \sim \bar{\tau}_{xy} \sim \bar{\sigma}\,, \qquad \bar{\tau}_{xz} \sim \bar{\tau}_{yz} \sim \eta\bar{\sigma}\,, \qquad \bar{\sigma}_z \sim \eta^2 \bar{\sigma}\,,$$

где $\eta = H/\lambda$, $\bar{\sigma}$ — характерное наприжение ($\bar{\sigma} = \bar{E}\bar{\varepsilon}$).

Для мягких слоев имеют место соотношения, вытекающие из непрерывности перемещений и трех компонент напряжений на границах жестких и мягких слоев:

$$\varepsilon_x \sim \varepsilon_y \sim \gamma_{xy} \sim \bar{\varepsilon}\,, \qquad \tau_{xz} \sim \tau_{yz} \sim \eta\bar{\sigma}\,, \qquad \sigma_z \sim \eta^2 \bar{\sigma}\,.$$

Используя закон Гука, получим соотношения для деформаций сдвига

$$\gamma_{xz} \sim \eta \frac{\bar{E}}{G_{13}} \bar{\varepsilon}\,, \qquad \gamma_{yz} \sim \eta \frac{\bar{E}}{G_{23}} \bar{\varepsilon}\,.$$

Наконец, для деформаций поперечного обжатия находим

$$\varepsilon_z \sim \left(\nu\bar{\varepsilon}\,, \ \frac{\eta^2 \theta \bar{E}}{E_3} \bar{\varepsilon}\right)\,.$$

Оценим порядки слагаемых, входящих в выражение для плотности потенциальной энергии деформации мягких слоев (1.2)

$$\sigma_z \varepsilon_z \sim \left(\nu\eta^2 \bar{\sigma}\bar{\varepsilon}\,, \ \eta^4 \frac{\theta}{\varphi} \bar{\sigma}\bar{\varepsilon}\right)\,, \quad \tau_{xz}\gamma_{xz} \sim \frac{\eta^2}{\psi_1} \bar{\sigma}\bar{\varepsilon}\,, \quad \tau_{yz}\gamma_{yz} \sim \frac{\eta^2}{\psi_2} \bar{\sigma}\bar{\varepsilon}\,. \tag{2.3}$$

Здесь обозначено

$$\varphi = \frac{E_3}{\bar{E}}\,, \quad \psi_1 = \frac{G_{13}}{\bar{E}}\,, \quad \psi_2 = \frac{G_{23}}{\bar{E}}\,.$$

Порядки слагаемых, входящих в выражения для плотности потенциальной энергии деформации жестких слоев (1.1), определяются соотношением

$$\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x \sim \bar{\sigma}_y \bar{\varepsilon}_y \sim \bar{\tau}_{xy} \bar{\gamma}_{xy} \sim \bar{\sigma}\bar{\varepsilon}\,. \tag{2.4}$$

Для того, чтобы энергия деформации мягких слоев была сопоставлена с энергией деформации жестких слоев, достаточно выполнения одного из следующих соотношений:

$$\frac{\eta^2}{\psi_1} \sim 1\,, \ \frac{\eta^2}{\psi_2} \sim 1\,, \tag{2.5}$$

$$\frac{\theta\eta^4}{\varphi} \sim 1\,. \tag{2.6}$$

Если выполнены соотношения только (2.5), то в выражении (1.2) можно опустить слагаемое $\sigma_z \varepsilon_z$. Для одновременного выполнения соотношений (2.5 и (2.6) необходимо, чтобы отношение $\eta^2 \theta \psi_\alpha / \varphi$ имело порядок единицы, другими словами, слагаемое $\sigma_z \varepsilon_z$ следует сохранить, лишь если отношения $E_3/G_{\alpha 3}$ малы по сравнению с единицей. Это требование может быть выполнено лишь для узкого класса материалов. Таким образом, при поперечном изгибе слоистой пластины почти всегда можно пренебречь поперечным обжатием мягких слоев.

Полученный вывод теряет силу в задачах, где нормальное напряжение σ_z играет более существенную роль, чем напряжения сдвига τ_{xz}, τ_{yz}. Данным условиям удовлетворяет, например, задача об устойчивости слоистой пластины. При этом важную роль начинают играть коэффициенты Пуассона. Дело в том, что согласно первому из соотношений (2.3) при $\theta \to O$ вклад произведения $\sigma_z \varepsilon_z$ также стремится к нулю с точностью до слагаемого порядка $\bar{E}\bar{\varepsilon}^2 O(\delta)$.

