

BERECHNUNG DER TRAGFÄHIGKEIT VON GERAD- UND SCHRÄGSTIRNRÄDERN*

Von

G. NEUGEBAUER

(Eingegangen am 23. Oktober 1963)

Vorgelegt von Prof. Dr. I. Vörös

1. Einleitung

Dem Konstrukteur stehen in einer umfangreichen Literatur eine Vielzahl von Methoden für die Zahnradberechnung zur Verfügung. Die Wahl der Berechnungsmethode ist vielfach ausschlaggebend für die Baugröße der Getriebe.

Bei Vergleichen zwischen den verschiedenen Berechnungsmethoden aus Deutschland, der Schweiz und der Sowjetunion nach NIEMANN, THOMAS, TEN BOSCH, TRIER, PETRUSEWITSCH, KISTIAN usw. ergab sich ein Streubereich von mehr als 100%. Es lag demnach nahe, ein einheitliches Verfahren für die Zahnradberechnung zu erarbeiten. Vom Deutschen Normausschuß wurden in langjähriger Arbeit die Grundlagen der Zahnradberechnung eingehend behandelt. Es ist gelungen, die Erfahrungen der Getriebeindustrie mit den theoretischen Grundlagen so zu vereinen, daß sich ein Normvorschlag für die Berechnung der Tragfähigkeit von Gerad- und Schrägstirnrädern ausarbeiten ließ. Das Institut für Maschinenelemente der Technischen Universität Dresden hat an der Aufstellung des Berechnungsverfahrens intensiv mitgewirkt. So wurde das Verfahren im wesentlichen nach einem Vorschlag des Institutes aufgebaut, und alle Diagramme zur schnellen Ermittlung der Nennspannungen wurden von ihm zur Verfügung gestellt.

Für die Deutsche Demokratische Republik wurde in TGL 10545 die »Tragfähigkeitsberechnung von Gerad- und Schrägstirnrädern« zum Druck vorbereitet. Dieses TGL-Blatt enthält alle notwendigen Angaben zur Nachrechnung der Getriebe und soll für alle Industriezweige verbindlich eingeführt werden.

In den TGL 10546-Empfehlung werden »Empfehlungen zur Tragfähigkeitsberechnung von Gerad- und Schrägstirnrädern« gegeben, so die zweckmäßigsten Formeln für die Entwurfsberechnung, Richtlinien für die Wahl des Zahnbreitenverhältnisses, Richtlinien für die Begrenzung der Umfangsgeschwindigkeit abhängig von der Fertigungsqualität und Angaben über zul. Dauerfestigkeitswerte.

* Vorgetragen a. d. Technischen Universität, Budapest, am 23. Oktober 1962.

Das Berechnungsverfahren wurde in den Vorschriften für Schiffsmaschinen-Getriebe und Kupplungen der »Deutschen Schiffs-Revision und Klassifikation« DSRK 3.4, Ausgabe 1960, bereits als verbindlich, aufgenommen.

Vom Seeregister der UdSSR wurde dieses Berechnungsverfahren anerkannt und starkes Interesse dafür gezeigt.

Im ISO-Komitee TC 60, Arbeitsgruppe 6

»Tragfähigkeitsberechnung von Zahnrädern«

wurde der deutsche Normvorschlag zur Diskussion gestellt und gut aufgenommen.

Die folgenden Ausführungen bauen auf TGL 10545 und auf TGL die 10546-Empfehlung auf.

2. Schadensfälle

Allgemein müssen Zahnradgetriebe so bemessen werden, daß keine Schadensfälle an den Zähnen auftreten. Es ist deshalb zweckmäßig zu untersuchen, welche Getriebeschäden sich einstellen können.

2.1 Zahnbruch

Bei Überschreitung der ertragbaren Belastung brechen die Zähne in der überwiegenden Zahl der Fälle im Zahnfuß. Der Berechnung wird deshalb die am Zahnfuß auftretende Spannung zugrunde gelegt.

2.2 Grübchenbildung (*Pittingbildung*)

Bei Überschreitung der ertragbaren Walzenpressung der miteinander in Eingriff kommenden Zahnflanken brechen Teile der Zahnflanken aus, so daß grübchenartige Vertiefungen (*Pittings*) entstehen. Die Grübchenbildung wird erst dann als schädlich angesehen, wenn sie progressiven Charakter zeigt, d.h., wenn die Grübchenbildung mit der Laufzeit zunimmt.

