

EINIGE FRAGEN ALLGEMEIN BELASTETER QUADRATISCH SYMMETRISCHER TRÄGERROSTE

Von

P. MICHELBERGER

Lehrstuhl für Eisenbahnmaschinen, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 27. Januar, 1967)

Vorgelegt von Prof. Dr. G. RUDNAI

1. Einleitung

Bei Fahrzeugen (besonders bei Schiffen), Deckenkonstruktionen, Brückenfahrbahnen gelangen häufig gerippte Blechkonstruktionen, Trägerroste zur Anwendung. Derartige Konstruktionen werden meist nach der Theorie der isotropen bzw. orthotropen Platten (z. B. HUBER, TIMOSHENKO [1] u. a.) berechnet. Die Genauigkeit der als Kontinuum durchgeführten Berechnung befriedigt jedoch bei kleiner Rippenzahl nicht, und bei komplizierten Lagerungs- bzw. Belastungsverhältnissen erfordert sie einen sehr großen Arbeitsaufwand. Das Verfahren von MASSONET [2] und GIENCKE [3], das eine Näherungslösung der genauen Differentialgleichung liefert, gibt nach Untersuchungen von FARKAS [4, 5] für Rippenzahlen von weniger als 5 (d. h. für Blechkonstruktionen mit 4×4 oder weniger Feldern) bei quadratischer Form der Felder keine befriedigende Lösung, und auch die Lagerung kann nicht beliebig sein. Hieraus folgt, daß man in solchen Fällen für die Berechnungen statt eines kontinuierlichen Modells zweckmäßig ein diskretes Modell verwendet. Zu diesem Zweck hat DUBAS [6] die für das Kontinuum aufgeschriebene partielle Differentialgleichung auf eine Differenzgleichung zurückgeführt und deren numerische Lösung ausgearbeitet.

Als noch natürlicher bietet sich als Lösung der Aufgabe die Berechnung als Trägerrost an, wobei sich die natürlichen Teilungen durch die Rippen von selbst ergeben. Die Berechnung als Trägerrost liefert sowohl für wenige als auch für viele Rippen gleich genaue Resultate. Sie hat jedoch den Nachteil, daß der Arbeitsaufwand der Berechnung mit wachsender Teilungszahl — sowohl beim Deformations- wie auch beim Kraftgrößenverfahren — schnell zunimmt. FARKAS untersuchte eine totale, in Richtung beider Koordinatenachsen gleichmäßig verteilte Belastung, der die als Kontinuum durchgeführte Berechnung ihrem Charakter nach näher liegt. Für eine aus einzelnen konzentrierten Kräften bestehende Belastung verdient offenbar die Berechnung als Trägerrost noch mehr den Vorzug.

Im allgemeinen sträubt man sich wegen der auftretenden linearen Gleichungssysteme mit vielen Unbekannten gegen Trägerrost-Berechnungen. Mit Rechenmaschinen bereitet jedoch auch die Lösung komplizierterer

Gleichungssysteme keine Schwierigkeit. Trotzdem ist es angebracht, die Rechenarbeit auch in solchen Fällen herabzusetzen und das Gleichungssystem in eine handlichere Form zu bringen (diagonale Umformung, Zerlegung in unabhängige Teile usw.), was in den meisten Fällen auch die Aufstellung des Gleichungssystems erleichtert. Für die Berechnung bedeuten Trägerroste mit quadratischen Feldern in quadratisch symmetrischer Anordnung Sonderfälle. Trotz der Eigenart dieser geometrischen Anordnung trifft man in der Praxis oft solche quadratische Trägerroste. Mit guter Näherung können als solche z. B. Deckenkonstruktionen mit einem Seitenverhältnis von etwa 1 : 1, ferner die zwischen zwei Schottspanten liegenden Abschnitte der Deck- und Bodenkonstruktionen von Schiffen usw., als solche angesehen werden.

Die Symmetrieeigenschaften der quadratischen Trägerroste wurden bisher zur Untersuchung allgemeiner Belastungen nicht in vollem Maße ausgenützt. In seinem Aufsatz hat FARKAS [5] bei der Untersuchung der totalen Belastung — d. h. einer Belastung, die selbst auch über vier Symmetrieachsen verfügt, —, die durch die Symmetrie gegebenen Möglichkeiten zur Vereinfachung herangezogen, seine Untersuchung jedoch auf allgemeine Belastungen nicht ausgedehnt.

