

METHODE ZUR BESTIMMUNG DER IN GEKRÜMMTEN STÄBEN AUFTRETENDEN RADIAL- UND SCHUBSPANNUNGEN

Von

M. SZÜCS und L. PÁRTOS

Lehrstuhl für Technische Mechanik, Technische Universität, Budapest
Eingegangen am 2. Februar, 1965

Vorgelegt von Prof. Dr. GY. KOZMANN

Bezeichnungen

A	Querschnittfläche
A_1	Fläche des Querschnittsteiles über $y = \eta$
A'	Fläche des reduzierten Querschnittsteiles über $y = \eta$
b	Polabstand
e_1	Äußerer Randfaserabstand
$-e_2$	Innerer Randfaserabstand
f_1, f_2, \dots	die mit den reduzierten Querschnittsteilen verhältnismäßigen Vektoren
F_1, F_2	aktive Kräfte
I	Trägheitsmoment des Querschnittes auf die Achse z
I_0	reduziertes Trägheitsmoment
K_1, K_2	Grenzquerschnitte des dem Zentriwinkel $d\varphi$ zugeordneten Stabelementes
M	Biegemoment
M_s	das statische Moment des Querschnittsteiles über $y = \eta$ auf die Achse z
M'_s	das statische Moment des reduzierten Querschnittsteiles über $y = \eta$ auf die Achse z
M'_{s0}	der an der Stelle $y = -e_2$ angenommene Wert von M'_s
N	Normalkraft
$p_{\sigma r} = \sigma_r(2z)$	verteilte Belastung
$p_{\tau} = \tau(2z)$	verteilte Belastung
$r = R + y_c$	
R	Krümmungshalbmesser der Schwerpunktlinie des gekrümmten Stabes
S	Schwerpunkt des Querschnittes
V	Schubkraft
$x = \frac{I_0}{AR^2}$	Kennzahl des reduzierten Trägheitsmomentes
y	Abstand einer beliebigen Querschnittsstelle von der Schwerpunktschicht z (auswärts positiv)
y_c	Ordinate der Stelle der plötzlichen Veränderung von (z) bezeichnet
z	die auf die Symmetrieebene des Querschnittes senkrechte Schwerpunktschicht
(z)	Halbbreite des symmetrischen Querschnittes
$z' = \frac{dz}{dy}$	
α	der Winkel der y -Achse mit der an den Querschnittumfang gelegten Tangente
η	Ordinate der geprüften Schicht
σ_0	die in der Schwerpunktschicht des Querschnittes auftretende Tangentialspannung
σ_r	Radialspannung (im allgemeinen)
$\sigma_{r\eta}$	die an der Stelle $(R + \eta)$ auftretende Radialspannung
σ'_r, σ''_r	Radialteilspannungen
σ_t	Tangentialspannung auf Grund der Grashof'schen Formel berechnet
$\sigma_{K_1}, \sigma_{K_2}$	die in den Querschnitten K_1 und K_2 auftretende Tangentialspannung σ_t
τ	Schubspannung (im allgemeinen)
τ_η	die an der Stelle $(R + \eta)$ auftretende Schubspannung

τ_1, τ_2	die in den Querschnitten K_1 und K_2 auftretende Schubspannung
$\tau' = \frac{d\tau}{dy}$	
τ_Q	Schubspannung im Umfangspunkt des Querschnittes
φ	der Winkel des untersuchten Querschnittes mit der Vertikalen
$d\varphi$	der dem untersuchten Stabelement zugeordnete Zentriwinkel

Bei Berechnungen gekrümmter Stäbe ist die Anwendung der sogenannten Grashof'schen Formel gebräuchlich, die die im gekrümmten Stab entstehende Radial- und Schubspannung völlig außer acht läßt. Diese Vernachlässigung ist in der Regel ohne Bedeutung, doch gibt es Fälle, in denen auch sie bekannt sein müssen. Ein solches Problem taucht z. B. bei der Berechnung der

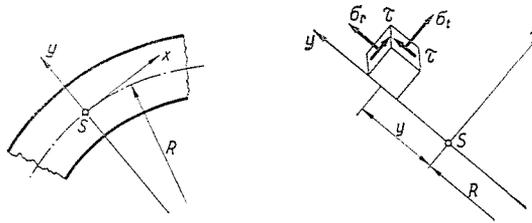


Abb. 1

Schweißnähte, bzw. allgemein der Verbindung von Stäben mit gekrümmter Mittellinie auf, die durch Schweißen oder Kleben aus Teilen hergestellt werden.

An den Seiten eines kleinen Würfels, der an einer beliebigen Stelle aus dem Stab herausgeschnitten wird, treten die Spannungen σ_t , σ_r und τ auf (Abb. 1); die Untersuchung bleibt hierbei auf Stäbe mit konstantem, zur Ebene xy symmetrischem Querschnitt beschränkt, deren Schwerpunktlinie (Mittellinie) eine ebene Kurve beschreibt. Zur Untersuchung wird ein Koordinatensystem gewählt, dessen Ordinatenachse aus dem Schwerpunkt S des Querschnittes radial nach auswärts zeigt, während seine Abszissenachse die gekrümmte Mittellinie tangential berührt. Es wird angenommen, daß sich Form und Dimension des Querschnittes infolge der Belastung nicht verändern. Hinsichtlich jener Querschnitte, die stark herausstehende Gürtel besitzen, bei denen also die nach z gerichteten Vernachlässigungen keineswegs zugelassen sind, verweisen wir auf die Dissertation von STEINHARDT [1].

Genaue Untersuchungen nach der Elastizitätslehre sind nur bei rechteckigen Stabquerschnitten möglich, mit den in der Festigkeitslehre üblichen Annahmen hingegen können die obenerwähnten Spannungen rechnerisch ermittelt werden.

