

BERECHNUNG DÜNNWANDIGER ELASTISCHER, IM QUERSCHNITT VERÄNDERLICHER TRÄGER AUF VERDREHUNG MIT HILFE ELEKTRONISCHER ANALOGRECHNER

Von

I. DEUTSCH

Lehrstuhl für Mechanik und Festigkeitslehre, Polytechnisches Institut, Braşov (Rumänien)

und

GY. LUDVIG

Lehrstuhl für Technische Mechanik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 13. Januar 1966)

Vorgelegt von Prof. Ing. I. COSEREANU und Prof. Dr. Gy. KOZMANN

Im modernen Maschinenbau finden dünnwandige Träger zunehmende Verwendung. Setzt man einen konstanten Trägerquerschnitt voraus, bereitet die Berechnung auf Verdrehung keinerlei Schwierigkeiten. Bei veränderlichem Querschnitt längs des Trägers ist die Integration der Differentialgleichung der Drillung wesentlich schwerer. Derartige Probleme treten zum Beispiel im Fahrzeugbau (beim Rahmen der Kraftwagen [5]) auf, wo dünnwandige elastische Träger häufig Anwendung finden, da sie bei geringem Materialaufwand eine genügend große Festigkeit und Elastizität sichern.

Für Näherungsberechnungen werden die für dünnwandige elastische Träger mit konstantem Querschnitt üblichen Beziehungen verwendet, wobei für den Querschnitt ein Mittelwert eingesetzt wird. Rechengvorgänge dieser

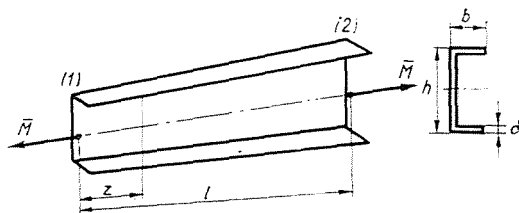


Abb. 1

Art führen besonders hinsichtlich der in der Trägern auftretenden Spannungen zu Fehlergebnissen. Wahrheitsgetreue Ergebnisse können nur dann erzielt werden, wenn die Differentialgleichung des Trägers auf einen veränderlichen Querschnitt übertragen wird. Gleichzeitig lassen sich dann auch die Fehlergebnisse der Näherungsberechnungen bestimmen.

Die Verdrehungsdifferentialgleichung der geraden dünnwandigen Träger mit kontinuierlich-veränderlichem Querschnitt (Abb. 1) wurde von N. F. Bot-scharow abgeleitet [2]:

$$\frac{d^3 \varphi}{dz^3} + \frac{1}{I_\omega} \frac{dI_\omega}{dz} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{GI_T}{EI_\omega} \frac{d\varphi}{dz} + \frac{M}{EI_\omega} = 0. \quad (1)$$

Hierin bedeutet:

- z die Abszisse eines beliebigen Querschnittes;
- φ den Verdrehungswinkel des Querschnittes;
- I_ω den Wölbwiderstand;
- I_T das Drillträgheitsmoment;
- E und G den Elastizitäts- bzw. den Gleitmodul;
- M das Verdrehmoment.

Die Lösung $\varphi(z)$ der Differentialgleichung (1) hängt vom Verfestigungs-grad der Enden des Trägers ab, der den Wert der Integrationskonstanten bestimmt. Ist der Ausdruck des Verdrehungswinkels $\varphi(z)$ bekannt, dann hat man die Möglichkeit, seine Ableitung zweiten Grades sowie das Bimoment für jeden beliebigen Querschnitt zu berechnen:

$$B = -EI_\omega \varphi''. \quad (2)$$

Der Querschnittveränderung wegen ist selbst die freie Verdrehung eingeengt, da auch die Verwölbung entlang des Trägers veränderlich ist. Die Wölbnormalspannung wird in Abhängigkeit vom Bimoment aus der Beziehung

$$\sigma_\omega = \frac{B\omega}{I_\omega} = -E\varphi'' \omega \quad (3)$$

bestimmt, wobei ω die Wölbgrundkoordinate darstellt.

