

METHODE ZUR BERECHNUNG DREHSYMMETRISCHER TORUS-SCHALEN

Von

L. PÁRTOS und K. PINTÉR

Lehrstuhl für Maschinenelemente, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 23. Dezember 1966)

Vorgelegt von Prof. Dr. I. VÖRÖS

Bezeichnungen:

a	}	Koeffizienten der Reihen zur Lösung des Differentialgleichungssystems
b		
c		Integrationskonstante
d		Koeffizienten der Funktionsreihe $\sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi$
D cmkp		Biegesteifigkeit der Schale
E kp/cm ²		Elastizitätsmodul
F kp/cm		äußere Linienbelastung
h cm		Schalenstärke
k		Krümmungsverhältnis der Torusfläche
m		Zeichen der Torusteil-Lage
M cmkp/cm		Kantenmoment
p kp/cm ²		äußere normale Flächenbelastung
Q kp/cm		Quer-Kantenkraft
Q_0 kp/cm		Quer-Kantenkraft an der Stelle $\alpha = 0^\circ$
\bar{R}		Vereinfachungsbeiwert
T kp/cm		normale Kantenkraft
u cm		Verschiebung in Richtung der Drehachse
$V = Q\varrho_2$		unbekannte Ortsfunktion der Torusfläche
w cm		radiale Verschiebung
\bar{W}		Substitutionsfunktion
z cm		Abstand von der Mittelfläche
α		Ortskoordinate
ε		Längsdehnung
ϑ		Verdrehungswinkel
Θ		Substitutionsfunktion
\varkappa		Veränderliche der Ergebnisreihen
λ		Veränderliche der Reihen, die in den Formeln der Koeffizienten a_x und b_x figurieren
μ		Poissonsche Zahl
ν		Veränderliche der Ergebnisreihen
ϱ cm		Mittelradius der Torusfläche
ϱ_1 cm		Radius des Meridiankreises
ϱ_2 cm		der im Normalschnitt gemessene Krümmungsradius
σ kp/cm ²		Normalspannung
φ		Ortskoordinate

Die auf der Biegetheorie der Schalen beruhende Methode erfaßt beliebige drehsymmetrisch belastete Torusschalen. Für die Berechnung wird die untersuchte Schale in Teile zerlegt. Die Zerlegung erfolgt durch einen Schnitt, der die Schale an den Angriffsstellen der äußeren Linienbelastung und in der zur Drehachse parallelen Mittelachse des Meridiankreises trennt (Abb. 1a und 1b).

Die Differentialgleichungssysteme, die den Zusammenhang der Beanspruchungen und Formänderungen beschreiben, werden für konvexe und

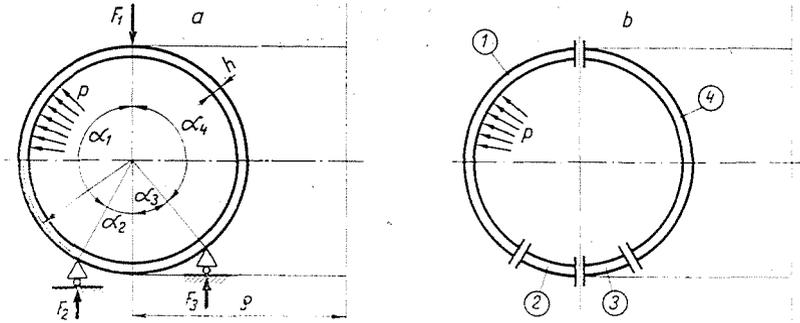


Abb. 1a und 1b

konkave Toruselemente zugleich abgeleitet. Die beiden Differentialgleichungssysteme unterscheiden sich voneinander nur in den Vorzeichen einiger Glieder, weshalb für konvexe Toruselemente $m = +1$, für konkave Toruselemente hingegen $m = -1$ sein wird. Die Abbildungen 2a und 2b veranschaulichen die untersuchten konvexen und konkaven Toruselemente.

Unter den aus den Gleichgewichtsbedingungen abgeleiteten Gleichungen erweisen sich drei wegen der Drehsymmetrie als Identitäten; brauchbare Zusammenhänge liefert nur das Gleichgewicht der zur Drehachse parallelen Kräfte, der in Richtung der z-Achse angreifenden Kräfte und der Momente in bezug auf die y-Achse.

Diese Gleichgewichtsgleichungen schreiben sich nach Umformung zu

$$\frac{d}{d\alpha} [\varrho_2 \sin \alpha (Q \cos \alpha + T_1 \sin \alpha)] = p \varrho_1 \varrho_2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1)$$

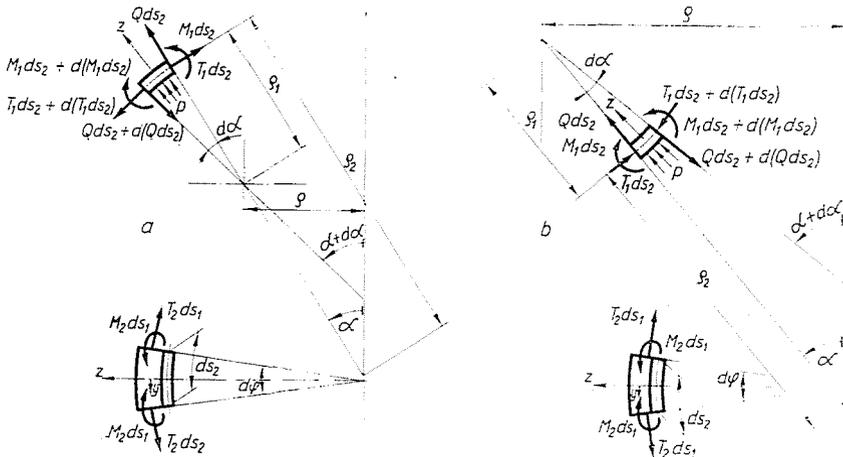


Abb. 2a und 2b

$$\frac{T_1}{\varrho_1} + \frac{T_2}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \sin \alpha} \frac{d}{dx} (Q \varrho_2 \sin \alpha) = p, \quad (2)$$

$$Q \varrho_1 \varrho_2 \sin \alpha - \frac{d}{dx} (M_1 \varrho_2 \sin \alpha) + m M_2 \varrho_1 \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Auf Grund der Kompatibilitätsbedingungen für die Verschiebungen und Formänderungen können die dem Punkt im Abstand z von der Mittelfläche zugehörigen spezifischen Dehnungen durch die spezifischen Dehnungen und Verdrehungen des entsprechenden Mittelflächenpunktes ausgedrückt werden, man hat also

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \frac{z}{\varrho_1} \frac{d\vartheta}{dx}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + m \frac{z}{\varrho_2} \vartheta \cotg \alpha. \quad (5)$$