Im folgenden soll die Ermittlung der inneren Kräfte, die aus einer beliebigen, senkrecht auf der Trägerrostebene angreifende Belastung entstehen, unter voller Ausnützung der quadratischen Symmetrie der Konstruktion behandelt werden.

2. Symmetrieverhältnisse von Trägerrosten quadratischer Anordnung

Eine quadratische Konstruktion besitzt vier in einer Ebene liegende Symmetrieachsen (Abb. 1). Entsprechend läßt sich die Belastung im allgemeinen in mehrere Symmetrie-Ordnungen einreihen. Legt man die Koordinatenachsen durch den Mittelpunkt des Quadrats parallel zu dessen Seiten, dann sind offenbar die beiden Koordinatenachsen und auch die mit ihnen einen Winkel von 45° einschließenden Diagonalen Symmetrieachsen.

Von höchster Ordnung ist die Symmetrie der Belastung dann, wenn diese ähnlich wie die Konstruktion symmetrisch in bezug auf alle vier Achsen ist. Wenn bei dieser Belastungsart an einem Punkt mit den beliebigen Koordinaten $(+i, +k)$ die äußere Kraft $P_{i,k}$ wirkt, dann muß offenbar an den Punkten mit den Koordinaten $(+k, +i)$, $(-i, -k)$, $(-k, -i)$, $(+k, -i)$, $(-i, +k)$, $(-k, +i)$ und $(+i, -k)$ gleichfalls eine Kraft P wirken, man hat also — mit Ausnahme der unmittelbar auf die Symmetrieachsen wirkenden Kräfte — ein Kräfteoktett. Bei doppelter Symmetrie ist die Belastung symmetrisch entweder bezüglich der beiden Koordinatenachsen oder in bezug auf die beiden Diagonalen. In diesem Falle liegt ein Kräftequartett vor.

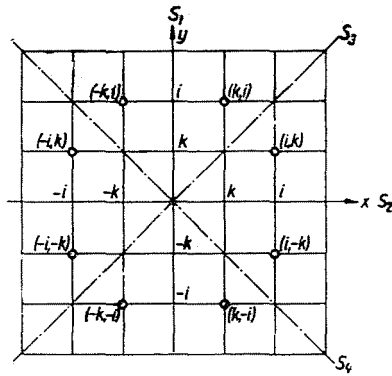


Abb. 1. Symmetrieachsen eines Trägerrostes quadratischer Anordnung

Richtung der Symmetrieachse	Laufende Nummer der Belastungsgruppe:																					Zahl der bildbaren orthogonalen Gruppen		
	A			B			C			D			E			F								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21			
symmetrisch	*○	+×	1-	/\	+○	×○	1○	/○	○/	○-	○\	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○			
antimetrisch	○*	×+	-1	\ /	○+	○×	○1	○/	○\	○-	○\	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○			
Kräftegruppe	Ableitbarkeit aus einer Symmetrie höherer Ordnung												5	6	7	8	6	5	8	7	A	B	A	C
lfd Nummer der Gruppe									1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2		
									3	4	4	3	3	4	4	3	3	4	4	3	3	4		
*○	1																					13		
○*	2																					13		
+×	3																					13		
×+	4																					13		
1-	5																					9		
-1	6																					9		
/\	7																					9		
\ /	8																					9		
+○	9																					7		
○+	10																					7		
×○	11																					7		
○×	12																					7		
1○	13																					5		
○1	14																					5		
/○	15																					5		
○/	16																					5		
-○	17																					5		
○-	18																					5		
\○	19																					5		
○\	20																					5		
○○	F 21																					0		

Abb. 2. Symmetrische und antimetrische Belastungsgruppen an einem quadratischen Trägerrost und deren Ableitbarkeit

Schließlich tritt im Falle nur einer Symmetrieachse, wie bekannt, ein Kräfte-dublett auf. Zu jeder symmetrischen Belastung kann natürlich deren anti-metrisches Paar gebildet werden, d. h. eine Kräftegruppe mit vierfacher, doppelter bzw. einfacher Antimetrie.