In der Festigkeitslehre pflegt man die Untersuchung ebengekrümmter Stäbe auf ähnliche Weise durchzuführen, wie die an geraden Stäben. Die vom Biegemoment und von der Normalkraft herrührenden Spannungen werden auf Grund der Grashofschen Formel berechnet, die von der Annahme des Ebenbleibens des Querschnittes ausgeht. Die durch die Schubkräfte ausgelösten Spannungen bleiben zumeist unberücksichtigt, werden sie aber dennoch erfaßt, bedient man sich üblicherweise der für gerade Stäbe gültigen Formel. Die Grashofsche Formel gibt über die von der Krümmung des Stabes herrührenden Radialspannungen keine Auskunft. Mit diesen befaßte sich schon PFLEIDERER [2], die Ergebnisse seiner Berechnungen haben jedoch keine Verbreitung gefunden, wahrscheinlich weil seine Formeln weit komplizierter sind als die

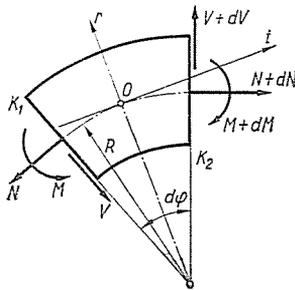


Abb. 2

Grashofsche Formel und die von der Elastizitätslehre gebotene Genauigkeit noch immer nicht erreichen. Mit der Frage der Abmessungsveränderungen haben sich viele Autoren befaßt; hierher gehört die Literatur über die dünnwandigen Rohre und über die Untersuchung verhältnismäßig dünner Querschnitte mit herausstehenden Gürteln [1, 3, 4, 5]. Auch bei kompakten Querschnitten zeigt sich dieselbe Wirkung; BERGS Artikel [6] bietet in dieser Hinsicht eine gute Anleitung.

Die vorliegende Abhandlung bezweckt eine insofern exaktere Bestimmung der Spannungsverhältnisse in gekrümmten Stäben, als sie für die Ermittlung der aus dem Schub entstehenden Spannungen unter Verwendung der Grashofschen Formel einen Zusammenhang ableitet und auf dieser Grundlage auch die einfache Berechnung der Radialspannungen ermöglicht. Die Untersuchung wird auf die für gerade Stäbe übliche Weise durchgeführt. Somit bedient sich auch diese Berechnung jener Methode der Festigkeitslehre, nach der die Verteilung der σ -Spannungen längs des Querschnittes aus der Annahme des Ebenbleibens des Querschnittes abgeleitet wird; auf Grund der so erhaltenen Spannungsverteilung werden dann die τ -Spannungen berechnet, unter deren Einwirkung allerdings der Querschnitt im geometrischen Sinne nicht mehr eben bleibt.

Der Querschnitt K_1 des ebengekrümmten Stabes wird durch das in die Symmetrieebene des Stabes fallende Biegemoment M , die Zugkraft N und die Schubkraft V belastet, während im Querschnitt K_2 die Beanspruchungen $M + dM$, $N + dN$ und $V + dV$ vorhanden sind (Abb. 2). Zwischen den Querschnitten K_1 und K_2 ist der gekrümmte Stab unbelastet. Um die Gleichgewichtsgleichungen aufschreiben zu können, wird der Nullpunkt des Koordinatensystems in den Schnittpunkt der Wirkungslinien der Kräfte N und $N + dN$ verlegt. Die Gleichgewichtsgleichung in Radialrichtung lautet:

$$(V + dV) \cos \frac{d\varphi}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\varphi}{2} - V \cos \frac{d\varphi}{2} - N \sin \frac{d\varphi}{2} = 0, \quad (1)$$

die Gleichgewichtsgleichung in Tangentialrichtung hingegen

$$(V + dV) \sin \frac{d\varphi}{2} + (N + dN) \cos \frac{d\varphi}{2} - V \sin \frac{d\varphi}{2} - N \cos \frac{d\varphi}{2} = 0, \quad (2)$$

und die Moment-Gleichgewichtsgleichung für den Punkt 0 schließlich

$$(V + dV)R \sin \frac{d\varphi}{2} - (M + dM) + VR \sin \frac{d\varphi}{2} + M = 0. \quad (3)$$

Da $d\varphi$ klein ist und somit

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}, \quad \text{ferner} \quad \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1,$$

vereinfachen sich die Gleichungen wesentlich, so daß (1) die Form

$$dV - N \frac{d\varphi}{2} - dN \frac{d\varphi}{2} - N \frac{d\varphi}{2} = 0$$

annimmt. Neben den anderen kann das Glied $dN \frac{d\varphi}{2}$ vernachlässigt werden, es wird mithin

$$dV - Nd\varphi = 0,$$

das heißt

$$N = \frac{dV}{d\varphi}. \quad (4)$$

Ferner wird aus (2)

$$V \frac{d\varphi}{2} + dV \frac{d\varphi}{2} + dN + V \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Hier kann das Glied $dV \frac{d\varphi}{2}$ neben den anderen vernachlässigt werden, es gilt also

$$dN + V d\varphi = 0 ,$$

das heißt

$$V = - \frac{dN}{d\varphi} . \quad (5)$$

Und schließlich geht (3) in die

$$VR \frac{d\varphi}{2} + dVR \frac{d\varphi}{2} - dM + VR \frac{d\varphi}{2} = 0$$

über. Hier kann wieder das Glied $dVR \frac{d\varphi}{2}$ vernachlässigt werden, man hat also

$$VR d\varphi - dM = 0 ,$$

das heißt

$$V = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} = \frac{dM}{ds} . \quad (6)$$

Aus der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte folgt, daß die Spannung unter dem Einfluß des Biegemoments M und der Normalkraft N — nach der Grashofschen Formel — in der von der Schwerpunktsachse z gemessenen Entfernung y vorzeichengerecht im Querschnitt K_1

$$\sigma_{K_1} = \frac{N}{A} + \frac{M}{RA} + \frac{MR}{I_0} \frac{y}{R+y} = \sigma_{01} + \frac{M}{I_0} y \frac{R}{R+y} , \quad (7)$$

und im Querschnitt K_2

$$\sigma_{K_2} = \frac{N + dN}{A} + \frac{M + dM}{RA} + \frac{M + dM}{I_0} y \frac{R}{R+y} .$$

$$\sigma_{K_2} = \sigma_{K_1} + \frac{dN}{A} + \frac{dM}{RA} + \frac{dM}{I_0} y \frac{R}{R+y} = \sigma_{K_1} + d\sigma_t \quad (8)$$

beträgt.

Das in Abb. 2 dargestellte Stabelement mit dem Zylindermantel vom Halbmesser $R + \eta$ wird in zwei Teile geteilt. Das Gleichgewicht in dem in

Abb. 3 dargestellten äußeren Teil wird durch die im Mantelteil ($2z$) ($R + \eta$) $d\varphi$ entstehenden tangentialen Spannungen τ_η und die radialen Spannungen $\sigma_{r\eta}$ sowie durch die in den Querschnittsteilen entstehenden Spannungen σ_{K_1} , τ_1 und σ_{K_2} , τ_2 gesichert. Die Verteilung der Spannungen τ_η und $\sigma_{r\eta}$ am Mantel entlang wird als gleichmäßig betrachtet.