Der Berechnung wird die Bestimmung der Hertzschen Pressung an den gefährdeten Eingriffsstellen der Flanke zugrunde gelegt. Es ist zwar bekannt, daß die Grübchenbildung auch durch das spezifische Gleiten beeinflusst wird, doch reichen die Forschungsergebnisse nicht aus, um diesen Punkt in der Rechnung mit zu berücksichtigen.

2.3 Freßen

Bei ungünstiger Form von Belastung, Gleitgeschwindigkeit, Flankenreibwert, Rauhtiefe, Öltemperatur usw. können Freßerscheinungen an den Zahnflanken auftreten. Für die Berechnung der Freßtragfähigkeit liegen eine

Reihe von Formeln nur für spezielle Einsatzgebiete von Zahnrädern vor. Eine allgemein gültige Formel ist vorläufig nicht vorhanden, so daß im allgemeinen Maschinenbau eine Berechnung der Freßtragfähigkeit nicht erfolgt.

2.4 Weitere Einflüsse auf die Tragfähigkeit von Zahnradgetrieben

Die Tragfähigkeit der Zahnradgetriebe ist außerdem abhängig von der Art der Schmierung, der Gestaltung der Gehäuse, der Schmiermittelkühlung usw. Bei unzureichender Auslegung kann eine *Überhitzung* des Getriebes auftreten. Durch Aufstellung der Wärmebilanz ist dieser Punkt zu überprüfen.

Wenn der Gleitvorgang an den Zahnflanken im Gebiet der Mischreibung oder der Trockenreibung vor sich geht, tritt *Gleitverschleiß* in Form von Abrieb an den Zahnflanken auf. Eine geeignete rechnerische Überprüfung des Gleitverschleißes ist bisher bei Stahlrädern nicht möglich. Bei Kunststoffrädern ist die Verschleißberechnung für die Dimensionierung der Zahnräder maßgebend; sie erfolgt bisher noch nach der altbekannten Formel

$$P_u = C \cdot b \cdot t,$$

wobei C den Belastungswert der einzelnen Kunststoffe darstellt. Für die Dimensionierung der Stahlzahnradpaare ist somit nach den bisherigen theoretischen Grundlagen die Berechnung auf Zahnfußfestigkeit und auf Walzenpressung maßgebend.

3. Angreifende Kräfte

Für die Berechnung von Zahnrädern ist die Kenntnis der tatsächlich an den Zahnflanken angreifenden Kräfte erforderlich. Der Einsatz des Getriebes im Maschinenaggregat muß vom Konstrukteur genau beachtet werden.

In Bild 1 ist der Einsatz eines Getriebes schematisch dargestellt. Die Verarbeitungsmaschine habe eine Kennlinie, wie sie rechts oben im Bild gezeigt ist, und als Antriebsmaschine soll ein Elektromotor (Asynchronmotor) dienen, dessen Kennlinie links oben aufscheint. Durch Anordnung eines Schwungrades zwischen Getriebe und Verarbeitungsmaschine kann die ungleichförmige Belastung gut ausgeglichen werden, so daß das Getriebe für das Nennmoment ausgelegt werden kann.

Liegt allerdings eine große Schalthäufigkeit vor, dann muß die Auslegung des Getriebes für das Anlaufmoment M_t Anlauf erfolgen. Wird das Schwungrad zwischen Motor und Getriebe gesetzt, wirken die periodischen Kräfte der Verarbeitungsmaschine direkt auf das Getriebe ein, so daß dieses für das maximale Moment $M_{t \max}$ ausgelegt werden muß.

Für bestimmte Einsatzgebiete der Getriebe liegen Erfahrungswerte über die auftretenden Drehmomentschwankungen bzw. Stöße vor. In Formel