Außer diesen Grundfällen kann auch die Kombination von Symmetrie- und Antimetrie-Verhältnissen vorkommen, so z. B. Antimetrie in bezug auf beide Koordinatenachsen mit gleichzeitiger Symmetrie bezüglich der Diagonalen. Die 21 möglichen Fälle (schließlich des der allgemeinen Belastungen entsprechenden Falles der O-Symmetrie bzw. O-Antimetrie) sind in Abb. 2 zusammengefaßt. In der Kopfleiste des Bildes und an dessen linker Seite ist graphisch die Richtung der Symmetrieachsen angedeutet, zu welchen die jeweilige Belastungsgruppe eine Symmetrie bzw. Antimetrie besitzt. Das Vorhandensein von vier Symmetrieachsen wird also mit einem *, derjenige von zwei Symmetrieachsen mit einem + oder \times und jenes von einer Symmetrieachse je nachdem mit $|$ — \langle \searrow bezeichnet; schließlich hat der Fall, bei dem keine Symmetrieachse vorhanden ist, die Bezeichnung 0. Im Bild sind die Kreuzungsfelder der Reihen bzw. Spalten, die aufeinander orthogonale Belastungsgruppen darstellen, gestrichelt; die zu diesen beiden Gruppen gehörenden statisch unbestimmten Größen lassen sich also aus zwei voneinander unabhängigen Gleichungssystemen ermitteln. Die Belastungsgruppen, die den leer gelassenen Feldern entsprechen, bilden keine orthogonale Systeme.

Der orthogonale Charakter der Belastungsgruppen läßt sich nach folgendem Gedankengang leicht beweisen: Sind zwei Belastungsgruppen orthogonal, so haben die Einheitsfaktoren, die mit dem Integral des Skalarproduktes je einer aus den beiden Gruppen gewählten — ansonsten beliebigen — Einheitsbelastung bestimmt werden können, notwendigerweise den Wert Null. Dem ist tatsächlich in jedem als orthogonal bezeichneten Fall so; wenn man nämlich in der Konstruktion nach Belieben einen Oktanten (das Feld zwischen zwei nebeneinander liegenden Symmetrieachsen) auswählt, um das erwähnte Integralprodukt zu bilden, so kann man stets einen anderen Oktanten finden, in dem der Wert des Integralproduktes die gleiche Größe, aber ein entgegengesetztes Vorzeichen hat. Ihre Summe beträgt folglich Null. Da die Auswahl des Oktanten an keine Bedingung geknüpft war, ist offenbar das Resultat der Integration über die ganze Konstruktion ebenfalls gleich Null.

Von den möglichen symmetrischen und antimetrischen Gruppen interessieren hier in erster Linie die Gruppen höherer Ordnung, d. h. diejenigen, die, auf mehrere Gruppen gleichzeitig bezogen, orthogonal sind.

Der Abb. 2 ist zu entnehmen, daß die Gruppen *A* und *B* bzw. *A* und *C* untereinander stets orthogonal sind. Demgegenüber bilden die Gruppen *B* und *C* miteinander kein orthogonales System. Innerhalb der Gruppen *D* und *E* besteht nur noch teilweise Orthogonalität, und schließlich bildet die Gruppe *F* (die der ganz allgemeinen Belastung entspricht) überhaupt kein orthogonales System. Die Orthogonalität der Gruppen höherer Ordnung ist im allgemeinen die Folge des gleichzeitigen Auftretens von Symmetrie und Antimetrie. Daß die Gruppen *A*, *B* bzw. *C* von höherer Ordnung sind, zeigt sich auch darin, daß sie sich nicht aufeinander zurückführen lassen, während die Gruppen

D, E und *F* jeweils hergestellt werden können als einfache Summen einzelner Glieder der Gruppen *A* und *B* oder *A* und *C*. (In Abb. 2 ist auch diese Erzeugungsmöglichkeit angegeben.)