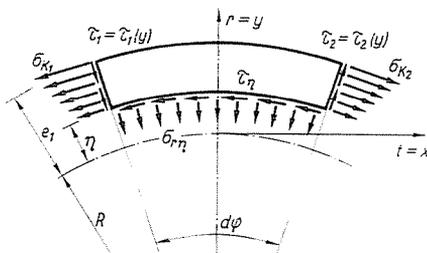


Abb. 3

Es sei angenommen, daß τ_η in dem aufgetragenen Sinne wirkt. Dann schreibt sich die Gleichgewichtsgleichung zunächst in der Richtung der t Achse zu

$$\begin{aligned} \cos \frac{d\varphi}{2} \int_{\eta}^{e_1} \sigma_{K_2} dA + \sin \frac{d\varphi}{2} \int_{\eta}^{e_1} \tau_2(y) dA - \cos \frac{d\varphi}{2} \int_{\eta}^{e_1} \sigma_{K_1} dA + \\ + \sin \frac{d\varphi}{2} \int_{\eta}^{e_1} \tau_1(y) dA - \tau_\eta(2z)(R + \eta) d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

In dieser Richtung ist der Resultierende der aus den Spannungen $\sigma_{r\eta}$ entstehenden inneren Kräfte aus Symmetriegründen gleich Null, weshalb sie auch nicht aufgetragen wurde. Annahmegemäß werden die an den gleichen y -Stellen an einem ($2z$) breiten, ($2z$) $dy = dA$ großen Flächenelement entstehenden Spannungen als konstant betrachtet, weshalb das einfache Integral statt des für den allgemeinen Fall von dA nötigen Doppelintegrals genügt; der Ausdruck $dA = (2z) dy$ liefert die Begründung dafür, daß sich die Integrationsgrenzen auf y beziehen.

Mit den wegen der kleinen Winkelgrößen möglichen Vereinfachungen und in Anbetracht dessen, daß zwischen den den gleichen y -Stellen der Querschnitte K_1 und K_2 zugehörigen Spannungen τ_2 und $\tau_1 = \tau$ nur eine Differenz von $d\tau$ bestehen kann, ergibt sich — nach Kürzung — die Gleichung

$$\int_{\eta}^{e_1} (\sigma_{K_2} - \sigma_{K_1}) dA + \frac{d\varphi}{2} \left[\int_{\eta}^{e_1} 2\tau(y) dA + \int_{\eta}^{e_1} d\tau dA \right] = \tau_\eta(2z)(R + \eta) d\varphi. \quad (10)$$

Neben $2 \tau dA$ ist $d\tau dA$ vernachlässigbar, und ferner gilt

$$\sigma_{K_2} - \sigma_{K_1} = d\sigma_t = \frac{dN}{A} + \frac{dM}{RA} + \frac{dM}{I_0} y \frac{R}{R+y}.$$

Da $d\sigma_t$ auf Grund der Gleichungen (5) und (6) durch die Schubkraft ausgedrückt werden kann, hat man

$$d\sigma_t = -\frac{Vd\varphi}{A} + \frac{VRd\varphi}{RA} + \frac{VRd\varphi}{I_0} y \frac{R}{R+y} = \frac{VRd\varphi}{I_0} y \frac{R}{R+y},$$

womit die Gleichung (10) die Form

$$\frac{VR}{I_0} d\varphi \int_{\eta}^{e_1} \frac{R}{R+y} y dA + d\varphi \int_{\eta}^{e_1} \tau dA = \tau_{\eta}(2z)(R+\eta) d\varphi \quad (11)$$

annimmt. Aus Gleichung (11) erhält man — nach Division mit $d\varphi$ — die Integralgleichung für die Spannungen τ :

$$\frac{VR}{I_0} \int_{\eta}^{e_1} \frac{R}{R+y} y dA + \int_{\eta}^{e_1} \tau dA = \tau_{\eta}(2z)(R+\eta). \quad (12)$$

Dafür, daß der Ausdruck

$$\tau_{\eta} = \frac{VM_s}{I_0(2z)} \left(\frac{R}{R+\eta} \right)^2 \quad (13)$$

— wobei $M_s = \int_{\eta}^{e_1} y dA$ —, die Lösung der Integralgleichung darstellt, liefern folgende Überlegungen den Beweis:

a) An den Stellen $y = +e_1$ bzw. $y = -e_2$ (diese letztere ist keine notwendige Bedingung mehr) ergibt die Substitution in die Gleichung (13) ebenso Null für die Spannung in den Randschichten, wie die Gleichung (12). An der Stelle $y = \eta = +e_1$ ergeben sich nämlich Integrale mit derselben oberen und unteren Grenze, wobei $(2z) \neq \infty$. In der inneren Randschicht erhält man mit $y = \eta = -e_2$ wegen

$$R^2 \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{y}{R+y} dA = -I_0$$

$$\frac{V}{I_0} (-I_0) + V = 0.$$

b) Die Ausdrücke (12) und (13) ergeben für die Änderung der Spannung in der y -Richtung (für $\frac{d\tau}{dy} = \tau'$) den selben Zusammenhang. Der Ausdruck (12) wird für die Differentiation so umgeformt, daß die obere Integrationsgrenze die Veränderliche y sei, und auch die Substitution $dA = (2z)dy$ wird durchgeführt. Die Breitenabmessung $(2z)$ des Querschnittes ist von y abhängig:

$$\frac{dz}{dy} = z'.$$

Demgemäß wird für die Vorbereitung der Differentiation statt des fixen $y = \eta$ die Veränderliche y bzw. statt τ_η die Spannung τ geschrieben, es wird somit

$$-\frac{VR}{I_0} \int_{e_1}^y \frac{R}{R+y} y(2z) dy - \int_{e_1}^y \tau(2z) dy = \tau(2z)(R+y).$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Differenzieren nach y den Ausdruck

$$-\frac{VR}{I_0} \frac{R}{R+y} y(2z) - \tau(2z) = \tau'(2z)(R+y) + \tau(2z')(R+y) + \tau(2z). \quad (14)$$

Wird die Gleichung (13) ähnlich wie (12) umgeformt, erhält man nach kleinerer Umordnung den Ausdruck

$$\tau(2z)(R+y)^2 = -\frac{VR^2}{I_0} \int_{e_1}^y y(2z) dy.$$

Aus diesem wird durch Differenzieren nach y

$$\tau'(2z)(R+y)^2 + \tau(2z')(R+y)^2 + \tau(2z)2(R+y) = -\frac{VR^2}{I_0} y(2z). \quad (15)$$

Die Gleichung (14) kann durch einfaches Umordnen in dieselbe Form gebracht werden wie die Gleichung (15), (12) und (13) ergeben also für die Funktion $\tau(y)$ dieselbe Differentialgleichung.