Gleichfalls aus den Kompatibilitätsbedingungen für die Verschiebungen und Formänderungen folgt, daß

$$\varrho_1 \vartheta = \cotg \alpha (m \varepsilon_1 \varrho_1 - \varepsilon_2 \varrho_2) - \frac{d}{dx} (\varepsilon_2 \varrho_2). \quad (6)$$

Den Zusammenhang zwischen den im Abstand z von der Mittelfläche entstehenden Spannungen und spezifischen Längsdehnungen beschreiben anhand des HOOKEschen Gesetzes die Beziehungen

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) + z \left(\frac{1}{\varrho_1} \frac{d\vartheta}{dx} + m \mu \frac{\vartheta}{\varrho_2} \cotg \alpha \right) \right], \quad (7)$$

$$\sigma_{2z} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) + z \left(\mu \frac{1}{\varrho_1} \frac{d\vartheta}{dx} + m \frac{\vartheta}{\varrho_2} \cotg \alpha \right) \right]. \quad (8)$$

Aus den bekannten Spannungen errechnen sich die normalen Kantenkräfte T_1 und T_2 sowie die Kantenmomente M_1 und M_2 zu

$$T_1 = -m \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \quad (9)$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1), \quad (10)$$

$$M_1 = -D \left(\frac{1}{\varrho_1} \frac{d\vartheta}{dx} + m \mu \frac{\vartheta}{\varrho_2} \cotg \alpha \right), \quad (11)$$

$$M_2 = -D \left(\frac{\mu}{\varrho_1} \frac{d\vartheta}{dx} + m \frac{\vartheta}{\varrho_2} \cotg \alpha \right). \quad (12)$$

Im Ausdruck für das Kantenmoment bedeutet

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$$

die Biegesteifigkeit der Schale.

Die aus (9) und (10) ermittelten ε_1 - und ε_2 -Werte werden in die Gleichung (6) eingesetzt. Durch Einführung der Bezeichnung $V = Q\varrho_2$ erhält man mit Gleichung (2)

$$\begin{aligned} Eh \varrho_1 \vartheta = & \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{d^2 V}{dx^2} + \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right) + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cotg \alpha \right] \frac{dV}{dx} - \\ & - \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cotg \alpha - m \mu \right) V + \frac{F(x)}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right) + \right. \\ & \left. + \cotg \alpha \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right) \right] - p \frac{d}{dx} (\varrho_2^2), \end{aligned} \quad (13)$$

worin

$$F(x) = (Q \cos \alpha + T_1 \sin \alpha) \varrho_2 \sin \alpha \quad (14)$$

die Funktion der äußeren Belastungen und der an der Stelle $\alpha = 0^\circ$ auftretenden Quer-Kantenkraft ist, die aus dem Gleichgewichtszustand des Torusteiles zwischen der Stelle $\alpha = 0^\circ$ und der untersuchten Stelle bestimmt werden kann.

Der Zusammenhang (13) stellt die erste Differentialgleichung der Torusfläche dar. Die zweite Differentialgleichung aus Gl. (3) mit M_1 gemäß (11) und M_2 gemäß (12) erhält man in der Form

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right) - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cotg \alpha \right] - \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cotg^2 \alpha + m \mu \right) = - \frac{\varrho_1}{D} V. \quad (15)$$

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems der Torusflächen in geschlossener Form ist nicht bekannt. Somit ist nur eine numerische Lösung möglich, die in der Form unendlicher Reihen gesucht wird. Hierzu müssen sämtliche Glieder der Differentialgleichungen in Reihen entwickelt werden. Da jedoch die Reihenentwicklung der Glieder der Gleichungen (13) und (15) auf ernste Schwierigkeiten stößt, müssen neue Veränderliche (W und Θ) eingeführt werden, die durch folgende Formeln bestimmt sind:

$$V = \frac{1}{k + m \sin \alpha} [W + k \cotg \alpha F(x)], \quad (16)$$

$$\vartheta = \frac{1}{k + m \sin \alpha} \Theta. \quad (17)$$

Hier bedeutet $k = \frac{\varrho}{\varrho_1}$ das Krümmungsverhältnis der Torusfläche.

Im weiteren wird die Lösung für den in Abb. 1a angegebenen Belastungsfall bestimmt. In diesem Fall ist

$$F(\alpha) = Q_0 k \varrho_1 + \frac{P \varrho_1^2}{2} \sin \alpha (2k + m \sin \alpha). \quad (18)$$

Auf Grund der Formeln (16), (17) und (18) kann das Differentialgleichungssystem in der Form

$$\begin{aligned} Eh \varrho_1 \Theta \sin \alpha &= (k + m \sin \alpha) \frac{d^2 W}{d\alpha^2} - m \cos \alpha \frac{dW}{d\alpha} + \\ &+ m(1 + \mu) \sin \alpha W + m(1 + \mu) Q_0 k^2 \varrho_1 \cos \alpha - \\ &- \frac{P \varrho_1^2 k}{2} [2k^2 \cos \alpha + (1 - \mu) \cos \alpha \sin^2 \alpha + mk(1 - \mu) \sin 2\alpha], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 \Theta}{d\alpha^2} (k + m \sin \alpha) - m \cos \alpha \frac{d\Theta}{d\alpha} + m(1 - \mu) \sin \alpha \Theta = \\ &= - \frac{\varrho_1}{D} \left[W \sin \alpha + Q_0 \varrho_1 k^2 \cos \alpha + \frac{P \varrho_1^2}{2} k(k \sin 2\alpha + m \sin^2 \alpha \cos \alpha) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

geschrieben werden. Führt man die neue Veränderliche $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ein, wird der Koeffizient jedes zweiten Gliedes in den zur Lösung dienenden unendlichen Reihen gleich Null, die Zahl der zu berechnenden Koeffizienten vermindert sich also auf die Hälfte. Mit der neuen unabhängigen Veränderlichen φ nimmt das Differentialgleichungssystem folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} Eh \varrho_1 \Theta \cos \varphi &= (k + m \cos \varphi) \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + m \sin \varphi \frac{dW}{d\varphi} + \\ &+ m(1 + \mu) \cos \varphi W + m Q_0 k^2 \varrho_1 \sin \varphi (1 + \mu) - \\ &- \frac{P \varrho_1^2 k}{2} [2k^2 \sin \varphi + (1 - \mu) \sin \varphi \cos^2 \varphi + mk(1 - \mu) \sin 2\varphi], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} (k + m \cos \varphi) + m \frac{d\Theta}{d\varphi} \sin \varphi + m \Theta (1 - \mu) \cos \varphi = \\ &= - \frac{\varrho_1}{D} [W \cos \varphi + Q_0 \varrho_1 k^2 \sin \varphi + \frac{P \varrho_1^2}{2} k(k \sin 2\varphi + m \sin \varphi \cos^2 \varphi)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Lösung des Gleichungssystems wird in der Form

$$W = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \varphi^v; \quad \Theta = \sum_{v=0}^{\infty} b_v \varphi^v \quad (23)$$

gesucht.