In *Tabelle I* ist die Erzeugung der allgemeinen Belastung aus den Gruppen *A* und *B* dargestellt. Es ist bemerkenswert, daß während ein torsionsweicher Trägerrost mit *n* Teilungen und gelenkiger Lagerung $(n - 1)^2$ -fach

Tabelle I

Lfd.Nr. der Belastungsgruppe	Unbestimmtheitsgrad der einzelnen Belastungsgruppen bei einem Trägerrost mit <i>n</i> Teilungen und gelenkiger Lagerung			
	Torsionsweiche Verbindung		Torsionssteife Verbindung	
	<i>n</i> gerade	<i>n</i> ungerade	<i>n</i> gerade	<i>n</i> ungerade
1	$\frac{(n-1)^2-1}{8}$	$\frac{(n-2)^2-1}{8}$	$\frac{(n-1)^2-1}{8} + \frac{n^2}{4}$	$\frac{(n-2)^2-1}{8} + \frac{n^2-1}{4}$
2	$\frac{(n-1)^2-1}{8}$	$\frac{n^2-1}{8}$	$\frac{(n-1)^2-1}{8} + \frac{(n+1)^2-1}{4}$	$\frac{n^2-1}{8} + \frac{(n+1)^2}{4}$
3	$\frac{(n+1)^2-1}{8}$	$\frac{n^2-1}{8}$	$\frac{(n+1)^2-1}{8} + \frac{n^2}{4}$	$\frac{n^2-1}{8} + \frac{n^2-1}{4}$
4	$\frac{(n-3)^2-1}{8}$	$\frac{(n-2)^2-1}{8}$	$\frac{(n-3)^2-1}{8} + \frac{(n+1)^2-1}{4}$	$\frac{(n-2)^2-1}{8} + \frac{(n+1)^2}{4}$
5	$\frac{(n-1)^2-1}{8}$	$\frac{(n-1)^2}{4}$	$\frac{(n-1)^2-1}{4} + \frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n-1)^2}{4} + \frac{n(n+1)}{2}$
6	$\frac{(n-1)^2-1}{4}$	$\frac{(n-1)^2}{4}$	$\frac{(n-1)^2-1}{4} + \frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{(n-1)^2}{4} + \frac{n(n+1)}{2}$
21	$(n-1)^2$	$(n-1)^2$	$(n-1)^2 + 2n(n+1)$	$(n-1)^2 + 2n(n+1)$

unbestimmt ist, die einzelnen orthogonalen Belastungsgruppen höchstens $1/4 (n - 1)^2$ Unbekannte enthalten.

Der Arbeitsaufwand der Berechnung ist bei einer nicht ganz allgemeinen Belastung, d. h. bei einer Symmetrie bzw. Antimetrie niedrigerer Ordnung, erheblich geringer, da man in solchen Fällen nur weniger als 6 orthogonale Gruppen zu berücksichtigen braucht.

Die allgemeine Belastung des Trägerrostes mit quadratischer Symmetrie läßt sich also nach obigem immer in 6 orthogonale Gruppen aufgliedern. Die statisch unbestimmten Größen dieser Gruppen können aus voneinander unabhängigen Gleichungssystemen ermittelt werden.

Bemerkt sei hier, daß die für vier Symmetrieachsen resultierenden Schlußfolgerungen nicht nur für quadratische Trägerroste gelten, sondern auch auf beliebige Arten von Konstruktionen mit vier Symmetrieachsen (z. B. auf Schalen, Rahmen usw.) ausgedehnt werden können.

3. Einige praktische Probleme der Berechnung quadratischer Trägerroste

Bei der Lösung nach dem Kraftgrößenverfahren bildet man das Grundsystem am einfachsten, indem man die Verbindung der einzelnen Längs- und Querträger miteinander in Gedanken aufhebt. Damit werden die einzelnen Trägerelemente zu einfachen, gleich langen Balken auf zwei Stützen (evtl. beiderseits eingespannt). Trotzdem kann die Aufstellung der Deformationsgleichungen bei großen Teilungszahlen ziemlich schwerfällig werden und zur Quelle zahlreicher Irrtümer werden. Die Ermittlung der Koeffizienten des Gleichungssystems läßt sich erheblich vereinfachen, wenn es gelingt, zu erreichen, daß die den einzelnen Unbekannten zugehörigen Momente nur auf einen verhältnismäßig kleinen Teil der Konstruktion wirken. Das läßt sich stets so einrichten, wenn man in den verwickelteren Belastungsgruppen noch eine lineare Transformation durchführt (siehe das Zahlenbeispiel).