Da der unter a) erwähnte Umstand verbürgt, daß die Lösungen der Differentialgleichungen auch in der Konstante identisch sind, ist bewiesen, daß die Gleichung (13) die Lösung der Gleichung (12) darstellt.

Der auf diese Weise für die Spannungen τ erhaltene Ausdruck weicht in zwei Faktoren von der für gerade Stäbe gebräuchlichen Form $\frac{VM_s}{I(2z)}$ ab:

Er enthält

1. statt des Trägheitsmoments I das reduzierte Trägheitsmoment I_0
2. das Quadrat des Reduktionsfaktors $\frac{R}{R+y}$.

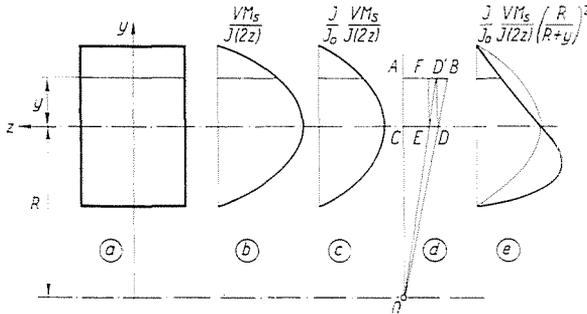


Abb. 4

Dementsprechend kann die Auftragung der Spannungsverteilung so erfolgen, daß das für den geraden Stabquerschnitt berechnete Spannungsverteilungsbild $\frac{VM_s}{I(2z)}$ mit dem Faktor $\frac{I}{I_0}$ multipliziert wird (praktisch könnte natürlich sofort $\frac{VM_s}{I_0(2z)}$ aufgetragen werden), worauf die Reduktion in der Weise erfolgt, daß zweimal nacheinander Hyperbeln konstruiert werden (Abb. 4). Wie nämlich aus Abb. 4/d ersichtlich, ist

$$\overline{CD} : \overline{AB} = R : (R + y) \quad \text{und somit} \quad \overline{AD'} = \overline{CD} = \overline{AB} \frac{R}{R + y},$$

ferner

$$\overline{CE} : \overline{AD'} = R : (R + y),$$

und schließlich

$$\overline{AF} = \overline{CE} = \overline{AD'} \frac{R}{R + y} = \overline{AB} \left(\frac{R}{R + y}\right)^2.$$

Die Stelle der maximalen Spannung τ ergibt sich sogleich aus der Konstruktion; sie wird durch die aus dem Nullpunkt an die Kurve $\frac{VM_s}{I_0(2z)}$ gelegte Tangente bestimmt. Beachtung verdient die Tatsache, daß sich die Stelle von τ_{\max} im Falle eines stark gekrümmten Stabes gegen den Krümmungsmittel-

punkt des Stabes hin verschiebt, u. zw. dorthin, wo auch der Spannungswert σ_t groß ist. In solchen Fällen ist auch der Maximumwert wesentlich größer als jener, der sich aus der für gerade Stäbe gebräuchlichen Formel ergibt. Bei wenig gekrümmten Stäben weicht dagegen sowohl der Faktor $\frac{I}{I_0}$ als auch $\left(\frac{R}{R+y}\right)^2$ kaum von der Einheit ab, womit die Praxis, in wenig gekrümmten Stäben die τ -Spannung aus der für gerade Stäbe gültigen Formel zu ermitteln, ihre Rechtfertigung findet.

Bei Stäben mit kreisrunden, elliptischen oder ähnlichen Querschnitten hat die Lage der den Umfangspunkten zugeordneten kleinen Würfelemente bzw. der spannungslose Zustand der freien Oberfläche zur Folge, daß die

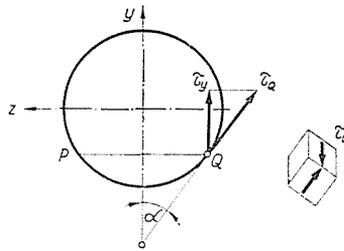


Abb. 5

τ -Spannung an der in die Querschnittebene fallenden Seite mit der Ordinatenachse einen Winkel einschließt (Abb. 5). Bei Untersuchungen von geraden Stäben ist es üblich, die aus den Gleichgewichtsgleichungen ermittelte Spannungskomponente

$$\tau = \tau_y = \frac{VM_s}{I(2z)}$$

längs der Geraden $y = \text{const.}$ PQ als konstant zu betrachten wird, womit man für die an der Umfangstelle Q auftretende Schubspannung die Beziehung $\tau_Q = \frac{\tau_y}{\cos \alpha}$ erhält. Es kann angenommen werden, daß an der PQ -Linie entlang keine größere Spannung τ auftritt. Die obige Untersuchung der in den Querschnitten gekrümmter Stäbe entstehenden Spannungen bezieht sich auf die Spannung τ_y , und da die freie Oberfläche spannungslos ist, ergibt sich auch in diesem Fall $\tau_Q = \frac{\tau_y}{\cos \alpha}$, d. h. die für den geraden Stabquerschnitt gezeichnete $\left(\frac{VM_s}{I(2z)} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}\right)$ -Kurve muß auch in diesem Falle im Sinne der Punkte 1 und 2 geändert werden (Abb. 6).

