BERECHNUNG DER INNEREN KRÄFTE QUADRATISCH SYMMETRISCHER TRÄGERROSTE MIT HILFE DER LINEAREN TRANSFORMATION

Von

P. MICHELBERGER

Lehrstuhl für Eisenbahnmaschinen, Technische Universität Budapest
(Eingegangen am 29. April 1967)
Vorgelegt von Prof. Dr. G. RUDNAI

Die inneren Kräfte in allgemein belasteten quadratischen Trägerrosten können unter Nutzung der Symmetrieverhältnisse mit Hilfe sechs unabhängiger orthogonaler Kräftegruppen ermittelt werden [1], die man auf Grund geometrischer Überlegungen wählt. Dieser Gedankengang führt für gewöhnlich dazu, daß statt der einzelnen Kräfte Kräfteoktette bestimmt werden müssen, was dem Konstrukteur, sofern ihm die nötige Praxis fehlt, Schwierigkeiten zu bereiten vermag. Die orthogonalen Gruppen können jedoch statt auf Grund geometrischer Überlegungen auch nach mathematischen Methoden gebildet werden.

1. Transformation in einem Schritt

In einer früheren Arbeit hat Verfasser nachgewiesen, daß sich das System der Deformationsgleichungen, wie es zur Bemessung eines statisch unbestimmten Tragwerks benötigt wird, durch eine lineare Transformation umformen läßt. Die richtigte Wahl der Transformationsmatrix vermag die Matrizeninversion wesentlich zu erleichtern.

Die ursprüngliche Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{o}$$

läßt sich auf die Form

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{*}\mathbf{y} + \mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{o}$$

transformieren, wobei $\mathbf{T}$ eine in geeigneter Weise gewählte Transformationsmatrix bezeichnet. Numeriert man die überzähligen Verknüpfungspunkte im Sinne der Abb. 1 (die Nummern der symmetrischen Verknüpfungspunkte folgen einander der Reihe nach), dann hat die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ für Trägerroste mit 2, 3, 4 und 5 Teilungen die Werte

$$\mathbf{T}_2 = 1$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_4 = \left[\begin{array}{c|cccc|c} \mathbf{T}_3 & \multicolumn{4}{c|}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -1 & \\ & 0 & 1 & -1 & 0 & \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & -1 & -1 & 1 & \\ \hline \mathbf{0}^* & \multicolumn{4}{c|}{\mathbf{0}^*} & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{T}_5 = \left[\begin{array}{c|cccccccc|c} \mathbf{T}_3 & \multicolumn{8}{c|}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \\ \mathbf{0} & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & \mathbf{0} \\ & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\ & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline \mathbf{0} & \multicolumn{8}{c|}{\mathbf{0}} & \mathbf{T}_3 \end{array}\right]$$

Die Matrix $\mathbf{T}_3$ teilt die ursprüngliche Aufgabe in vier, die Matrix $\mathbf{T}_4$ in fünf und die Matrix $\mathbf{T}_5$ schließlich in sechs orthogonale Gruppen auf. Mit wachsender Teilungszahl werden jedoch, wie man sieht, auch die Transformationsmatrizen immer komplizierter, so daß ihre Bestimmung um nichts leichter ist als die unmittelbare Lösung der ursprünglichen Matrizengleichung.

Es erweist sich demnach als nötig, ein Transformationsverfahren auszuarbeiten, mit dem das ursprünglich gestellte Ziel — die Bildung orthogonaler Gruppen — auf einfache Art gelöst werden kann. Die Handhabe hierzu bildet wieder eine lineare Transformation, die jedoch mit Wiederholung einer einfachen Transformationsmatrix, d. h. ohne Bildung der oben angegebenen allgemeinen Transformationsmatrizen durchgeführt wird.

2. Transformation durch Iteration in Schritten endlicher Zahl

Das Verfahren nutzt jene Eigenheit des Systems der Deformationsgleichungen symmetrischer Konstruktionen, daß sie stets aus symmetrischen Hypermatrizen-Koeffizienten aufgebaut werden können.