Die Ergebnisse der bisherigen, für torsionsweiche Trägerroste mit gelenkiger Lagerung gültigen Untersuchungen, können sinngemäß auch auf ringsum eingespannte bzw. torsionssteife Trägerroste erweitert werden. Die Berechnung des am Umfang eingespannten Trägerrostes läßt sich durch Anwendung eines statisch unbestimmten Grundsystems auch formell auf den Fall der ringsum gelenkigen Lagerung zurückführen. Der Unbestimmtheitsgrad des torsionssteifen Trägerrostes ist im Verhältnis zum torsionsweichen Fall erheblich höher, die quadratische Symmetrie kann jedoch auch in diesem Falle ausgenützt werden und die unabhängigen orthogonalen Belastungsgruppen bestehen auch hier.

Wenn die geometrische Anordnung des Trägerrostes der quadratischen Symmetrie nicht genau entspricht, kann dieses Verfahren offenbar nur als Näherung angesehen werden. Man kann dann die an einzelnen Stellen auftretenden Abweichungen (Unsymmetrie der Auflagerung oder abweichende Steifigkeit eines einzelnen Trägerelementes usw.) mit der verallgemeinerten Perturbationsrechnung auf die Untersuchung weiterer zusätzlicher äußerer Lasten zurückführen, wobei auf die durch die Symmetrie gebotenen Vorteile nicht verzichtet zu werden braucht [7, 8].

4. Zahlenbeispiel

Es sollen die inneren Kräfte des in Abb. 3 dargestellten, am Knotenpunkt 6 mit der Kraft P belasteten Trägerrostes mit 6facher Seitenteilung (d. h. mit 6×6 Feldern) und gelenkigen Anschlüssen untersucht werden, der aus Balken konstanter Steifigkeit besteht. Die Aufgabe ist 25fach statisch unbestimmt. Die Lagerung an den vier Ecken bzw. ringsum am Umfang

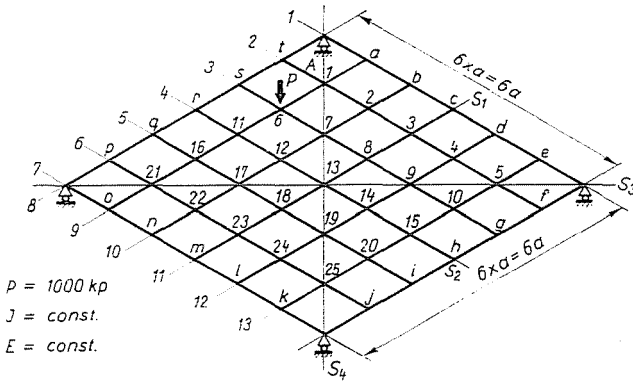


Abb. 3. Trägerrost mit allgemeiner Belastung und 6×6 Teilungen

ergibt bei gleicher Zahl von Rippenteilungen den gleichen Unbestimmtheitsgrad. (Es ist dies leicht einzusehen, wenn angenommen wird, daß die Endbalken biegesteif sind.)

Bei Ausnützung der quadratischen Symmetrie kommen in den 6 unabhängigen Gleichungssystemen je höchstens 6 Unbekannte vor, ja es gibt sogar eine Gruppe, die nur 1 Unbekannte enthält. Es genügt, den Wert der den doppelt symmetrischen Gruppen 5 und 6 zugehörigen Einheitsfaktoren lediglich bei einer der beiden Gruppen zu berechnen, da beiden Gruppen nur innere unbekannte Kräfte gleicher Anordnung zugehören, jedoch um 90° gegeneinander verdreht. Bei Matrizenrechnung braucht man die zur Lösung des Gleichungssystems nötige Matrixinversion für die Gruppen 5 und 6 ebenfalls nur einmal auszuführen.