Bei konstantem Querschnitt längs des Trägers ist das zweite Glied der Differentialgleichung (1) gleich Null, während die Gleichung konstante Koeffizienten hat. (Dieser Fall wurde in den Arbeiten W. Z. Wlassows [1] behandelt.) Im allgemeinen Fall des veränderlichen Querschnittes hängen die Koeffizienten der Differentialgleichung dritten Ranges von der Abszisse z ab. Infolgedessen führt die Integration nicht zu einer allgemein ausführbaren Lösung. Für bestimmte Fälle wird als Näherungslösung folgende Reihe [2] empfohlen:

$$\varphi = a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 \dots + a_n z^n. \quad (4)$$

Die Werte der Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ werden auf Grund der Befestigung der Enden des Trägers unter Berücksichtigung der Differential-

gleichung bestimmt. Diese Berechnungsart ist schwierig und ungenau. Je größer die Zahl der Reihenglieder ist, um so genauer ist das Ergebnis der Berechnung. Die elektronischen Analogrechner ermöglichen eine rasche und genaue Lösung der Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. Im folgenden wird das qualitative Programmbild der Gleichung an Hand eines konkreten Beispiels gezeigt.

Multipliziert man die Differentialgleichung (1) mit I_ω , dann bedeuten die ersten Glieder der Gleichung die Ableitung eines Produktes nach z :

$$\frac{d}{dz} \left(I_\omega \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right) - \frac{G}{E} I_T \frac{d\varphi}{dz} + \frac{M}{E} = 0. \tag{5}$$

Das qualitative Programmbild der Differentialgleichung (5) ist in Abb. 2 wiedergegeben. Bei der Darstellung dieses Programms wurden die üblichen Programmiersymbole verwendet [4]. Die Integrationskonstanten sind im Programm nicht enthalten. Die Integrationskonstante der Veränderlichen »z« ist gleich Null, während die Größe der übrigen Integrationskonstanten vom Verfestigungsgrad der Trägerenden abhängt. Es werden folgende drei Fälle behandelt:

- a) Träger mit freien Enden.
- b) Träger mit eingespannten Enden.
- c) Träger mit links eingespanntem und rechts freiem Ende.

In diesen Fällen sind für die Trägerenden folgende Bedingungen gültig:

$$\left. \begin{array}{l} a). \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi''(0) = 0; \quad \varphi''(l) = 0; \\ b). \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi'(0) = 0; \quad \varphi'(l) = 0; \\ c). \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi'(0) = 0; \quad \varphi''(l) = 0; \end{array} \right\} \tag{6}$$

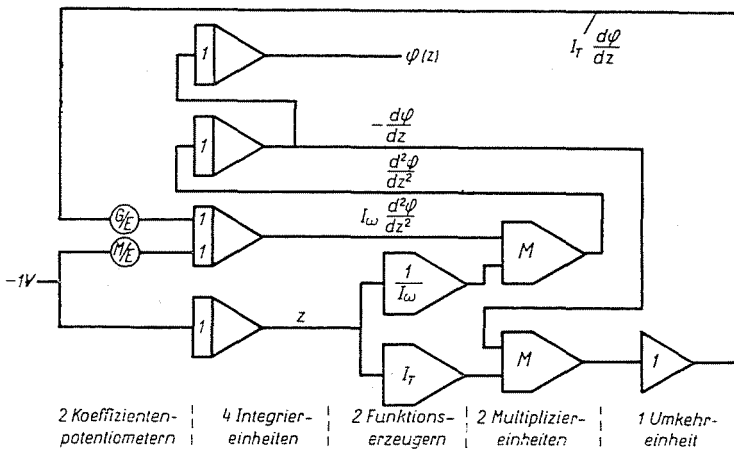


Abb. 2

Am linken Ende des Trägers ($z = 0$) sind stets nur zwei Anfangsbedingungen bekannt. Die dritte wird durch Probieren aus der Erfüllung der Bedingung am rechten Trägerende ($z = l$) ermittelt. Wenn der elektronische Analogrechner wiederholend arbeitet, kann eine genügend genaue Regelung der unbekanntenen Integrationskonstante innerhalb einiger Minuten erzielt werden. Nach Festlegung der Integrationskonstanten ermöglicht der Analogrechner die Darstellung der Funktionen φ , φ' und φ'' mit Hilfe eines Registrierapparates.