Die Werte der Koeffizienten a_v und b_v ergeben sich aus der Bedingung, daß in dem in Reihen entwickelten Differentialgleichungssystem für jede Potenz von φ Gleichheit bestehen muß. Die im Differentialgleichungssystem vorkommenden Funktionen sind, in Reihen entwickelt, die folgenden:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v + 1}{2} (-1)^{\frac{v}{2}} \frac{1}{v!} \varphi^v; \\ \sin \varphi &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v - 1}{2} (-1)^{\frac{v+1}{2}} \frac{1}{v!} \varphi^v; \\ \sin 2\varphi &= \sum_{v=0}^{\infty} 2^v \frac{(-1)^v - 1}{2} (-1)^{\frac{v+1}{2}} \frac{1}{v!} \varphi^v; \\ \sin \varphi \cos^2 \varphi &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^v}{2} d_v \frac{1}{v!} \varphi^v, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} d_0 &= 0, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = -7, \quad d_v = -10d_{v-2} - 9d_{v-4}; \\ \frac{dW}{d\varphi} &= \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) a_{v+1} \varphi^v; \quad \frac{d^2 W}{d\varphi^2} = \sum_{v=0}^{\infty} (v+1)(v+2) a_{v+2} \varphi^v; \\ \frac{d\Theta}{d\varphi} &= \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) b_{v+1} \varphi^v; \quad \frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} = \sum_{v=0}^{\infty} (v+1)(v+2) b_{v+2} \varphi^v; \\ \Theta \cos \varphi &= \sum_{v=0}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^v b_{v-\lambda} \frac{(-1)^\lambda + 1}{2} (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\lambda!} \right] \varphi^v; \\ k \frac{d^2 W}{d\varphi^2} &= k \sum_{v=0}^{\infty} (v+1)(v+2) a_{v+2} \varphi^v; \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 W}{d\varphi^2} \cos \varphi = \sum_{v=0}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^v (v-\lambda+1)(v-\lambda+2) a_{v-\lambda+2} \frac{(-1)^\lambda + 1}{2} (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\lambda!} \right] \varphi^v;$$

$$\frac{dW}{d\varphi} \sin \varphi = \sum_{v=0}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^v (v-\lambda+1) a_{v-\lambda+1} \frac{(-1)^\lambda - 1}{2} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{1}{\lambda!} \right] \varphi^v;$$

$$W \cos \varphi = \sum_{v=0}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^v a_{v-\lambda} \frac{(-1)^\lambda + 1}{2} (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\lambda!} \right] \varphi^v;$$

$$\begin{aligned}
 k \frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} &= k \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(\nu+2) b_{\nu+2} \varphi^{\nu}; \\
 \frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} \cos \varphi &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^{\nu} (\nu-\lambda+1)(\nu-\lambda+2) b_{\nu-\lambda+2} \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{(-1)^{\lambda}+1}{2} (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\lambda!} \right] \varphi^{\nu}; \\
 \frac{d\Theta}{d\varphi} \sin \varphi &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^{\nu} (\nu-\lambda+1) b_{\nu-\lambda+1} \frac{(-1)^{\lambda}-1}{2} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{1}{\lambda!} \right] \varphi^{\nu}; \\
 \Theta \cos \varphi &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\sum_{\lambda=0}^{\nu} (\nu-\lambda) b_{\nu-\lambda} \frac{(-1)^{\lambda}+1}{2} (-1)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\lambda!} \right] \varphi^{\nu}.
 \end{aligned}$$

Diese Reihen werden in die Gleichungen (21) und (22) eingesetzt und die Gleichheiten für die ν -fachen Potenzen aufgeschrieben. Nach Division mit φ^{ν} erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 Eh \varrho_1 \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_{\nu-\lambda} R_1 \frac{1}{\lambda!} &= k(\nu+1)(\nu+2) a_{\nu+2} + m \sum_{\lambda=0}^{\nu} (\nu-\lambda+1) \times \\
 &\quad \times (\nu-\lambda+2) a_{\nu-\lambda+2} R_1 \frac{1}{\lambda!} + m \sum_{\lambda=0}^{\nu} (\nu-\lambda+1) a_{\nu-\lambda+1} R_2 \frac{1}{\lambda!} + \\
 &\quad + m(1+\mu) \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\nu-\lambda} R_1 \frac{1}{\lambda!} - m(1+\mu) Q_0 k^2 \varrho_1 R_3 \frac{1}{\nu!} + \\
 &\quad + \frac{p \varrho_1^2 k}{2} \left[2k^2 R_3 \frac{1}{\nu!} - (1-\mu) d_{\nu} \frac{1}{\nu!} + m(1-\mu) k R_3 \frac{2^{\nu}}{\nu!} \right]
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 &k(\nu+1)(\nu+2) b_{\nu+2} + m \sum_{\lambda=0}^{\nu} (\nu-\lambda+1)(\nu-\lambda+2) b_{\nu-\lambda+2} R_1 \frac{1}{\lambda!} + \\
 &\quad + m \sum_{\lambda=0}^{\nu} (\nu-\lambda+1) b_{\nu-\lambda+1} R_2 \frac{1}{\lambda!} + m(1-\mu) \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_{\nu-\lambda} R_1 \frac{1}{\lambda!} = \\
 &= -\frac{\varrho_1}{D} \left[\sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\nu-\lambda} R_1 \frac{1}{\lambda!} - Q_0 \varrho_1 k^2 R_3 \frac{1}{\nu!} + \frac{p \varrho_1^2 k}{2} \left(m d_{\nu} \frac{1}{\nu!} - k R_3 \frac{2^{\nu}}{\nu!} \right) \right],
 \end{aligned}$$

in denen die Vereinfachungsbeiwerte

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{(-1)^{\lambda}+1}{2} (-1)^{\frac{\lambda}{2}}; & R_2 &= \frac{(-1)^{\lambda}-1}{2} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}; \\
 R_3 &= \frac{(-1)^{\nu}-1}{2} (-1)^{\frac{\nu+1}{2}}
 \end{aligned}$$

angewendet sind. Aus diesen Gleichungen können $a_{\nu+2}$ bzw. $b_{\nu+2}$ ermittelt werden. Aus rechnerischen Gründen führt man die Substitutionen