Aus dem Gleichgewichtszustand des in Abb. 3 dargestellten Teiles lassen sich auch die Radialspannungen $\sigma_{r\eta}$ ableiten. Die Gleichgewichtsgleichung in Richtung r lautet

$$\begin{aligned}
 -\sigma_{r\eta}(2z)(R + \eta) d\varphi + \cos \frac{d\varphi}{2} \int_{\eta}^{\epsilon_1} \tau_2 dA - \cos \frac{d\varphi}{2} \int_{\eta}^{\epsilon_1} \tau_1 dA - \\
 - \sin \frac{d\varphi}{2} \int_{\eta}^{\epsilon_1} \sigma_{K_1} dA - \sin \frac{d\varphi}{2} \int_{\eta}^{\epsilon_1} \sigma_{K_2} dA = 0.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

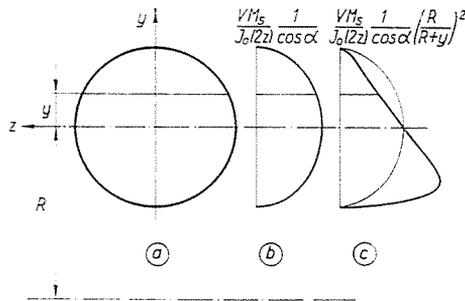


Abb. 6

Die Radialkomponente der inneren Kräfte, die aus den an der inneren Mantel-seite auftretenden Spannungen τ_{η} ermittelt werden kann, ist gleich Null, weshalb sie in der Gleichgewichtsgleichung erst gar nicht angeführt ist.

Mit den wegen der kleinen Winkelwerte gestatteten Vereinfachungen werden die den gleichgearteten Spannungen entsprechenden Integrale getrennt berechnet.

Aus Gleichung (13) folgt, daß

$$\tau_2 = \frac{V_2 M_s}{I_0 (2z)} \left(\frac{R}{R + \eta} \right)^2 = \frac{V_2}{I_0} f(\eta)$$

und

$$\tau_1 = \frac{V_1 M_s}{I_0 (2z)} \left(\frac{R}{R + \eta} \right)^2 = \frac{V_1}{I_0} f(\eta),$$

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{V_2 - V_1}{I_0} f(\eta) = \frac{dV}{I_0} f(\eta).$$

Die Schubkraft kann mit Hilfe der Gleichung (4) eliminiert werden, es wird somit

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{Nd\varphi}{I_0} f(\eta),$$

$$\int_{\eta}^{\epsilon_1} (\tau_2 - \tau_1) dA = \frac{Nd\varphi}{I_0} \int_{\eta}^{\epsilon_1} f(\eta) dA. \quad (17)$$

Nach Substitution von $dA = (2z)dy$ ist der Ausdruck

$$f(\eta) = \frac{M_s}{[2z(\eta)]} \left(\frac{R}{R + \eta} \right)^2$$

— bei Substitution des Fixwertes η durch die Veränderliche y — durch Teilintegration integrierbar. Dazu müssen

$$u = M_s = \int_y^{\epsilon_1} y dA = - \int_{\epsilon_1}^y y(2z) dy,$$

sowie

$$v' = \left(\frac{1}{R + y} \right)^2$$

eingesetzt werden, wonach

$$u' = -(2z)y$$

und

$$v = - \frac{1}{R + y}.$$

Daraus folgt

$$\int_y^{\epsilon_1} f(\eta) dA = R^2 \left\{ - \left[\frac{M_s}{R + y} \right]_y^{\epsilon_1} - \int_y^{\epsilon_1} [-(2z)y] \left(- \frac{1}{R + y} \right) dy \right\}$$

Der der Stelle $y = \eta$ zugehörige Integralwert ist

$$\int_{\eta}^{\epsilon_1} f(\eta) dA = R^2 \left\{ 0 + \frac{M_s}{R + \eta} - \int_{\eta}^{\epsilon_1} \frac{y}{R + y} dA \right\}. \quad (18)$$

Auf die gleiche Weise kann der Wert $\sigma_{K_2} + \sigma_{K_1}$ ermittelt werden:

$$\sigma_{K_2} + \sigma_{K_1} = 2 \left[\frac{N}{A} + \frac{M}{RA} + \frac{MR}{I_0} \frac{y}{R + y} \right] + d\sigma_t.$$

Damit nimmt das Integral die Form

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{2} \int_{\eta}^{\epsilon_1} (\sigma_{K_1} + \sigma_{K_2}) dA &= d\varphi \left[\frac{N}{A} + \frac{M}{RA} \right] \int_{\eta}^{\epsilon_1} dA + \\ &+ d\varphi \frac{MR}{I_0} \int_{\eta}^{\epsilon_1} \frac{y}{R+y} dA + d\varphi \int_{\eta}^{\epsilon_1} d\sigma_i dA \end{aligned} \quad (19)$$

an. Nach Einsetzen der Teilergebnisse aus den Ausdrücken (17), (18), (19) in die Gleichung (16) und nach Kürzung mit $d\varphi$ sowie in Anbetracht dessen, daß außer den anderen Gliedern

$$\int_{\eta}^{\epsilon_1} d\sigma_i dA = 0,$$

erhält man

$$\begin{aligned} -\sigma_{r\eta}(2z)(R+\eta) + \frac{N}{I_0} R^2 \left[\frac{M_s}{R+y} - \int_{\eta}^{\epsilon_1} \frac{y}{R+y} dA \right] - \\ - \left[\frac{N}{A} + \frac{M}{RA} \right] \int_{\eta}^{\epsilon_1} dA - \frac{MR}{I_0} \int_{\eta}^{\epsilon_1} \frac{y}{R+y} dA = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Nach Ordnen und mit den Bezeichnungen

$$\int_{\eta}^{\epsilon_1} \frac{R}{R+y} dA = M'_s$$

und

$$\int_{\eta}^{\epsilon_1} dA = A_1$$

hat man die Gleichung

$$\begin{aligned} -\sigma_{r\eta}(2z)(R+\eta) + \frac{NR^2 M_s}{I_0(R+y)} - (NR+M) \frac{M'_s}{I_0} - \\ - \left(N + \frac{M}{R} \right) \frac{A_1}{A} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Aus dem Ausdruck

$$I_0 = x AR^2$$

wird

$$\frac{1}{A} = \frac{x R^2}{I_0}$$

womit man aus Gleichung (21) nach neuerlichem Umordnen das Ergebnis

$$\sigma_{r\eta} = -\frac{1}{I_0(2z)} \frac{R}{R+\eta} \left[N + \frac{M}{R} \right] [Rx A_1 + M'_s] + \frac{NM'_s}{I_0(2z)} \left(\frac{R}{R+\eta} \right)^2 \quad (22)$$

erhält. Vorzeichengerecht ergibt sich die Spannung $\sigma_{r\eta}$, wenn N im Zugkraftfall positiv, und wenn M in dem Fall positiv ist, wenn es den Stab stärker krümmt — wie dies auch bei Anwendung der Grashof'schen Formel anzunehmen ist —, und wenn schließlich die Integrale A_1 , M_s und M'_s so berechnet werden, daß $+e_1$ die obere Grenze ist.