Der elektronische Analogrechner kann nur zur Lösung bestimmter Fälle verwendet werden. Als Anwendung soll hier die Verdrehung eines U-Profiles mit linearer Änderung der Querschnittshöhe behandelt werden. Das Profil wurde aus $\delta = 6$ mm dickem Blech hergestellt (Abb. 1). Die Größe des Verdrehmoments war $M = 50$ mkp, die Elastizitätskonstanten des Trägermaterials waren $E = 2 \cdot 10^6$ kp/cm² und $E/G = 2,6$. Die Abmessungen des Trägers waren:

$$l = 80 \text{ cm}; \quad h_1 = 16 \text{ cm}; \quad h_2 = 24 \text{ cm}; \quad b = 8 \text{ cm}.$$

Die Höhe jedes beliebigen Querschnittes kann aus folgendem Ausdruck berechnet werden:

$$h = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{l} z = 16 + \frac{z}{10} \quad [\text{cm}]. \quad (7)$$

Somit sind die geometrischen Kennziffern des Querschnittes:

$$I_o = \frac{\delta h^3 b^3}{12} \frac{2h + 3b}{h + 6b} = 51,2 \frac{\left(16 + \frac{z}{10}\right)^2 \left(28 + \frac{z}{10}\right)}{64 + \frac{z}{10}} \quad [\text{cm}^6]; \quad (8)$$

$$I_T = 0,37 \delta^3 (h + 2b) = 2,55 + \frac{8z}{1000} \quad [\text{cm}^4]. \quad (9)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (5) und nach Vereinfachung erhält man:

$$\frac{d}{dz} \left[51,2 \frac{\left(16 + \frac{z}{10}\right)^2 \left(28 + \frac{z}{10}\right)}{64 + \frac{z}{10}} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right] - \left(0,98 + \frac{3,08 z}{1000} \right) \frac{d\varphi}{dz} + \frac{2,5}{1000} = 0. \quad (10)$$

Die auf dem elektronischen Analogrechner programmierte Differentialgleichung wurde mit folgenden Maßstäben bestimmt:

$$M_\varphi = 500 \text{ V/rad}; \quad M_z = 1 \text{ V/cm}; \quad M_T = 0,25 \text{ sek/cm}.$$

Bezeichnet man mit Z und T die Maschinenvariablen des Analogrechners, so gelten folgende Beziehungen

$$\Phi = M_\varphi \varphi; \quad Z = M_z z; \quad T = M_T z. \quad (11)$$

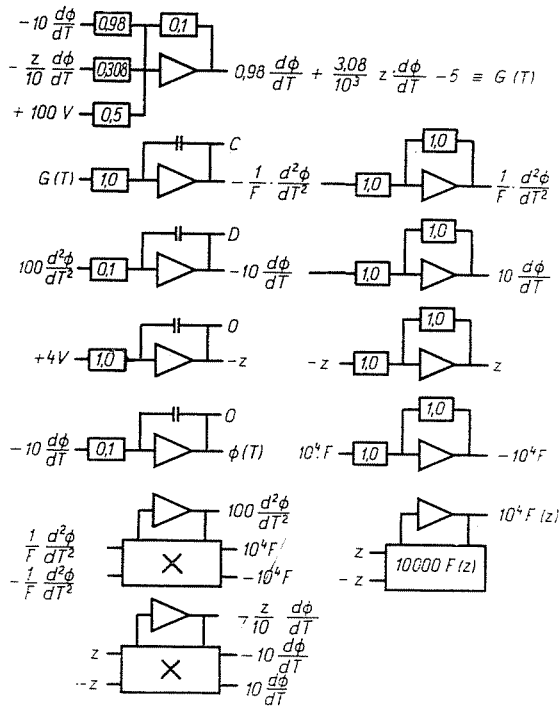


Abb. 3

Die Maschinenzeit T mußte eingeführt werden, weil der elektronische Analogrechner in Abhängigkeit von ihr integriert.