$$\nu + 2 = z, \text{ und mithin } \nu + 1 = z - 1 \text{ und } \nu = z - 2$$

ein. Die rechnerische Arbeit läßt sich — besonders beim Rechnen mit der Maschine — vereinfachen, wenn die Grenzen der Summierungen identisch sind. Hierzu werden die im Gleichungssystem vorhandenen Reihen folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{z-2} b_{z-\lambda-2} R_1 \frac{1}{\lambda!} &= - \sum_{\lambda=1}^z b_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{(\lambda-2)!}; \\ \sum_{\lambda=0}^{z-2} (z-\lambda-1) b_{z-\lambda-1} R_2 \frac{1}{\lambda!} &= \sum_{\lambda=1}^z (z-\lambda) b_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{(\lambda-1)!}; \\ \sum_{\lambda=0}^{z-2} (z-\lambda-1)(z-\lambda) b_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{\lambda!} &= \sum_{\lambda=1}^z (z-\lambda-1)(z-\lambda) b_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{\lambda!}; \\ \sum_{\lambda=0}^{z-2} a_{z-\lambda-2} R_1 \frac{1}{\lambda!} &= - \sum_{\lambda=2}^z a_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{(\lambda-2)!} = - \sum_{\lambda=1}^z a_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{(\lambda-2)!}; \\ \sum_{\lambda=0}^{z-2} (z-\lambda-1) a_{z-\lambda-1} R_2 \frac{1}{\lambda!} &= - \sum_{\lambda=1}^z (z-\lambda) a_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{(\lambda-1)!}; \\ \sum_{\lambda=0}^{z-2} (z-\lambda-1)(z-\lambda) a_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{\lambda!} &= \sum_{\lambda=1}^z (z-\lambda-1)(z-\lambda) a_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{\lambda!}. \end{aligned}$$

Damit erhält man zur Berechnung der Koeffizienten des Differentialgleichungssystems die Formeln

$$\begin{aligned} a_z &= \left\{ \sum_{\lambda=1}^z \left[a_{z-\lambda} R_1 \left(\frac{m(1+\mu)}{(\lambda-2)!} + \frac{m(z-\lambda)}{(\lambda-1)!} - \frac{m(z-\lambda)}{(\lambda-1)!} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m(z-\lambda)(z-\lambda-1)}{\lambda!} \right) - E h \varrho_1 b_{z-\lambda} R_1 \frac{1}{(\lambda-2)!} \right] - \\ &\quad - Q_0 m(1+\mu) k^2 \varrho_1 R_3 \frac{1}{(z-2)!} + p \varrho_1^2 k^3 R_3 \frac{1}{(z-2)!} + \frac{1-\mu}{2} \times \\ &\quad \times p \varrho_1^2 k \frac{d_{z-2}}{(z-2)!} + m(1-\mu) \frac{p \varrho_1^2 k^2}{2} R_3 \frac{2^{z-2}}{(z-2)!} \left. \right\} \frac{1}{z(z-1)(k+m)}; \\ b_z &= \left\{ \sum_{\lambda=1}^z \left[b_{z-\lambda} R_1 \left(\frac{m(1-\mu)}{(\lambda-2)!} + \frac{m(z-\lambda)}{(\lambda-1)!} - \frac{m(z-\lambda)(z-\lambda-1)}{\lambda!} \right) \right. \right. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varrho_1}{D} a_{z-\lambda} R_1 \left. \frac{1}{(\lambda-2)!} \right] - \frac{Q_0 \varrho_1^2 k^2}{D} R_3 \frac{1}{(z-2)!} - \\
 & - \frac{p \varrho_1^3 k^2}{2D} R_3 \frac{2^{z-2}}{(z-2)!} - m \frac{p \varrho_1^3 k}{2D} \frac{d_{z-2}}{(z-2)!} \left. \right\} \frac{1}{z(z-1)(k+m)}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung (21) und (22) ergibt sich als die Summe der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen und einer partikularen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems erhält man aus der linearen Kombination von vier voneinander unabhängigen partikularen Lösungen. Die Reihenkoeffizienten für die partikuläre Lösung des homogenen Gleichungssystems ergeben sich, indem man an Stelle von Q_0 und p Null setzt. Da die Gl. (24) und (25) die Werte von a_0 , a_1 , b_0 und b_1 nicht angeben, können diese willkürlich gewählt werden. Vier partikuläre Lösungen bekommt man, indem man diesen ersten Koeffizienten verschiedene Werte gibt. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn in der partikularen Lösung nur der Wert einer der vier Koeffizienten von Null verschieden ist.

Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems wird man zweckmäßig als die Summe zweier Reihen darstellen, denn gewöhnlich ist Q_0 in den die Inhomogenität verursachenden Gliedern unbekannt, p hingegen bekannt. Die Koeffizienten werden deshalb aus den Gleichungen (24) und (25) so ermittelt, daß einmal Null an die Stelle von p und 1 an die Stelle von Q_0 , im zweiten Fall dagegen 1 an die Stelle von p und Null an die Stelle von Q_0 gesetzt wird. Zweckmäßig wird man die ersten vier Koeffizienten in beiden Fällen mit Null ansetzen.

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems der Torusflächen ist daherr

$$W = \sum_{i=1}^4 c_i \sum_{z=0}^{\infty} a_z^{(i)} \varphi^z + Q_0 \sum_{z=0}^{\infty} a_z^{(Q_0)} \varphi^z + p \sum_{z=0}^{\infty} a_z^{(p)} \varphi^z, \quad (26)$$

$$\Theta = \sum_{i=1}^4 c_i \sum_{z=0}^{\infty} b_z^{(i)} \varphi^z + Q_0 \sum_{z=0}^{\infty} b_z^{(Q_0)} \varphi^z + p \sum_{z=0}^{\infty} b_z^{(p)} \varphi^z, \quad (27)$$

worin c_1 , c_2 , c_3 und c_4 unbekannte Konstanten sind. Diese Konstanten und Q_0 können aus den Randbedingungen bestimmt werden. Die Werte der in der Lösung enthaltenen unendlichen Reihen lassen sich nur näherungsweise ermitteln, d. h. es kann nur eine endliche Gliederzahl berücksichtigt werden.

Die Genauigkeit der Lösung hängt davon ab, wieviele Glieder der Reihen berücksichtigt werden. Um für verschiedene Torusflächen Lösungen gleicher Genauigkeit erhalten zu können, ändert sich die Zahl der zu berücksichtigenden