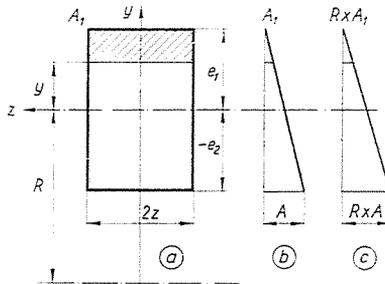


Abb. 7

Dem erhaltenen Ergebnis entsprechend kann die Radialspannung $\sigma_{r\eta}$, wenn in der Schwerpunktfaser keine Spannung σ_t auftritt, wenn also

$$\sigma_0 = \frac{1}{A} \left[N + \frac{M}{R} \right] = 0,$$

aus der Normalkraft N berechnet werden, und zwischen N und $\sigma_{r\eta}$ derselbe Zusammenhang besteht wie zwischen der Schubkraft V und der Spannung τ_{η} .

Ist $\sigma_0 \neq 0$, muß auch das erste Glied des Ausdruckes bestimmt werden. Seine graphische Konstruktion ist etwas komplizierter als die des zweiten Gliedes. Die einzelnen Schritte der Konstruktion sollen wieder auf einen Rechteckquerschnitt bezogen gezeigt werden (Abb. 7 und 8).

$$A_1 = A_1(y) = \int_{\eta}^{e_1} dA$$

ist die Querschnittsfläche zwischen einer beliebigen Faser η und der Randfaser e_1 (Abb. 7/a), die mit abnehmendem y zunimmt (und zwar linear, wenn der

Querschnitt rechteckig ist) (Abb. 7/b). Laut Regel muß diese Kurve mit dem Wert $Rx = \text{const.}$ multipliziert werden (Abb. 7/c), die Abszisse der Abbildung wird also die Dimension cm^3 haben. Der Höchstwert an der Stelle $y = -e_2$ beträgt

$$Rx A = \frac{I_0}{R}.$$

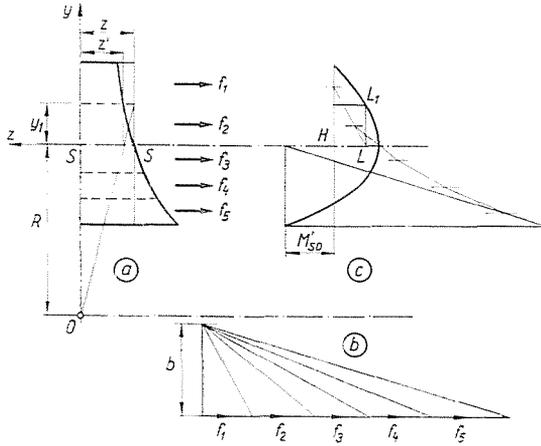


Abb. 8

Der Ausdruck $M'_s = \int_{\eta}^{e_1} \frac{R}{R+y} y dA$ ist das statische Moment des sogenannten reduzierten Querschnittes, zu seiner Bestimmung wird also der auf Grund des Zusammenhanges

$$dA' = (2z') dy = (2z) \frac{R}{R+y} dy = \frac{R}{R+y} dA$$

reduzierte Querschnitt benötigt (Abb. 8/a). Den Regeln der Momentenkonstruktion entsprechend erhält man den M'_s -Wert an der y_1 -Stelle, indem man an den der Fläche des reduzierten Querschnittes proportionalen Vektor f_1 — der in die den Paralleseiten des fraglichen Querschnittes (annähernd eines Trapezes) parallele Schwerlinie gezeichnet werden muß — ein Vektorpolygon mit dem Polabstand b und ein Seileck konstruiert (Abb. 8/b und 8/c). Der erste und der zweite (im allgemeinen der letzte) Seilstrahl schneiden an der Schwerlinie $s-s$ der ursprünglichen Fläche den Momentenabschnitt \overline{HL} aus, der auf die Gerade y_1 projiziert werden muß (Punkt L_1). Die Verbindung der so erhaltenen Punkte ergibt die Kurve $M'_s(y)$, die ihr positives Maximum in der Schwerpunktachse erreicht und an der Stelle $y = -e_2$

bestimmt negativ ist, weil der über der Schwerlinie befindliche, den positiven y -Werten zugeordnete Flächenteil durch die Reduzierung des Querschnittes vermindert und der unter der Schwerlinie befindliche negative Teil vergrößert wurde.

$$\text{Da } I_0 = xAR^2 = -R \int_{(A)} \frac{R}{R+y} y dA = -R M'_{s_0},$$

ist

$$M'_{s_0} = -\frac{I_0}{R}.$$

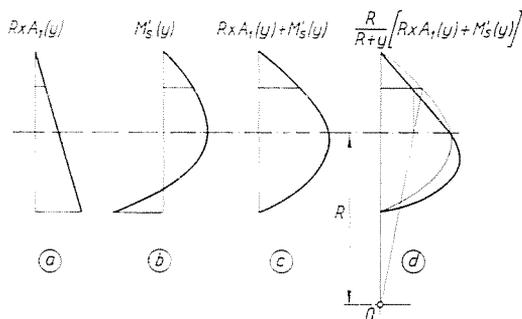


Abb. 9

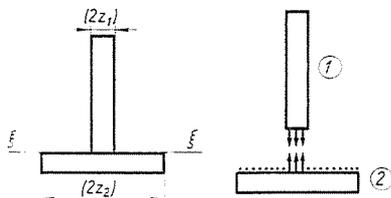


Abb. 10

Durch die Summierung $RxA_1(y) + M'_s(y)$ erhält man die Kurve c) der Abb. 9; wird diese noch im Verhältnis $\frac{R}{R+y}$ reduziert, gelangt man zur Abb. 9/d, die der Form der Abb. 4/e ähnelt.