Für

$$F(Z) = \frac{16 \left(64 + \frac{Z}{10} \right)}{51,2 \left(16 + \frac{Z}{10} \right)^2 \left(28 + \frac{Z}{10} \right)} \quad (12)$$

hat die Maschinengleichung die Form

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{1}{F(Z)} \frac{d^2 \Phi}{dT^2} \right] = \left(0,98 + \frac{3,08}{1000} Z \right) \frac{d\Phi}{dT} - 5. \quad (13)$$

Das quantitative Programmbild der Maschinengleichung (13) ist in Abb. 3 dargestellt. Bei seiner Zusammenstellung und Darstellung wurde berücksichtigt, daß die Gleichung auf einem Analogrechner MN—7 programmiert wurde, was sich auch in der Darstellungsweise widerspiegelt. Im Programm wurde die rechte Seite der Gleichung (13) mit $G(T)$ bezeichnet.

Die Variablen werden in die Multipliziereinheiten und Funktionserzeuger des elektronischen Analogrechners MN—7 mit dem Zeichen \pm eingegeben.

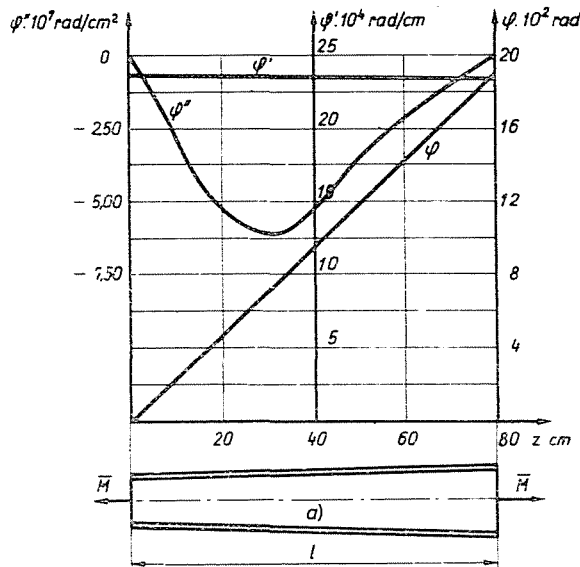


Abb. 4

Folglich enthält das quantitative Programmbild in Abb. 3 mehr Umkehrheiten, als das qualitative Programmbild in Abb. 2.

Die Größen wurden mit verschiedenen Potenzen der Zahl 10 multipliziert, um einerseits genügend hohe Registrierspannungen zu erhalten, andererseits mußte berücksichtigt werden, daß die Multipliziereinheiten nur den hundertsten Teil des Produktes der multiplizierten Werte geben.

Im gegebenen Beispiel, in dem I_T eine lineare Funktion von z ist, konnte der zweite Funktionserzeuger aus dem qualitativen Programm vernachlässigt werden.

Die Integrationskonstanten C und D müssen so gewählt, d. h. geregelt werden, daß die gegebenen Bedingungen a , b und c nacheinander erfüllt werden.

Zur Programmierung wurde der elektronische Analogrechner MN-7 des Lehrstuhls für Technische Mechanik der Technischen Universität Budapest verwendet.

Zur Registrierung der Ergebnisse diente ein X-Y-Schreiber. Das Ziehen einer Kurve erforderte 20 Sekunden.

Die für die drei behandelten Fälle erhaltenen Diagramme wurden unter Berücksichtigung der verwendeten Maßstäbe von neuem aufgetragen.