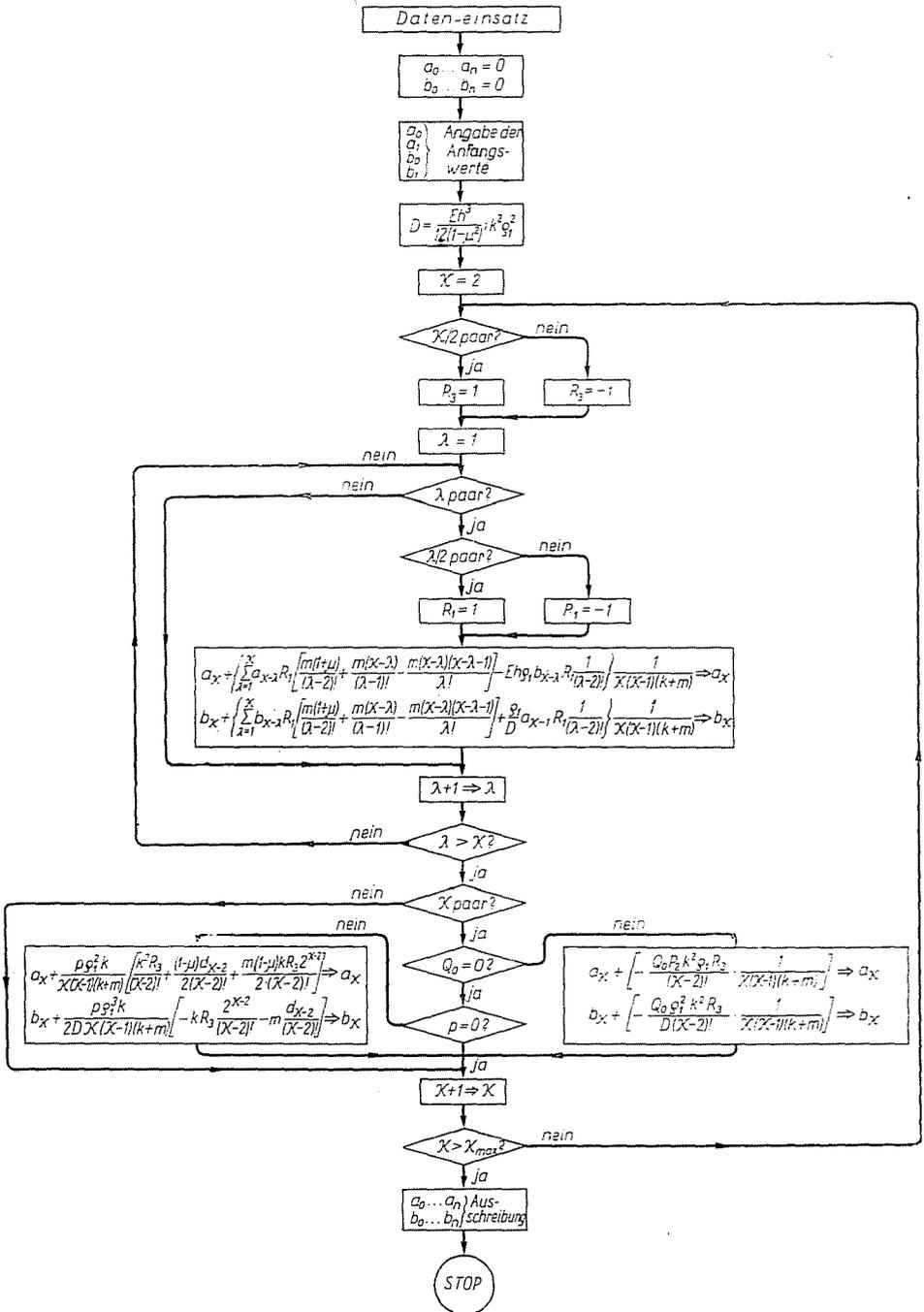


Abb. 3

Glieder in Abhängigkeit vom Krümmungsverhältnis ϱ/ϱ_1 der Torusfläche, von der Schalenstärke, vom Radius des Meridiankreises und von φ_{\max} . Die Konvergenz der für die Lösung erforderlichen Reihen ist bei den in der Praxis vorkommenden Torusflächenabmessungen mäßig, die Ermittlung der Reihen-koeffizienten erfordert somit einen großen Aufwand an numerischem Rechnen. Es liegt daher nahe, einen digitalen Rechenautomaten zu verwenden.

Abb. 3 zeigt das Blockdiagramm des Rechenprogramms für die Berechnung der Koeffizienten a_x und b_x mit einer Rechenmaschine. Für die Berechnung müssen die Werte der Größen k , ϱ_1 , h , φ_{\max} und m angegeben werden. Außerdem benötigt man die Anfangswerte a_0 , a_1 , b_0 , b_1 , Q_0 und p je nachdem, welche Koeffizienten der partikularen Lösungsreihen berechnet werden [s. Formel (26) und 27)].

Die zur Bestimmung der unbekanntenen Konstanten dienenden Randbedingungen beziehen sich auf die Beanspruchung und Verschiebung bzw. Verdrehung der Torusschale. Diese Größen müssen deshalb durch Verwendung der Lösungen des Differentialgleichungssystems als Funktionen der unbekanntenen Konstanten angegeben werden.

Aus der Formel (16) bekommt man mit (18) und (26) und unter Berücksichtigung der Abb. 2 die Schub-Kantenkraft:

$$Q = \frac{V}{\varrho_2} = \frac{\sin \alpha}{\varrho_1 (k + m \sin \alpha)^2} \left\{ \sum_{i=1}^4 c_i \sum_{x=0}^{\infty} a_x^{(i)} \varphi^x + Q_0 \left(\sum_{x=0}^{\infty} a_x^{(Q_0)} \varphi^x + \cotg \alpha k^2 \varrho_1 \right) + p \left[\sum_{x=0}^{\infty} a_x^{(p)} \varphi^x + \frac{\varrho_1^2 k}{2} \cos \alpha (2k + m \sin \alpha) \right] \right\}. \quad (28)$$

Die normale Kantenkraft, die in der auf den Meridianschnitt senkrechten Ebene wirkt, kann aus Gl. (14) unter Berücksichtigung der Gleichungen (28) und (29)

$$T_1 = - \frac{\cos \alpha}{\varrho_1 (k + m \sin \alpha)^2} \left(\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{x=0}^{\infty} a_x^{(i)} \varphi^x + \right. \\ \left. + Q_0 \sum_{x=0}^{\infty} a_x^{(Q_0)} \varphi^x + p \sum_{x=0}^{\infty} a_x^{(p)} \varphi^x \right) + Q_0 \frac{k \sin \alpha + m}{(k + m \sin \alpha)^2} + \\ + \frac{p \varrho_1}{2} \frac{2k + m \sin \alpha}{k + m \sin \alpha} \left(1 - \frac{k \cos^2 \alpha}{k + m \sin \alpha} \right). \quad (29)$$

Für die in der Meridianebene wirkende Kantenkraft erhält man mit den Gleichungen (29) und (26) aus der Formel (2)

$$T_2 = m \frac{\cos \alpha}{\varrho_1 (k + m \sin \alpha)^2} \left(\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{x=0}^{\infty} a_x^{(i)} \varphi^x + Q_0 \sum_{x=0}^{\infty} a_x^{(Q_0)} \varphi^x + p \sum_{x=0}^{\infty} a_x^{(p)} \varphi^x \right) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\varrho_1 (k + m \sin \alpha)} \left(\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa a_{\kappa}^{(i)} \varphi^{\kappa-1} + Q_0 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa a_{\kappa}^{(Q_0)} \varphi^{\kappa-1} + \right. \\
& \left. + p \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa a_{\kappa}^{(p)} \varphi^{\kappa-1} \right) - Q_0 k \frac{1 + mk \sin \alpha}{(k + m \sin \alpha)^2} + \\
& + \frac{p \varrho_1}{2} \left[\frac{2k^2 \sin \alpha (k + m \sin \alpha) + k(\sin^3 \alpha + mk)}{(k + m \sin \alpha)^2} + m \right].
\end{aligned} \tag{30}$$