Die Zerlegung der Kraft P in 6 orthogonale Komponenten ist in Abb. 4 dargestellt. Ausführlicher wird hier die Berechnung der (in bezug auf die Koordinatenachsen symmetrischen, bezüglich der Diagonalen antisymmetrischen) Kräftegruppe 3 erörtert. Diese Gruppe enthält 6 Unbekannte. Wird das Grundsystem durch Aufhebung der Verbindung zwischen den Quer- und Längsträgern hergestellt — was im gegebenen Fall am anschaulichsten ist —, gehören zu den einzelnen überzähligen Verbindungskräften einheitlicher Größe die in Abb. 5 gezeigten Belastungsmomente (es ist nur ein Quadrant dargestellt). Von den Momenten sind in erster Linie M'_1 ; M'_5 und M'_6 ziemlich

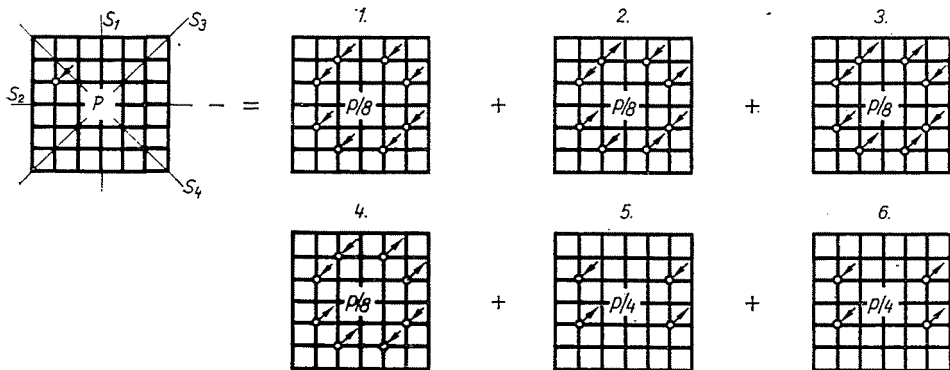


Abb. 4. Aufspaltung der allgemeinen Belastung in 6 orthogonale Gruppen

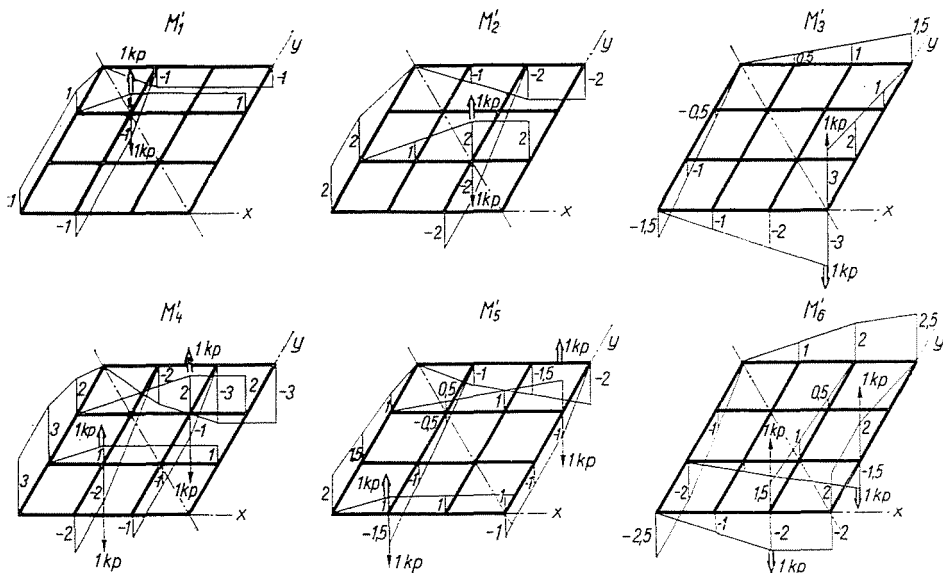


Abb. 5. Zu den überzähligen Verbindungskräften der 3. Belastungsgruppe gehörige Biegemomentenflächen. (Die mit Doppellinien ausgezeichneten Pfeile wirken auf die Balken in Richtung x.)