Im allgemeinen läßt sich der Koeffizient **A** der für eine symmetrische Konstruktion in der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

aufgestellten Gleichung als die Hypermatrix

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}] = \left[\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}_{ik}\right]$$

definieren.

Bei beliebiger Numerierung der Unbekannten müssen zur Befriedigung der obigen Bedingungen im allgemeinen auch die Zeilen und Spalten der Matrix **A** geordnet werden. Hat man eine ungerade Zahl von Unbekannten, wird man die Koeffizienten, die der einzigen ohne Paar gebliebenen Unbekannten zugeordnet sind, zweckmäßig in die letzte Zeile (bzw. in die letzte Spalte) der Matrix einsetzen.

Derartige Hypermatrizen vom Typ $\mathbf{A}_{ik}$ können stets in zwei voneinander unabhängige orthogonale Gruppen getrennt werden, sofern man die Transformationsmatrizen zu

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_{ik}]$$

mit

$$\mathbf{T}_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ wenn } i = k$$

und zu

$$\mathbf{T}_{ik} = 0, \text{ wenn } i \neq k$$

wählt.

Liegt eine ungerade Zahl von Unbekannten vor, hat man diese Matrix durch je eine weitere Zeile und Spalte zu ergänzen, die in der Diagonale den Wert 1, sonst aber überall den Wert Null hat. Nach der so definierten Transformation wird das System der Deformationsgleichungen über

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T}^*$$

Koeffizienten verfügen, wobei **B** eine ganz zerfallene Matrix ist. Nach Umordnen der zusammengehörigen Zeilen und Spalten können die so gewonnenen Matrizen $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_2$ neuerlich daraufhin geprüft werden, ob sie sich nicht durch Zeilen- und Spaltenaustausch zu Hypermatrizen der Form

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{ik}] = \left[\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}_{ik}\right]$$

umformen lassen. Bei quadratisch symmetrischen Konstruktionen ist dies für gewöhnlich möglich, so daß die Transformation mit der Matrix $\mathbf{T}_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ wiederholt durchgeführt werden kann.

Dieses Verfahren bietet also die Möglichkeit zur Bildung der gesuchten orthogonalen Gruppen. Bei den vier symmetrischen Gruppen höherer Ordnung ist die Trennung in jedem Fall möglich, wogegen die symmetrischen Gruppen 5 und 6, bei denen es sich um solche relativ niedrigerer Ordnung handelt, voneinander nicht immer getrennt werden können. Man wird also schon beim ersten Transformationschritt die Überlappung der Kräftegruppen 5 und 6 tunlichst verhindern müssen. Gelingt es, gelegentlich der ersten Trennung die Kräftegruppe 5 in der einen, die Kräftegruppe 6 dagegen in der anderen der beiden orthogonalen Gruppen unterzubringen, dann besteht kein Hindernis, auch die volle Trennung durchzuführen.

3. Zahlenbeispiel

Die Koeffizientenmatrix eines viergeteilten quadratischen Trägerrostes kann, sofern man die Numerierung der überzähligen Verknüpfungspunkte

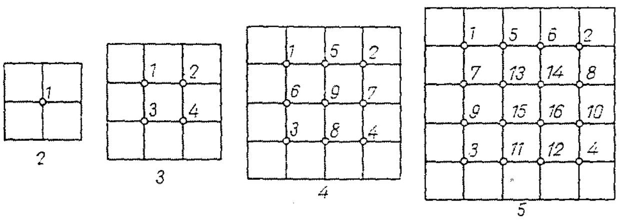

Abb. 1

gemäß Abb. 1 einhält, stets in der Form

$$
\left[\begin{array}{cccc:cccc:c}
a & b & b & c & h & h & i & i & j \\
b & c & a & b & h & i & h & i & j \\
b & c & a & b & i & h & i & h & j \\
c & b & b & a & i & i & h & h & j \\
\hdashline
h & h & i & i & d & e & e & f & k \\
h & i & h & i & e & d & f & e & k \\
i & h & i & h & e & f & d & e & k \\
i & i & h & h & f & e & e & d & k \\
\hdashline
j & j & j & j & k & k & k & k & g
\end{array}\right]
$$

geschrieben werden.