(1) ist angedeutet, daß bei periodischen Kräften mit der max. Belastung gerechnet werden muß, die sich aus der Nennbelastung unter Berücksichtigung eines entsprechenden Betriebsfaktors ergibt. Einzelne auftretende Stöße werden in der Dauerfestigkeitsberechnung nicht erfaßt. Es muß dann mit der max. Stoßkraft auf Gewaltbruch der Zähne nachgerechnet werden.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Periodische} \\ \text{Kräfte:} \\ \text{Stöße:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_u = C_{\text{Betr}} P'_u \\ (M_t = C_{\text{Betr}} M_{in}) \\ P_u = P'_u \\ (M_t = M_{in}) \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dauerfestigkeits-} \\ \text{berechnung} \end{array} \quad \begin{array}{l} (1a) \\ (1b) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_u = C_{\text{St}} \cdot P'_u \\ (M_t = C_{\text{St}} \cdot M_{in}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Rechnung auf} \\ \text{Gewaltbruch} \end{array} \quad (1c)$$

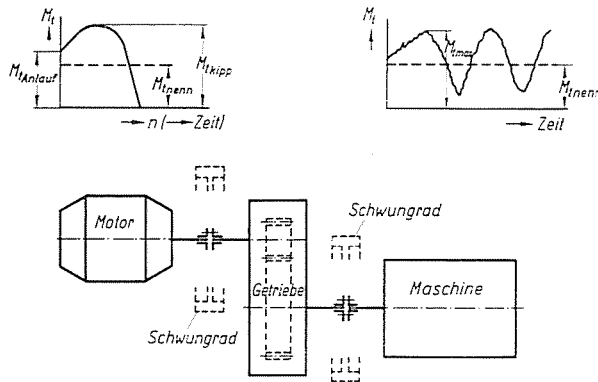


Bild 1

- P_u [kp] Tatsächlich an der Zahnflanke wirkende Umfangskraft unter Berücksichtigung der Betriebsbedingungen
- P'_u [kp] Umfangskraft infolge des Nenndrehmomentes
- M_t [cmkp] tatsächlich wirkendes Drehmoment unter Berücksichtigung der Betriebsbedingungen
- M_{in} [cmkp] Nenndrehmoment
- $C_{\text{B.tr}}$ Beiwert, der die prozentuale Erhöhung des Nenndrehmomentes infolge der periodischen Kräfte erfaßt
- C_{St} Beiwert, der die prozentuale Erhöhung des Nenndrehmomentes infolge der Stoßkräfte erfaßt.

Im folgenden soll nun die Berechnung der Tragfähigkeit von Gerad- und Schrägstirnrädern auf die Zahnfußfestigkeit und Walzenpressung behandelt werden.

kopf. Der maßgebende Kraftangriff liegt jedoch im äußeren Einzeleingriffspunkt des Zahnes vor, da dann die gesamte Umfangskraft von einem Zahn aufgenommen werden muß, während am Zahnkopf nur etwa die Hälfte der Umfangskraft auftritt (siehe Bild 3).

Da die Zahnfußspannung bei Kraftangriff am Zahnkopf sehr einfach berechnet werden kann, hat man sich in der Norm entschlossen, die Nennspannung bei Kraftangriff am Zahnkopf zu bestimmen. Durch Dividieren der auf den Zahnkopf bezogenen Gesamtspannung durch die Profilüberdeckung ε wird auf den äußeren Einzeleingriffspunkt angenähert. Es ergibt sich dann

$$\sigma_b = \frac{P' \cdot h_q}{b \cdot S_{fn}^2} \quad (2a)$$

$$\sigma_b = \frac{P_{u0}}{b \cdot m_n} \cdot \frac{6 \cdot \frac{h_q}{m_n} \cdot \cos \alpha_{nk}}{\left(\frac{S_{fn}}{m_n}\right)^2 \cdot \cos \alpha_{n0}} \cdot q_\varepsilon \quad (2b)$$

$$\sigma_b = \frac{P_{u0}}{b \cdot m_n} \cdot q_k \cdot q_\varepsilon \quad (2c)$$

wenn	σ_b	[kp/cm ²]	= Zahnfuß-Biegespannung
	P'	[kp]	= Kraftkomponente-Biegemoment
	P_{u0}	[kp]	= Umfangskraft im Teilkreis
	b	[cm]	= Zahnbreite
	m_n	[cm]	= Normalmodul (Geradstirnrad)
	h_q	[cm]	= Biegehebelarm
	S_{fn}	[cm]	= Zahnfußdicke (im Normalschnitt)
	α_{nk}	[°]	= Pressungswinkel am Zahnkopf
	α_{n0}	[°]	= Eingriffswinkel (im Normalschnitt)
	q_k	—	= Formfaktor
	$q_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$		= Überdeckungsfaktor = f (Profilüberdeckung).