Die auf diese Weise ermittelten Diagramme sind aus den Abb. 4, 5 und 6 ersichtlich.

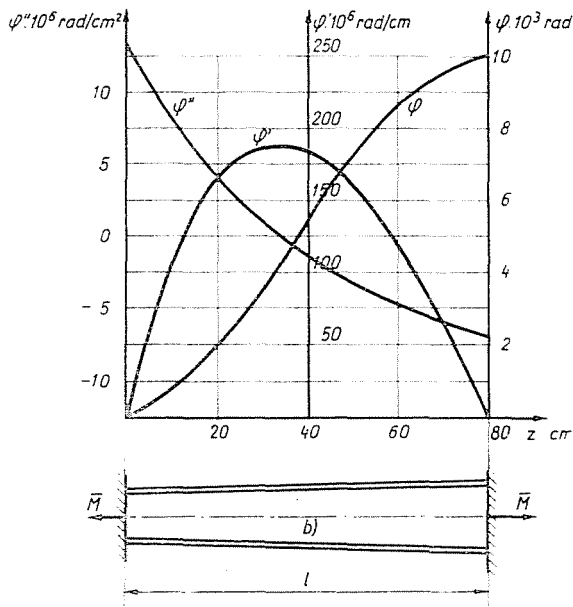


Abb. 5

Aus den Ergebnissen können folgenden Schlußfolgerungen gezogen werden:

1. Auch am Träger mit freien Enden (Fall a) treten durch Verdrehung Bimomente auf. Ihr Höchstwert $B_{\max} \cong 1,05 \text{ m}^2\text{kp}$, liegt nahe an der Mitte des Trägers ($z \cong 30 \text{ cm}$). Ihm entspricht die aus Gleichung (3) berechnete Wölbnormalspannung $\sigma_w \cong 60 \text{ kp/cm}^2$. Diese Werte lassen sich durch Näherungsberechnungen unter Zugrundelegung des mittleren Querschnittes nicht bestimmen. Daraus folgt der eingeeengte Charakter der Verdrehung, der der kontinuierlichen Veränderung des Querschnittes zuzuschreiben ist. Aus Abb. 4 ist die Gesamtverdrehung $\varphi(l) \cong 18,6 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$. ersichtlich. Dieser Wert

weicht nicht viel von $\varphi(l) = 18 \cdot 10^{-2}$ rad. ab, den die Berechnung auf Grund des mittleren Querschnittes ergab.

2. Beim Träger mit eingespannten Enden (Abb. 5) tritt am linken Ende ($z = 0$) ein Bimoment $B \cong 15,5 \text{ m}^2\text{kp}$ auf, das um etwa 18% kleiner ist als das auf Grund des mittleren Querschnittes berechnete $B = 18,8 \text{ m}^2\text{kp}$. Am rechten Ende ist das Bimoment mit $B \cong 19,5 \text{ m}^2\text{kp}$ nur um etwa 4% größer ist als das mit Hilfe des mittleren Querschnittes berechnete. Der mit dem elektronischen Analogrechner erzielte Verdrehungswinkel $\varphi(l) \cong 9,95 \cdot 10^{-3}$ rad. weicht nur um 5% vom Ergebnis der Näherungsberechnungen ab.

3. Bei dem an einem Ende eingespannten Träger (Fall c) tritt das Höchstbimoment $B_{\max} \cong 30 \text{ m}^2\text{kp}$ am eingespannten Ende auf. Sein Wert liegt um 8% unter dem durch die Näherungsberechnungen ermittelten $B = 32,5 \text{ m}^2\text{kp}$.