kompliziert, weshalb die Berechnung der Einheits- bzw. Belastungsfaktoren äußerst langwierig und arbeitsaufwendig ist. Die Berechnungsarbeit wird durch eine lineare Transformation vereinfacht. Am zweckmäßigsten wird man diese lineare Transformation durch Vergleich der Momentenbilder auswählen. Die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich kurz folgendermaßen beweisen: Fassen wir die Momentenfunktionen $M'_1(s); M'_2(s) \dots M'_6(s)$ in einen Vektor zusammen:

$$\mathbf{m}^* = [M'_1(s), M'_2(s) \dots M'_6(s)].$$

Die statisch unbestimmten Größen seien mit

$$\mathbf{x}^* = [X_1, X_2 \dots X_6]$$

bezeichnet. Mit diesen Definitionen läßt sich das System der Anschlußgleichungen in die Form

$$\mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{1}$$

bringen mit

$$\mathbf{D} = \int_{(t)} \mathbf{m}' \mathbf{m}'^* \frac{ds}{JE} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{16} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{61} & \dots & & \delta_{66} \end{bmatrix} \tag{2a}$$

$$\mathbf{d} = \int_{(t)} \mathbf{m}' M_0 \frac{ds}{JE} = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{60} \end{bmatrix} \tag{2b}$$

Multipliziert man die Gl. (1) von links mit einer Transformationsmatrix \mathbf{T} und setzt man zugleich an die Stelle der Unbekannten X die Veränderliche $\mathbf{y} = \mathbf{T}^* \mathbf{x}$ ein, dann hat man

$$(\mathbf{T} \mathbf{D}) \mathbf{T}^* \mathbf{y} + \mathbf{T} \mathbf{d} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Mit (3) können die Beziehungen (2a) und (2b) in die Form

$$\int_{(t)} (\mathbf{T} \mathbf{m}') (\mathbf{T} \mathbf{m}')^* \frac{ds}{JE} \mathbf{y} + \int_{(t)} (\mathbf{T} \mathbf{m}') M_0 \frac{ds}{JE} = \mathbf{0} \tag{3a}$$

gebracht werden. Wird die Bezeichnung $\bar{\mathbf{m}} \equiv \mathbf{T} \mathbf{m}'$ eingeführt, so kann das System der Anschlußgleichungen formell in einer der Beziehung (1) ähnlichen Form geschrieben werden:

$$\bar{\mathbf{D}} \mathbf{y} + \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}. \tag{4}$$

In dieser Gleichung kommt aber statt des Momentes \mathbf{m}' das Moment $\bar{\mathbf{m}}$ vor. Durch geeignete Wahl der Transformationsmatrix \mathbf{T} läßt sich ein wesentlich einfacheres System der Beanspruchungsbilder erreichen. An Hand der Momentenbilder empfiehlt es sich z. B., folgende Matrix zu wählen:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Schrifttum

1. TIMOSHENKO, S. P.—WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells, 2. ed. New York—Toronto—London, McGraw Hill.
2. MASSONET, CH.: Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques. Mémoires AIPC 19 (1959) Zürich, Leemann, 1959. p. 201—230.
3. GIENCKE, E.: Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen. Stahlbau 24. 128—129 (1955).
4. FARKAS, J.: Design of Simply Supported Square Plates Stiffened on one Side with a Square Grid of Ribs Subject to Uniformly Distributed Normal Loads. Proceedings of the Second Conference on Dimensioning . . . Bp. 1965. p. 65—79.
5. FARKAS, J.: Egyoldalón, kétirányban egyenletesen bordázott, megoszló terhelésű négyzetelemek tervezési kérdései. Kandidátusi disszertáció (1964).
6. DUBAS, CH.: Calcul numérique des plaques et des parois minces. Zürich, Leemann, 1955.
7. MICHELBERGER, P.: Verallgemeinerung der Perturbationsmethode und ihre Anwendung auf quasisymmetrische Konstruktionen. Period. Polytechnica. Vol. 6 Nr. 1 (1962).
8. MICHELBERGER, P.: Quasisymmetrische Dimensionierung asymmetrischer (Fahrzeug-) Konstruktionen. Acta Technica XXXV—XXXVI (1961).

Dr. Pál MICHELBERGER, Budapest XI., Műegyetem rkp. 3. Ungarn