Zur Vereinfachung der Rechnung wird der Formfaktor q_k in Abhängigkeit von der Zähnezah und der Profilverschiebung vorausberechnet. In Bild 4 ist in einem Diagramm der q_k -Faktor in Abhängigkeit von der Zähnezah und vom Profilverschiebungsfaktor dargestellt. Gleichzeitig sind die geometrischen Grenzen der Verzahnung, wie theoretische und praktische Unterschnittsgrenzen und die Zahnspezengrenzen für den Eingriffswinkel $\alpha_{n0} = 20^\circ$ angegeben. Es ist zu beachten, daß für Schrägstirnräder auf die rechnerische Zähnezah z_v

$$z_v = \frac{z}{\cos^2 \beta_g \cdot \cos \beta_0}$$

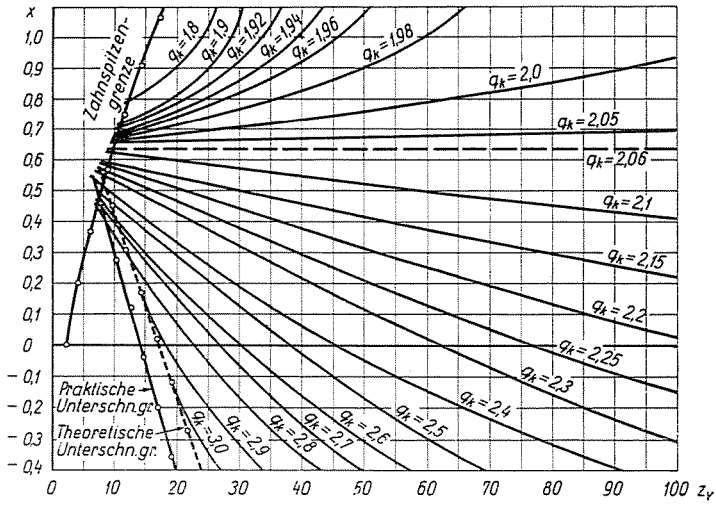


Bild 4

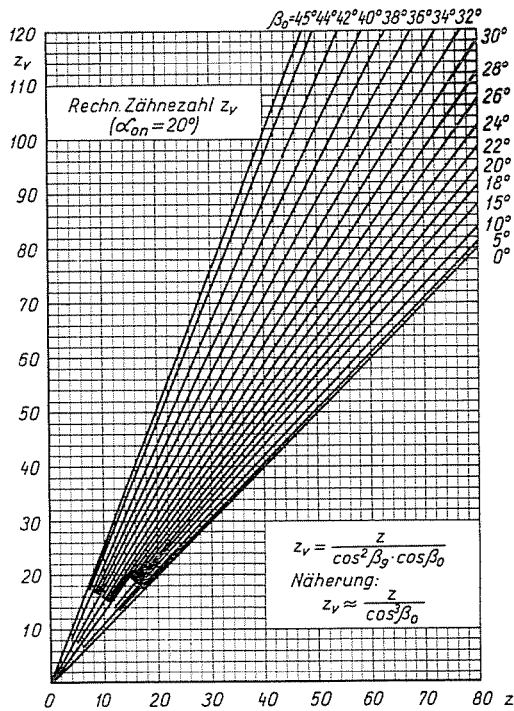


Bild 5

bezogen wird. In Bild 5 ist z_v als Funktion von z und β_0 dargestellt, so daß die Werte für die Berechnung mit Hilfe des Diagrammes genügend genau bestimmt werden können.