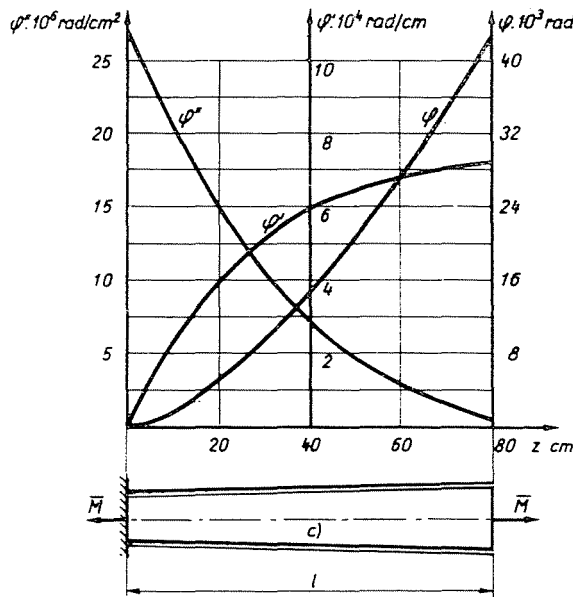


Abb. 6

Hingegen liegt die Gesamtverdrehung $\varphi(l) \cong 4,14 \cdot 10^{-2}$ rad. um 21% höher als die auf Grund der Näherungsberechnung bestimmte ($3,43 \cdot 10^{-2}$ rad.).

4. Ein Vergleich der Ergebnisse der beschriebenen Fälle führt zu der Feststellung, daß die Höchstwerte der Wölbnormalspannungen bei dem an einem Ende eingespannten Träger (Fall c), die Höchstwerte der Gesamtverdrehung $\varphi(l)$ dagegen an dem an beiden Enden freien Träger auftreten.

5. Die ermittelten Werte entsprechen einem Träger, dessen Querschnitt sich langsam ändert. Zwischen den mit dem elektronischen Analogrechner ermittelten Ergebnissen und den durch Näherungsberechnungen bestimmten

Werten bestehen Abweichungen. Die auf die Größe der Spannungen bezüglichen Unterschiede dürfen bei den Berechnungen der Trägerfestigkeit nicht vernachlässigt werden, insbesondere wenn der Träger auch auf Biegung beansprucht wird. Die Abweichungen sind bedeutend größer, wenn sich der Querschnitt längs des Trägers in stärkerem Maße ändert.

Es kann daher behauptet werden, daß der elektronische Analogrechner bei der raschen und genauen Berechnung der auf Verdrehung beanspruchten dünnwandigen elastischen Träger mit kontinuierlicher Veränderung des Querschnittes von ganz besonderem Nutzen ist.

Zusammenfassung

Bei veränderlichem Querschnitt längs des Trägers verursacht die Integration der Differentialgleichung der Drillung nicht unbedeutende Schwierigkeiten. Die elektronischen Analogrechner ermöglichen eine rasche und genaue Lösung der Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. Als Anwendung wird die Verdrehung eines U-Profiles mit linearer Änderung der Querschnittshöhe behandelt, u. zw. für folgende Fälle:

- a) Träger mit freien Enden;
- b) Träger mit eingespannten Enden;
- c) Träger mit links eingespanntem und rechts freiem Ende.

Schrifttum

1. Власов, В. З.: Тонкостенные упругие стержни, Физматгиз, Изд. II, Москва — 1959.
2. Богаров, Н. Ф.: К вопросу о кручении тонкостенных упругих стержней непрерывно-меняющегося сечения. Известия высших учебных заведений-машиностроение, нр. 3/1959, Изд. МВТУ им. Баумана.
3. Ржаницын, А. Р.: Расчёт тонкостенных упругих стержней ступенчато-переменного сечения, сб. «Исследования по теории сооружений», 1951.
4. SYDOW, A.: Programmierungstechnik für elektronische Analogrechner. Berlin, 1964, Verlag Technik.
5. HANKE, M.: Festigkeitsprobleme der Kraftfahrzeugrahmen. Kraftfahrzeugtechnik, Berlin, Nr. 1/1961.

Conf. Ing. I. DEUTSCH, Braşov, Str. Decebal 84, Rumänien.

Dozent Győző LUDVIG Budapest, XI. Műegyetem rkp. 3. Ungarn.