Das Kantenmoment in der Ebene senkrecht auf den Meridianschnitt schreibt sich mit Gl. (27) aus (11) unter Berücksichtigung der Abb. 2 zu

$$\begin{aligned}
M_1 = m(1 - \mu) \frac{D \cos \alpha}{\varrho_1 (k + m \sin \alpha)^2} & \left(\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}^{(i)} \varphi^{\kappa} + Q_0 \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}^{(Q_0)} \varphi^{\kappa} + \right. \\
& \left. + p \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}^{(p)} \varphi^{\kappa} \right) - \frac{D}{\varrho_1 (k + m \sin \alpha)} \left(\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa b_{\kappa}^{(i)} \varphi^{\kappa-1} + \right. \\
& \left. + Q_0 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa b_{\kappa}^{(Q_0)} \varphi^{\kappa-1} + p \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa b_{\kappa}^{(p)} \varphi^{\kappa-1} \right).
\end{aligned} \tag{31}$$

Ähnlich ergibt sich das in der Meridianebene wirkende Kantenmoment aus Gleichung (12) zu

$$\begin{aligned}
M_2 = -m(1 - \mu) \frac{D \cos \alpha}{\varrho_1 (k + m \sin \alpha)^2} & \left(\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}^{(i)} \varphi^{\kappa} + Q_0 \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}^{(Q_0)} \varphi^{\kappa} + \right. \\
& \left. + p \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}^{(p)} \varphi^{\kappa} \right) - \frac{\mu D}{\varrho_1 (k + m \sin \alpha)} \left(\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa b_{\kappa}^{(i)} \varphi^{\kappa-1} + \right. \\
& \left. + Q_0 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa b_{\kappa}^{(Q_0)} \varphi^{\kappa-1} + p \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa b_{\kappa}^{(p)} \varphi^{\kappa-1} \right).
\end{aligned} \tag{32}$$

Der Verdrehungswinkel wird aus Gleichung (17) mit (27):

$$\vartheta = \frac{1}{k + m \sin \alpha} \left(\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}^{(i)} \varphi^{\kappa} + Q_0 \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}^{(Q_0)} \varphi^{\kappa} + p \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}^{(p)} \varphi^{\kappa} \right). \tag{33}$$

Zur Bestimmung der Verschiebung in Richtung der Drehachse wird das in Abb. 4 dargestellte Toruselement untersucht. Wird die geschlossene Konturlinie $CDD'C'C$ auf die zur Drehachse parallele Gerade projiziert, dann gilt

$$du = (\vartheta \cos \alpha + m \varepsilon_1 \sin \alpha) \varrho_1 dx.$$

Unter Vernachlässigung der dehnungsbedingten Verschiebung im Vergleich

zu der aus der Verdrehung entstehenden Verschiebung ergibt sich für die Änderung der Torusteilabmessung in Richtung der Drehachse ein

$$u = \int_{z_0}^{z_{n,\max}} \varrho_1 \vartheta \cos \alpha \, dz,$$

oder, mit α den Gl. (17) und (27) ein

$$u = \int_{z_0}^{z_{\max}} \frac{\varrho_1 \cos \alpha}{k + m \sin \alpha} \left(\sum_{i=1}^4 c_i \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}^{(i)} \varphi^{\nu} + Q_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}^{(Q_0)} \varphi^{\nu} + \right. \\ \left. + p \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}^{(p)} \varphi^{\nu} \right) dz. \tag{34}$$

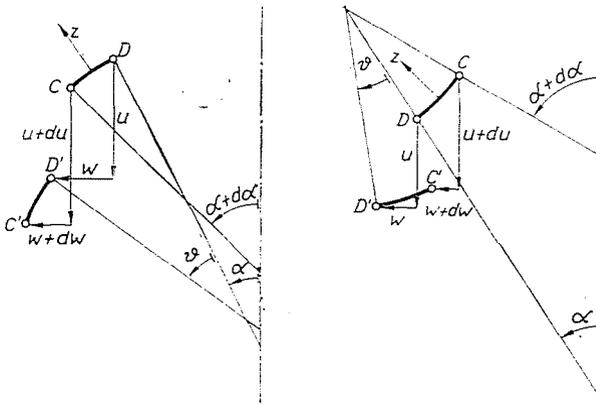


Abb. 4

Wie den Lösungen des Differentialgleichungssystems zu entnehmen ist, stellt jedes durch die Zerlegung einer Konstruktion gewonnene Torusstück 5 Unbekannte dar. Demzufolge beträgt die Zahl der Unbekannten bei Zerlegung einer Konstruktion in n Teile $5n$, vorausgesetzt, daß sämtliche die Konstruktion angreifenden äußeren Kräfte bekannt sind. In bezug auf eine Zerlegungsstelle müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Gleichgewicht der Schubkräfte, die auf ein in der Umgebung der Zerlegung ausgeschnittenes Element wirken.

2. Gleichgewicht der normalen Kantenkräfte T_1 und T_2 , die auf ein, in der Umgebung der Zerlegung ausgeschnittenes Element wirken, und Gleichheit der auf die Meridianebene senkrechten spezifischen Längsdehnungen der anschließenden Elemente. Wenn zwei dieser drei Bedingungen erfüllt sind, ist auch die dritte Bedingung erfüllt.

3. Gleichgewicht der Kantenmomente M_1 und M_2 in einem, in der Umgebung der Zerlegung ausgeschnittenen Element und Gleichheit der Verdrehungen der anschließenden Elemente. Auch in diesem Falle ist die Erfüllung der dritten Bedingung die Konsequenz der Erfüllung der beiden anderen.

Für eine Anschlußstelle können also im allgemeinen $1 + 2 + 2 = 5$ voneinander unabhängige Gleichungen aufgestellt werden. Bei der Lösung des Differentialgleichungssystems ist das Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Drehachse für jedes Torusstück in Gestalt der Funktion $F(\alpha)$ in die Berechnung bereits eingegangen.

Findet sich im Meridianschnitt eine geschlossene Konturlinie, dann folgt eine der verwendeten Gleichgewichtsgleichungen schon aus den vorangehenden Gleichgewichtsgleichungen und aus dem Gleichgewicht der ganzen Konstruktion. Das besagt, daß aus den im Sinne der obigen Darlegungen aufgestellten Anschlußbedingungen eine Gleichung, in der in Richtung der Drehachse wirksame Kräfte enthalten sind, ausgeschlossen bleiben müssen. Demgegenüber kann man von dem Umstand Gebrauch machen, daß die vor der Formänderung geschlossene Konturlinie auch nach der Formänderung geschlossen bleibt, d. h. daß die Summe der Abmessungsänderungen in Richtung der Drehachse Null ist.