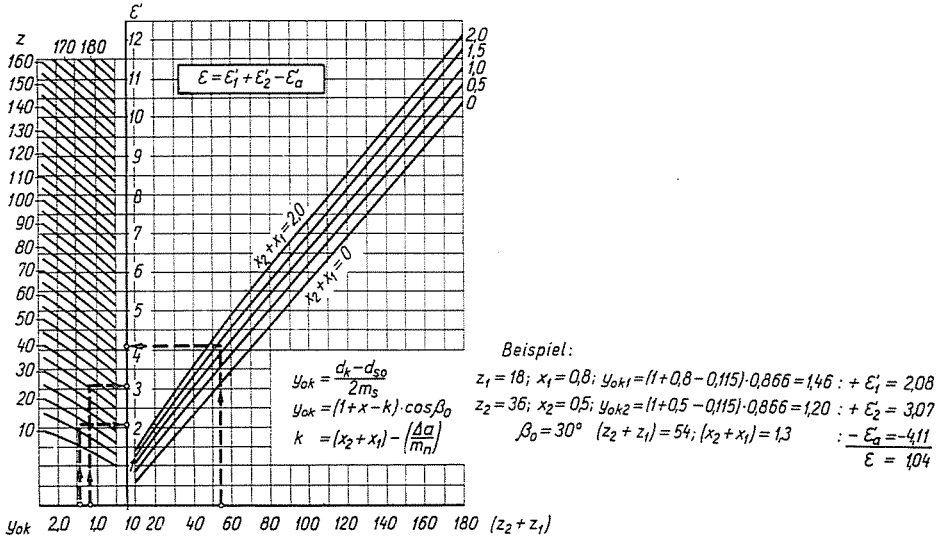
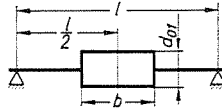


Bild 6

a) Symmetrische Lagerung:



Ungehärtete Räder:

Austauschbare Getriebefertigung

ISO-Qualität	5	6	7	8	9	10
$\frac{b}{d_{01}}$	1,3 ÷ 1,4	1,2 ÷ 1,3	1,2 ÷ 1,1	1,1 ÷ 1,0	1,0 ÷ 0,9	0,8 ÷ 0,9

Anpassung der Flanken oder Auslese unabhängig von der Qualität $\frac{b}{d_{01}} \approx 2$

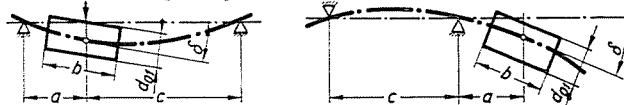
Bei $\frac{b}{d_{01}} > 2$ ist Winkelkorrektur vorzunehmen (Das Rad wird mit einem um die Winkelkorrektur veränderten Schrägungswinkel geschnitten)

Gehärtete Räder:

Austauschbare Getriebefertigung: ISO-Qualität 6: $\frac{b}{d_{01}} = 0,4 - 0,5$

Anpassung der Flanken oder Auslese unabhängig von der Qualität $\frac{b}{d_{01}} \approx 1$

b) Unsymmetrische u. fliegende Lagerung:



Anpassung der Flanken oder Auslese: Ungehärtete Räder: $(b \cdot \tan \delta)_{zul} = 2 \cdot 10^{-4} d_{01}$
 Gehärtete Räder: $(b \cdot \tan \delta)_{zul} = 1 \cdot 10^{-4} d_{01}$

Bild 7

Der Profilüberdeckungsgrad ε kann für Gerad- und Schrägstirnräder (Bild 6) entnommen werden. Ein Beispiel für die Bestimmung des Profilüberdeckungsgrades nach dem Diagramm in Bild 6 ist mit angegeben.

4.2 Berücksichtigung von Verzahnungsfehlern

Da vorläufig noch keine Formeln zur Vorausberechnung des Einflusses von Verzahnungsfehlern vorliegen, werden Richtlinien für die Dimensionierung gegeben, bei deren Einhaltung größere Spannungsspitzen vermieden werden.

Nach Bild 7 ist die Wahl der Zahnbreite in Abhängigkeit von der Lagerung der Räder, der Zahnflankenhärte und der Getriebefertigung möglich.

Tabelle I
Wahl der Fertigungsqualität
Qualität = f (Umfangsgeschwindigkeit)

Umfangsgeschwindigkeit der Räder v (m/s)		1...3	3...6	6...20	20...50	50...100
Qualität nach DIN 3961...3967	ungehärtete Räder	12...10	10...8	8...6	6...5	5...4
	gehärtete Räder	12...9	9...7	7...5	5...4	—

Hierbei wird die ungleichmäßige Lastverteilung über der Zahnbreite infolge der Flankenrichtungsfehler, der Achswinkelfehler, sowie der Ritzel- und Radverformung berücksichtigt.

Nach Tabelle I wird den dynamischen Zusatzkräften durch Begrenzung der Umfangsgeschwindigkeit der Räder in Abhängigkeit von ihrer Fertigungsqualität Rechnung getragen.