Multipliziert man von links mit der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_4$, von rechts mit der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_4^*$, erhält man als Resultat die erwarteten 5 unabhängigen orthogonalen Gruppen

$$
4\left[\begin{array}{cccc:ccccc}
a+2b+c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(h+i) & 0 & j \\
0 & a-c & 0 & 0 & h-i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a-c & 0 & 0 & h-i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a+2b+c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & h-i & 0 & 0 & \frac{1}{2}(d-f) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & h-i & 0 & 0 & \frac{1}{2}(d-f) & 0 & 0 & 0 \\
2(h+i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (d+2e+f) & 0 & k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (d-2e+f) & 0 \\
\hdashline
j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 & \frac{1}{4}g
\end{array}\right]
$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man wiederholt die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{ik}$ benützt, doch wird man hierzu die 5., 6. und 7. Zeile und Spalte der ursprünglichen Matrix zweckmäßig wie folgt vertauschen:

$$
\left[\begin{array}{cccc:cccc:c}
a & b & b & c & h & i & h & i & j \\
b & a & c & b & i & h & h & i & j \\
b & c & a & b & h & i & i & h & j \\
c & b & b & a & i & h & i & h & j \\
\hdashline
h & i & h & i & d & f & e & e & k \\
i & h & i & h & f & d & e & e & k \\
h & h & i & i & e & e & d & f & k \\
i & i & h & h & e & e & f & d & k \\
\hdashline
j & j & j & j & k & k & k & k & g
\end{array}\right]
$$

Bei Multiplikation mit den Matrizen $\mathbf{T}_{ik}$ bzw. $\mathbf{T}^*_{ik}$ von links bzw. von rechts fällt die Koeffizientenmatrix wie folgt entzwei:

$$
2\left[\begin{array}{cccc:cc}
(a+b) & (b+c) & (h+i) & (h+i) & (i-h) & j \\
(b+c) & (a+b) & (h+i) & (h+i) & -(i-h) & j \\
(h+i) & (h+i) & (d+f) & 2e & 0 & k \\
(h+i) & (h+i) & 2e & (d+f) & 0 & k \\
\hdashline
(i-h) & -(i-h) & 0 & 0 & (d-f) & 0 \\
j & j & k & k & 0 & g
\end{array}\right]
$$

und

$$
2\begin{bmatrix}
(a-b) & (b-c) & -(i-h) \\
(b-c) & (a-b) & -(i-h) \\
-(i-h) & -(i-h) & (d-f)
\end{bmatrix}
$$

Beide Matrizen können mit der Matrix $\mathbf{T}_{ik}$ bzw. mit deren Transponierter sowohl von rechts als auch von links wiederholt multipliziert werden. Die Transformationsmatrizen müssen hierbei in der rechten unteren Ecke ergänzt werden, sie nehmen also die Form

$$\mathbf{T}_{ik} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{bzw.}\ \mathbf{T}_{ik} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

an. Die Durchführung der Rechenoperationen liefert natürlich dieselben unabhängigen Gruppen, wie man sie bei Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{T}_1$ erhalten würde.

Zusammenfassung

Die quadratischen Symmetrieverhältnisse erleichtern die Ermittlung der inneren Kräfte sehr wesentlich. Da man aber den geometrischen Überlegungen vielfach schwer zu folgen vermag, läßt sich eine aus einer Stufe bestehende sowie eine (Iterations-) Transformation, bestehend aus einer endlichen Zahl von Schritten, ausarbeiten, die die durch die quadratische Symmetrie gebotenen Vorteile automatisch in Betracht zieht.

Literatur

MICHELBERGER, P.: Einige Fragen allgemein belasteter quadratisch symmetrischer Trägerroste. Periodica Polytechnica **11**, 223 (1967).

Dr. Pál MICHELBERGER, Budapest XI., Műegyetem rpt. 3/9. Ungarn