Im Laufe der Ableitung wurde angenommen, daß τ_η und $\sigma_{r\eta}$ an der Breite $(2z)$ entlang gleichmäßig verteilt sind. Solange die Funktion $z(y)$ stetig ist, stößt diese Annahme auf keinen Widerspruch; es kann höchstens davon die Rede sein, daß dort, wo $\frac{dz}{dy}$ einen großen Wert hat, auch in der Richtung z erhebliche Spannungen auftreten und auch die Verteilung von τ_η und $\sigma_{r\eta}$ nicht mehr gleichmäßig ist. An jenen Stellen hingegen, wo Unstetigkeiten in

lastung $p_\tau = \tau (2z)$ [kp/cm] als Funktion der Bogenlänge s aufgetragen. (Der auf die Stablänge ds entfallende Wert dieser letzteren ist bei geraden Stäbe die sogenannte Schubkraft.) Die Bogenlänge s wird diesmal nicht an der Schwerpunktklinie des Stabes, sondern an der geprüften Stelle, d. h. am Kreisbogen mit dem Halbmesser $r = R + y_e = 70 - 6 = 64$ mm gemessen: $s = r\varphi$. Der Winkel wird vom vertikalen Halbmesser ab gerechnet. Die Stelle des Schwerpunktes ist in der Abbildung bezeichnet; die Querschnittsfläche ist $A = 12,8$ cm², das Trägheitsmoment $I = 34,99$ cm⁴, und das reduzierte Trägheitsmoment beträgt $I_0 = 33,94$ cm⁴. In die Berechnung dieser Größen wird hier nicht eingegangen.

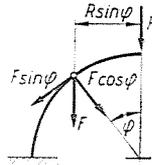


Abb. 12

In keinem der Querschnitte des mit der Kraft F_1 belasteten Stabes wird eine Spannung in der Schwerpunktfaser geweckt werden, weil (Abb. 12)

$$\sigma_0 = \frac{N}{A} + \frac{M}{RA} = -\frac{F \sin \varphi}{A} + \frac{FR \sin \varphi}{RA} = 0.$$

Deswegen läuft das erste Glied der Gleichung (22) auf Null aus, die Veränderung der Spannungen σ_r und τ längs des Querschnittes ergibt sich also aus ein und demselben Ausdruck. Zweckmäßig konstruiert man die Abbildung für die Belastungen $N = 1$ Mp bzw. $V = 1$ Mp. Auf diese Weise erhält man in jedem beliebigen Querschnitt des Stabes, an jeder beliebigen Stelle des Querschnittes die Spannung σ_r bzw. τ , wenn man den aus der Abbildung ablesbaren Wert mit der entsprechenden Kraft N bzw. V multipliziert. In Abb. 13 ist also der Zusammenhang

$$\sigma_r \text{ (bzw. } \tau) = \frac{(1 \text{ Mp}) M_s}{I_0 (2z)} \left(\frac{R}{R + y} \right)^2$$

dargestellt.

Entsprechend entsteht im Querschnitt $\varphi = 0^\circ$ unter dem Einfluß der den Stab belastenden Kraft $F_1 = 2,12$ Mp die maximale Spannung τ an der Kontaktstelle der Rechteckteile $\tau_{\max} = 193 \cdot 2,12 = 409$ kp/cm², und ebenso ist im eingespannten Querschnitt $\sigma_{r \max} = 409$ kp/cm².

Bei dem in Abb. 11/b dargestellten Stab muß der gerade Stabteil vom gekrümmten Stab getrennt betrachtet werden. Im geraden Stab entstehen keine Spannungen σ_r ; die τ -Spannung kann aus der Formel $\frac{VM_s}{I(2z)}$ berechnet werden. Die Abb. 14 wurde ebenfalls für eine Schubkraft von 1 Mp konstruiert. Die in der Schwerpunktfaser geweckte Spannung weicht nur wegen der Ver-

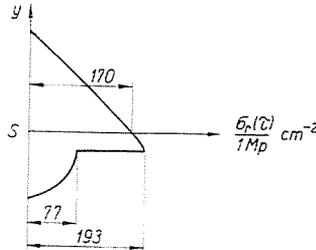


Abb. 13

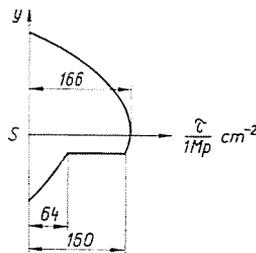


Abb. 14

schiedenheit von I_0 und I von dem aus Abb. 13 ablesbaren Wert ab, an den sonstigen Stellen verursacht die Verzerrung ziemlich beträchtliche Abweichungen. Die maximale τ -Spannung beträgt in der Schwerpunktfaser unter dem Einfluß der belastenden Kraft $F_2 = 0,94$ Mp $\tau_{\max} = 166 \cdot 0,94 = 156$ kp/cm², während die Spannung an der Kontaktstelle der Rechtecke $\tau_e = 160 \cdot 0,94 = 151$ kp/cm² ist. In jedem beliebigen Querschnitt des gekrümmten Teiles geht die Verteilung der τ -Spannungen auch diesmal aus Abb. 13 hervor. Diesmal ist es aber nicht möglich, die Verteilung von σ_r auf einer einzigen Fläche darzustellen, da sich die Werte von M und N in den Gliedern der Gleichung (22) von Querschnitt zu Querschnitt ändern und nur der Multiplikator der Kraftwirkungen am gekrümmten Stab entlang konstant bleibt. Das zweite Glied gestaltet sich auch jetzt der Abb. 13 entsprechend; die dem ersten Glied zugehörige Fläche wird aus Teilen zusammengestellt. Abb. 15/a veranschaulicht den Ausdruck RxA_1 . Hier ist $Rx = \frac{I_0}{AR} = \frac{33,94}{12,8.7} = 0,379$ cm. Der Ausdruck

M'_s , der hier mit einfachen Integrationen berechnet werden kann, ist auf Abb. 15/b dargestellt. Aus der Summierung der beiden Flächen ergab sich die Abb. 15/c die noch im Verhältnis $\frac{R}{R+y}$ verändert werden muß: siehe Abb. 15/d.