4.3 Entwurfsberechnung

Bisher wurden nur die Formeln zur Nachrechnung von Zahnradgetrieben angegeben. Diese Formeln können zweckmäßig für die Entwurfsberechnung umgestellt werden. Formel (3) gibt, ausgehend von der zulässigen Zahnfußfestigkeit, die Handhabe zur Bestimmung des Moduls für die Entwurfsberechnung:

$$m_n = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \cos^2 \beta_0 \cdot M_{tl} \cdot q_k \cdot q_e}{z_1^2 \cdot \left(\frac{b}{d_{01}}\right) \cdot \sigma_{zul}}} \quad (3)$$

Gerad-Stirnräder: $\cos^2 \beta_0 = 1$

M_{t1} [kpcm]	=	tatsächliches Ritzeldrehmoment
m_n [cm]	=	Normalmodul (Geradstirnrad : m)
β_0 [°]	=	Schrägungswinkel im Teilkreis
z_1 —	=	Ritzel — Zähnezahl
$\frac{b}{d_{01}}$ —	=	Zahnbreitenverhältnis
q_k —	=	Formfaktor
		Geradverzahnung: $q_k = f(z; x)$
		Schrägverzahnung: $q_k = f\left(z_v = \frac{z}{\cos^2 \beta_g \cdot \cos \beta_0}; x\right)$
$q_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$	=	Überdeckungsfaktor = f (Profilüberdeckung)

σ_{zul} [kp/cm²] = zulässige Zahnfuß-Biegespannung.

Die Formel ist für Schrägverzahnung aufgestellt, sie gilt für Geradverzahnung, indem $\beta_0 = 0$ gesetzt wird. Man errechnet dann statt des Moduls im Normalschnitt für Schrägverzahnung den Modul für Geradverzahnung.

4.4 Die zulässige Zahnfuß-Biegespannung

Die zulässige Zahnfuß-Biegespannung kann nur in die TGL-Empfehlung aufgenommen werden, da bis jetzt noch keine ausreichenden Versuchsergebnisse vorliegen, die verbindliche Angaben ermöglichen würden. Bei Bestimmung der zulässigen Zahnfuß-Biegespannung müßte von der in Versuchen ermittelten Biegeschwellfestigkeit σ_{bSch} ausgegangen und der Kerbfaktor β_k im Zahngrund erfaßt werden.

Bisher wurde aber direkt die Gestalt-Schwellfestigkeit σ_{SchG} für das Zahnrad bestimmt, so daß damit die zul. Zahnfußbiegespannung ermittelt wird [siehe Formel (4)]. Für einige Zahnradwerkstoffe sind in Tabelle II die σ_{SchG} - Werte angegeben.

Dauerfestigkeit

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bSch}}{\beta_k \cdot S_D} \quad (4a)$$

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{SchG}}{S_D} \quad (4b)$$

σ_{bSch}	[kp/cm ²]	=	Biege-Schwellfestigkeit
σ_{zul}	[kp/cm ²]	=	zulässige Zahnfuß-Biegespannung
σ_{SchG}	[kp/cm ²]	=	Gestalt-Schwellfestigkeit
β_k	—	=	Kerbfaktor
S_D	—	=	Sicherheitsfaktor (1,5 zu wählen).