Bei nicht geschlossener Torusfläche können für das aus der Umgebung des frei verschieblichen Randes ausgeschnittene Element 3 Gleichgewichtsgleichungen geschrieben werden (Kanten-Schubkräfte, Kanten-Normalkräfte und Kantenmomente, die in der Ebene senkrecht auf die Meridianebene angreifen).

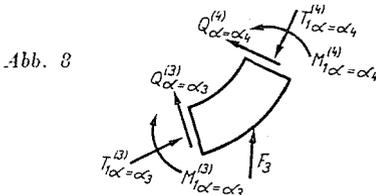
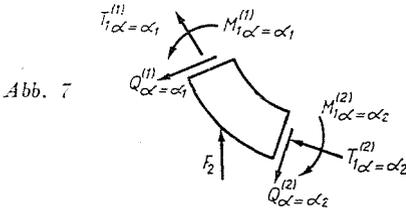
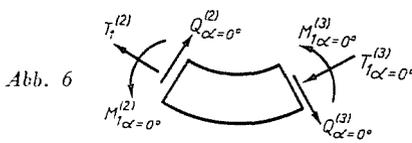
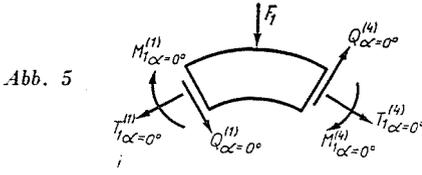
Bei eingespanntem Rand ist die Längsdehnung senkrecht zur Meridianebene und die Verdrehung gleich Null.

Ist eine der an der Konstruktion angreifenden äußeren Kräfte unbekannt, kann sie aus der Gleichgewichtsbedingung der ganzen Konstruktion abgeleitet werden, oder man stellt, was damit gleichwertig ist, für sämtliche Anschlußstellen die obigen je 5 Anschlußbedingungen auf. Greifen dagegen an der Konstruktion zwei oder mehr unbekannte äußere Kräfte an, so liefern die Zusammenhänge zwischen den zur Drehachse parallelen Verschiebungen der Konstruktionsteile die fehlenden Gleichungen.

Nach den obigen Gesichtspunkten sei hier als Beispiel das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Konstanten für den Fall gemäß Abb. 1 angeführt (s. zur Erläuterung auch die Abbildungen 5—8). Bekannt ist die an der Konstruktion angreifende Kraft F_1 . Die Zahl der Unbekannten beträgt 22, da außer den je 5 Unbekannten der Schnittstellen auch die Kräfte F_2 und F_3 unbekannt sind.

Bemerkung: Die oberen eingeklammerten Indizes in den Bezeichnungen der Beanspruchungen und Formänderungen entsprechen den Zeichen der Torusstücke in Abb. 1.

Ersetzt man die im Gleichungssystem (35) figurierenden Größen durch die Formeln (28) . . . (34), so erhält man für die Berechnung der unbekanntenen Konstanten ein lineares Gleichungssystem, in welchem in den Koeffizienten



$$\begin{aligned}
 T_{1\alpha=0}^{(1)} + T_{1\alpha=0}^{(4)} &= 0 \\
 Q_{\alpha=0}^{(1)} + F_1 - Q_{\alpha=0}^{(4)} &= 0 \\
 M_{1\alpha=0}^{(1)} + M_{1\alpha=0}^{(4)} &= 0 \\
 \vartheta_{\alpha=0}^{(1)} - \vartheta_{\alpha=0}^{(4)} &= 0 \\
 \varepsilon_{2\alpha=0}^{(1)} - \varepsilon_{2\alpha=0}^{(4)} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{1\alpha=0}^{(2)} + T_{1\alpha=0}^{(3)} &= 0 \\
 Q_{\alpha=0}^{(2)} - Q_{\alpha=0}^{(3)} &= 0 \\
 M_{1\alpha=0}^{(2)} + M_{1\alpha=0}^{(3)} &= 0 \\
 \vartheta_{\alpha=0}^{(2)} - \vartheta_{\alpha=0}^{(3)} &= 0 \\
 \varepsilon_{2\alpha=0}^{(2)} - \varepsilon_{2\alpha=0}^{(3)} &= 0
 \end{aligned}$$

(35)

$$\begin{aligned}
 T_{1\alpha=\alpha_1}^{(1)} + F_2 \sin \alpha_2 - T_{1\alpha=\alpha_2}^{(2)} &= 0 \\
 Q_{\alpha=\alpha_1}^{(1)} + Q_{\alpha=\alpha_1}^{(2)} - F_2 \cos \alpha_2 &= 0 \\
 M_{1\alpha=\alpha_1}^{(1)} - M_{1\alpha=\alpha_2}^{(2)} &= 0 \\
 \vartheta_{\alpha=\alpha_1}^{(1)} + \vartheta_{\alpha=\alpha_2}^{(2)} &= 0 \\
 \varepsilon_{2\alpha=\alpha_1}^{(1)} + \varepsilon_{2\alpha=\alpha_2}^{(2)} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{1\alpha=\alpha_3}^{(3)} + F_3 \sin \alpha_4 - T_{1\alpha=\alpha_4}^{(4)} &= 0 \\
 Q_{\alpha=\alpha_3}^{(3)} + Q_{\alpha=\alpha_4}^{(4)} + F_3 \cos \alpha_3 &= 0 \\
 M_{1\alpha=\alpha_3}^{(3)} - M_{1\alpha=\alpha_4}^{(4)} &= 0 \\
 \vartheta_{\alpha=\alpha_3}^{(3)} - \vartheta_{\alpha=\alpha_4}^{(4)} &= 0 \\
 \varepsilon_{2\alpha=\alpha_3}^{(3)} - \varepsilon_{2\alpha=\alpha_4}^{(4)} &= 0 \\
 u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} &= 0 \\
 u^{(2)} + u^{(3)} &= 0.
 \end{aligned}$$

der Unbekannten unendliche Reihen vorkommen. Für jedes Torusstück hat man zur Lösung des Differentialgleichungssystems je 6 unendliche Reihen, ferner je 6 Reihen als die Ableitungen der Lösungen, da schließlich das Integral in Gl. (34) in geschlossener Form nicht ausgeführt werden kann, dieses Integral also durch die annähernde Summe der Rechtecke ersetzt wird, müssen weitere

6 $\frac{\alpha_{\max} - \alpha_0}{\Delta \alpha}$ Reihen berechnet werden.