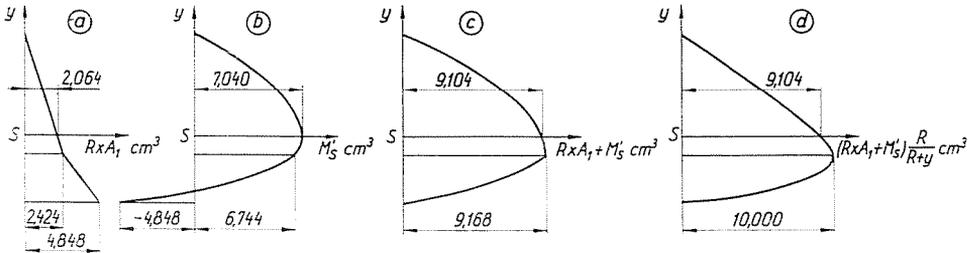


Abb. 15

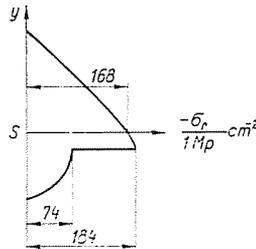


Abb. 16

Wird die Fläche—ähnlich wie zuvor—für die Belastung $N + \frac{M}{R} = 1 \text{ Mp}$ ausgearbeitet und werden dabei auch die Werte von I_0 und $(2z)$ in Betracht gezogen, erhält man die Abb. 16, die einen Teil der Radialspannung ergibt:

$$\sigma'_r = - \frac{1}{I_0(2z)} \frac{R}{R+y} (RxA_1 + M'_s) \left(N + \frac{M}{R} \right).$$

Am gekrümmten Stab ist der Wert von $N + \frac{M}{R}$ konstant, nämlich

$$N + \frac{M}{R} = - F \sin \varphi + \frac{F(R \sin \varphi + k)}{R} = \frac{Fk}{R} = \text{const.}$$

$$N + \frac{M}{R} = 940 \frac{10}{7} = 1,343 \text{ Mp.}$$

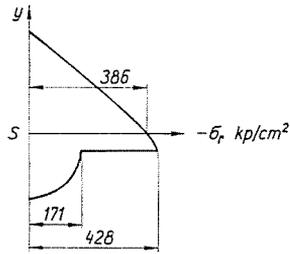


Abb. 17

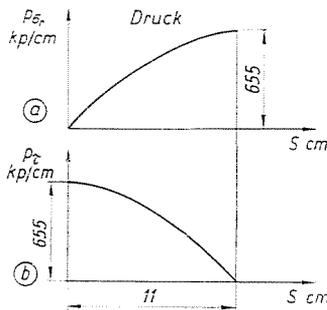


Abb. 18

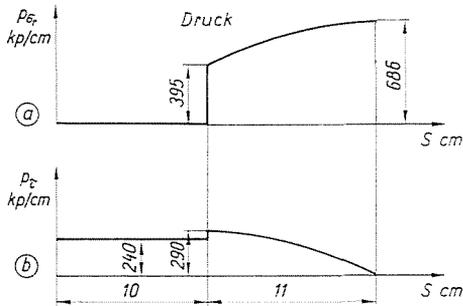


Abb. 19

und damit ist

$$\sigma'_{r\max} = \sigma'_{re} = -184 \cdot 1,343 = -247 \text{ kp/cm}^2.$$

Das zweite Glied σ''_r ist der Kraft N proportional und erreicht somit im eingespannten Querschnitt seinen Größtwert. Da σ'_r am Stab entlang konstant ist und sowohl σ'_r als auch σ''_r Druckspannungen sind, erreicht

$$\sigma_r = \sigma'_r + \sigma''_r$$

die Größtwerte im eingespannten Querschnitt. Abb. 17 zeigt die Veränderung der durch die Kraft F_2 verursachten σ_r -Spannungen längs des eingespannten Querschnittes.

An der Grenze der beiden Rechtecke, die den Querschnitt bilden, lassen sich jene verteilten Belastungen, für welche die Verbindungen — sofern die beiden Teile aus separaten Stücken zusammengestellt sind — berechnet werden müssen, aus den Spannungen σ_r und τ ermitteln. Diese Belastungen werden anhand der Formel $p_{\sigma_r} = \sigma_r (2z)$ bzw. $p_\tau = \tau(2z)$ ermittelt; ihr Wert verändert sich an den Stäben von Stelle zu Stelle. Für den Stab in Abb. 11/a werden die fraglichen Belastungen in Abb. 18 angegeben, für den Stab in Abb. 11/b hingegen in Abb. 19.

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird die Berechnung der in gekrümmten Stäben geweckten Radial- und Schubspannungen auf Grund der Gleichgewichtsgleichungen und der durch die Grashof'sche Formel gegebenen Spannungsverteilung dargelegt. Es wird auf die Möglichkeiten der Anwendung dieses Verfahrens auf dem Gebiet der Berechnung der Verbindungen von aus mehreren Teilen zusammengesetzten Querschnitten hingewiesen. Anhand von Zahlenbeispielen wird gezeigt, daß diese Radial- und Schubspannungen erhebliche Werte haben. Die Abhandlung gibt ein einfaches graphisches Konstruktionsverfahren zur Bestimmung der Stelle und Größe der maximalen Schubspannung an.

Literatur

1. STEINHARDT: Beitrag zur Berechnung gekrümmter Stäbe mit gegliedertem Querschnitt. Diss. T. H. Darmstadt, 1938.
2. PFLEIDERER, C.: Die Beanspruchung stabförmiger Träger mit gekrümmter Mittellinie. Z. VDI 1907, S. 209—213 und 1507—1511.
3. KÁRMÁN, T.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre. Z. VDI. 1911, S. 1889—95.
4. BERG, S.—BERNHARD, H.—RICHTER, H.: Zur Frage der Elastizität der Beanspruchung und der Festigkeit warmbetriebener Rohrleitungen. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Bd. 12, 1941. Ausgabe A. S. 166—173.
5. CZIRMAZ, I.: Kompenzátorok méretezése és ezzel kapcsolatban a vékonyfalú ívcsövek feszültségi viszonyainak vizsgálata. (Berechnung von Kompensatoren und in diesem Zusammenhang die Ermittlung der Spannungsverhältnisse in dünnwandigen Bogenröhren) Budapest, É. M. Dokumentáció és Nyomatványellátó Vállalat. 1958, (ungarisch).
6. BERG, S.: Querspannungen in gekrümmten Balken. Konstruktion, 1954. S. 245.

Miklós SZÜCS }
Livia PÁRTOS } Budapest, XI. Műegyetem rkp. 3. Ungarn.