3. Рассмотрим задачу об устойчивости слоистой пластины с трансверсально изотропными слоями. Для упругих постоянных введем обозначения

$$E_1 = E_2 = E\,, \quad E_3 = E'\,, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu\,, \quad \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_0$$
$$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu'\,, \quad G_{13} = G_{23} = G\,.$$

В принятых обозначениях значение b_{33} дается формулой

$$b_{33} = E' \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu_0\nu'}\,. \tag{3.1}$$

Степень «сжимаемости» материала мягкого слоя может быть определена значением знаменателя в выражении (3.1). Для несжимаемого материала это значение равно нулю. В этом случае учет коэффициентов Пуассона эквивалентен гипотезе об отсутствии поперечного обжатия мягких слоев. И в этом случае погрешность, связанная с неучетом коэффициентов Пуассона, достигает максимального значения.

В качестве примера рассмотрим, используя результаты работ [3, 4], устойчивость многослойной пластины со следующими параметрами:

$$\bar{E} = 2{,}1 \cdot 10^4\ \text{кн/см}^2\,, \quad h = \bar{h}\,, \quad n = 7\,, \quad \psi_1 = \psi_2 = 10^{-5}\,,$$
$$p_x = p_y\,, \quad \nu = 0{,}5\,, \quad h = 10^{-3}\lambda_y\,,$$

при различных значениях параметра $\gamma = \nu_0 \nu'$.

Здесь h и $\bar{h}$ — толщины мягких и жестких слоев соответственно, n — число жестких слоев, λ_x, λ_y — длины полуволн в направлении осей x и y

при потере устойчивости, p_x и p_y — критические значения сжимающих напряжений в жестких слоях.

На рис. 1 приведены графики зависимости критического значения сжимающего напряжения в зависимости от относительной длины полуволн формы потери устойчивости при различных значениях параметра γ.

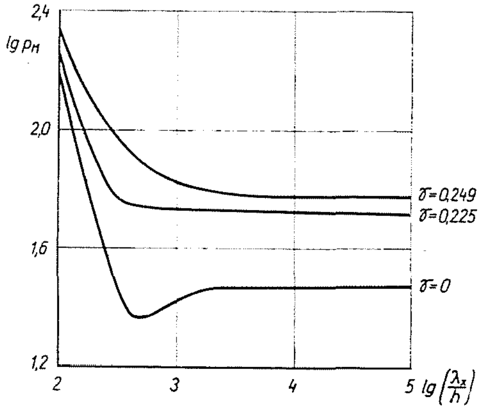

Рис. 1. Влияние коэффициентов Пуассона ($\gamma = \nu_0 \nu'$) мягких слоев на критические сжимающие напряжения в жестких слоях

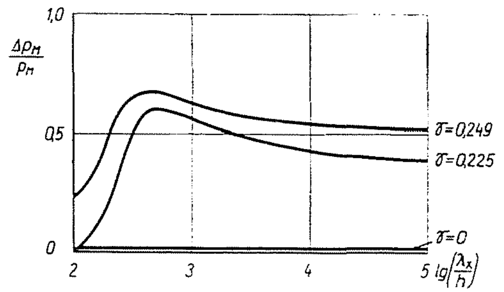

Рис. 2. Относительная погрешность критических сжимающих напряжений

На рис. 2 даны графики относительной погрешности вычисления критических напряжений, связанной с пренебрежением коэффициентов Пуассона в мягких слоях.

Сопоставление кривых приводит к выводу, что влияние коэффициентов Пуассона в задачах об устойчивости слоистых плит может быть весьма существенным. Кроме того, значения коэффициентов Пуассона могут влиять на форму потери устойчивости. Действительно, в рассмотренном примере нулевое значение параметра γ соответствует локальной потере устойчивости, а при $\gamma = 0{,}249$ потеря устойчивости носит глобальный (общий) характер.

Резюме

В настоящей статье исследовалось влияние коэффициентов Пуассона трансверсально-изотропного заполнителя на критические усилия в задаче об устойчивости многослойной регулярной пластины, прямоугольной в плане. Определялась также относительная погрешность критических усилий, полученных в предположении, что коэффициенты Пуассона заполнителя равны нулю. При этом были использованы некоторые результаты работ [3, 4].

Литература

1. Болотин, В. В.: Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин, «Рас четы на прочность» 11. Машиностроение. Москва 1965 г.
2. Москаленко, В. Н.: Основные уравнения оболочек из слоистых материалов. Доклады научно-техн. конф. МЭИ. Москва, изд. МЭИ, 1965 г.
3. Помази, Л. П.: Некоторые приближенные решения задачи об устойчивости многослойных пластин. Доклады научно-техн. конф. МЭИ. Москва, изд. МЭИ 1965 г.
4. Помази, Л. П.: Об устойчивости многослойных пластин. Известия ВУЗ-ов, Машиностроение, № 2, 1965 г.

Dr. Lajos Pomázi, Budapest, XI., Műegyetem rkp. 3, BME Венгрия.

Доц. Валентин Никитич *Москаленко*, Москва, Е—250, Красноказарменная 17, МЭИ, С. С. С. Р.