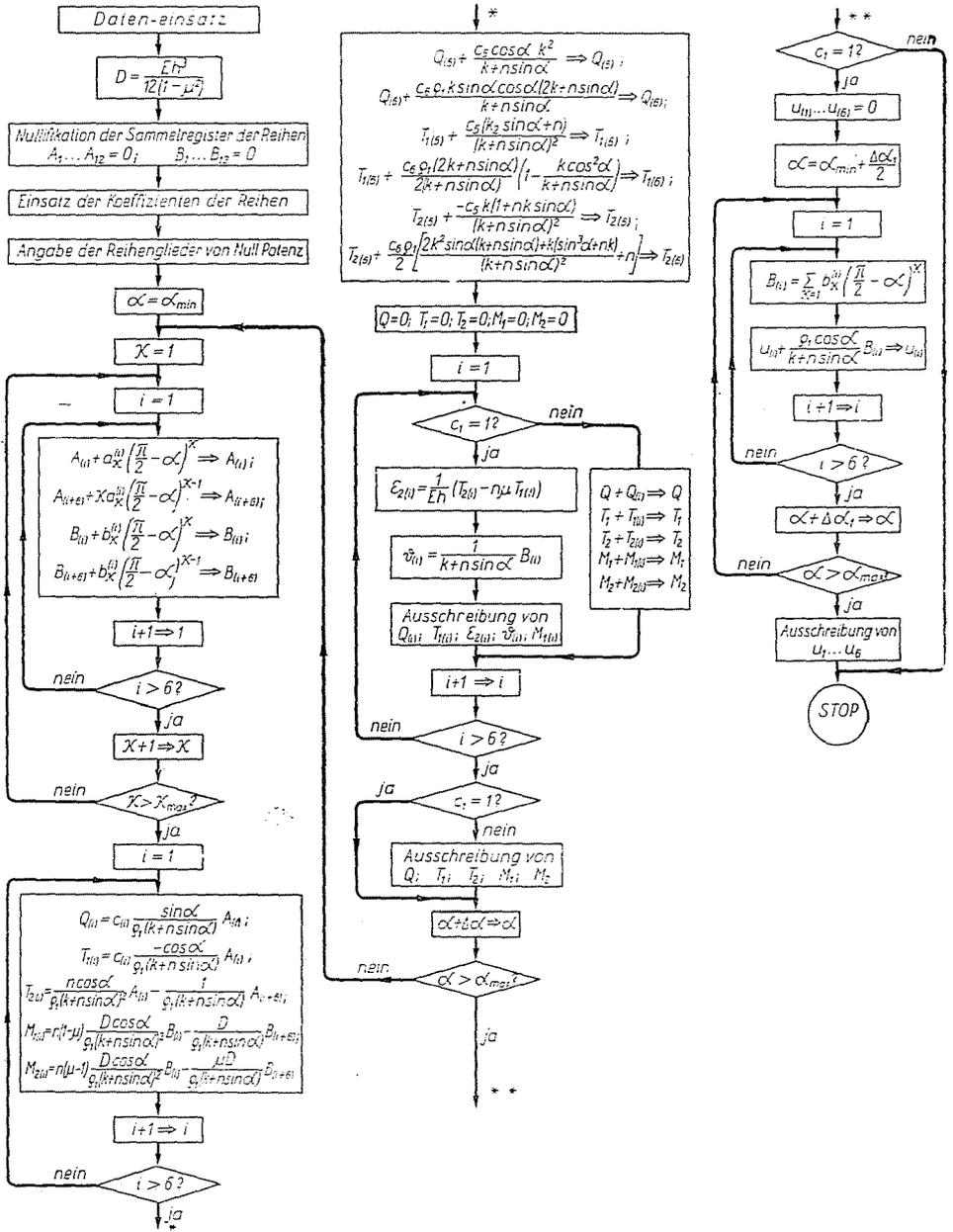


Abb. 9

Zweckmäßig wird man auch diese gewaltige Rechenarbeit mit einem elektronischen digitalen Rechenautomaten ausführen, ja es liegt sogar nahe, ein Doppelprogramm zusammenzustellen, das sich einerseits zur Bestimmung der Koeffizienten der vorläufig unbekanntenen Konstanten, andererseits nach deren Bestimmung zur Ermittlung der an verschiedenen Stellen der Schale auftretenden Beanspruchungen — nötigenfalls der Verschiebungen und Verdrehungen — eignet.

Abb. 9 veranschaulicht das Blockdiagramm des Programmes, das diese Aufgaben löst. Für die Berechnung sind die Werte von k , q_1 , h , α_{\max} , m , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , Q_0 und p , ferner die Ortskoordinaten der beiden extremen Punkte des Torusstückes (α_{\min} , α_{\max}) sowie das zur Berechnung der Beanspruchungen bzw. Verschiebungen verwendete Rechenintervall (Δx bzw. $\Delta \alpha_1$) anzugeben. Zur Vereinfachung des Blockdiagramms wurden hier $Q_0 = c_5$ und $p = c_6$ gesetzt.

Das Gleichungssystem (35) oder ein ähnliches anderes kann auch dann wieder nur mit dem Rechenautomaten gelöst werden, wenn die Koeffizienten schon bekannt sind, denn selbst für die hier behandelte, nicht sehr komplizierte Schale liefern die Anschlußbedingungen ein lineares Gleichungssystem, das 22 Unbekannte enthält. Für die Lösung dieser Aufgabe wird hier kein Blockdiagramm angegeben, da die Lösung linearer Gleichungssysteme mit vielen Unbekannten mit dem Rechenautomaten ziemlich häufig ist und somit kein Problem darstellt.

Nach Bestimmung der Koeffizienten des linearen Gleichungssystems können die Spannungen in den verschiedenen Punkten der Schale mit Hilfe des in Abb. 5 dargestellten Blockdiagramms ermittelt werden.

Die in dieser Abhandlung dargelegte Methode eignet sich nicht nur zur Berechnung von torusförmigen, sondern auch von Torusstücke enthaltenden Schalen, z. B. von Kesselböden.

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird eine Methode zur Berechnung der Beanspruchungen beliebiger, drehsymmetrischbelasteter Torusschalen beschrieben. Die Verfasser lösen das Differentialgleichungssystem der Torusflächen in Form unendlicher Reihen, und geben im Hinblick auf den großen Aufwand an numerischer Rechenarbeit, den die Ermittlung der Reihenoeffizienten und der Reihensummen erfordert, Blockdiagramme an, die die Grundlage für die Ausführung der Rechnungen auf digitalen Rechenautomaten bieten können.

Literatur

- ESSLINGER, M.: Statische Berechnung von Kesselböden. Berlin, Springer 1952.
 FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Springer, Berlin 1957.
 PONOMARJOW, S. D.: Festigkeitsberechnungen im Maschinenbau, 3. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1965.
 TIMOSHENKO, S.—WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959.

Livia PÁRTOS }
 Károly PINTÉR } Budapest XI., Műgyetem rkp. 3. Ungarn.