Tabelle II

Werkstoffangaben für Zahnräder

Werkstoff	Bezeichnung	Zustand	σ_B kp/mm ²	σ_{bW} kp/mm ²	HB kp/mm ²	ρ_D kp/mm ²	σ_{achA} kp/mm ²	Bemerkung
Stahlguß	GS-52,1	geglüht	52	22	150	37	10	
	GS-60,1	„	60	23,5	175	54	12	
Maschinenbau- stähle (unlegiert)	St 42	geglüht	42—50	20—24	125	34	11	
	St 50	„	50—60	23—28	150	40	13	
	St 60	„	60—70	28—33	180	45	15	
	St 70	„	70—85	33—40	208	52	17	
Vergütungsstähle	C 45	vergütet	65—80	30—34	185	54	16	durch Weichnitrie- ren ist eine Er- höhung der Flan- kenfestigkeit zu erreichen
	C 60	„	70—80	34—41	210	61	18	
	37MnSi5	„	70—80	36—42	220	65	21	
	37MnSi5	„	80—95	38—46	260	71	22	
	34Cr4	„	75—90	36—44	260	76	21	
	42CrMo4	„	95—110	46—54	340	76	22	
	35NiCr18	„	100—160	40—70	400	112	23	
Einsatzstähle	C10	gehärtet	42—52	25	590	166	14	
	C15	„	50—65	27	637	176	15	
	16MnCr5	„	80—110	50	650	182	30	
	15CrNi6	„	90—120		650	182	31	
	20MnCr5	„	100—130	55	650	182	33	
	18CrNi8	„	120—145		650	182	33	
Flammen- oder induktionsge- härteter Stahl	Ck45	gehärtet	65—80		595	167	22*	*nur gültig bei kon- turengetreuer Härtung
	37MnSi5	„	90—105	47	560	158	24*	
	53MnSi4	„	90—110		615	171	25*	
	41Cr4	„	90—110	50	587	165	25*	
Zyanbadgehärte- ter Stahl	41Cr4	gehärtet	140—180		595	167	22	
	37MnSi5	„	150—190	50	550	155	25	
Grauguß	GG18	—	18	9	170	24	3	
	GG26	—	26	12	210	32	4	
Sphärolitguß	ferritisch perlitisch		60	24—30	170	31	17	
			70—75	28—37	250	43	17	

Gewaltbruch

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_B}{S_B} \quad (4c)$$

σ_B [kp/cm²] = Bruchfestigkeit
 S_B — = Sicherheitsfaktor (mit 2 anzusetzen).

Die Getriebe werden hiernach grundsätzlich auf Dauerfestigkeit berechnet.

Wie bereits unter den Betriebsfaktoren ausgeführt, muß bei auftretenden einzelnen Stößen auf Gewaltbruch nachgerechnet werden, wobei die zulässige Zahnfußfestigkeit auf die Bruchfestigkeit des Werkstoffes bezogen werden kann.

5. Walzenpressung**5.1 Hertzsche-Pressung**

5.11 *Walzenpressung im Wälzpunkt.* Der Bestimmung der Walzenpressung wird die Hertzsche-Pressung zugrundegelegt. Die Berechnung müßte grundsätzlich im inneren Einzeleingriffspunkt des Ritzels — Punkt *B* — durchgeführt werden (siehe Bild 3), da im inneren Einzeleingriffspunkt die gesamte Zahnkraft wirksam, der relative Krümmungsradius jedoch kleiner als im Wälzpunkt ist. Ist die Ritzelzähnezahl größer als 20, bleibt die Abweichung der Walzenpressung im inneren Einzeleingriff von jener im Wälzpunkt gering. In der Norm wird deshalb die Bestimmung der Walzenpressung für Ritzelzähnezahlen über 20 grundsätzlich im Wälzpunkt durchgeführt [siehe Formel (5)].

$$p^2 = 0,35 \frac{P_N \cdot E}{2 \cdot b \cdot \rho} \quad (5a)$$

$$p_c = \sqrt{\frac{0,35}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)}} \cdot \sqrt{\frac{\cos \beta g}{\text{tg } \alpha_{sb} \cdot \cos^2 \alpha_{s0}}}$$

$$p_c = \underbrace{\quad}_{y_w} \cdot \underbrace{\quad}_{y_c}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{b}{l_{\min} \cdot \cos \beta g}} \cdot \sqrt{\frac{P_{u0}}{b \cdot d_{01}} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (5b)$$

$$\cdot \underbrace{\quad}_{y_\beta} \cdot \sqrt{\frac{P_{u0}}{b \cdot d_{01}} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (5c)$$

p	[kp/cm ²]	= Hertzsche Pressung
p_c	[kp/cm ²]	= Walzenpressung im Wälzpunkt
P_N	[kp]	= Normalkraft auf die Zahnflanke
P_{u0}	[kp]	= Umfangskraft im Teilkreis
E	[kp/cm ²]	= rechnerischer Elastizitätsmodul
$E_1; E_2$	[kp/cm ²]	= Elastizitätsmodul der Radwerkstoffe
$\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\text{cm}} \right)$		= relative Krümmung
b	[cm]	= Zahnbreite
d_{01}	[cm]	= Teilkreisdurchmesser des Ritzels
$u = \frac{z_2}{z_1}$	—	= Zähnezahlnverhältnis
l_{\min}	[cm]	= minimale Berührungslänge
β_g	[°]	= Schrägungswinkel im Grundkreis
α_{sb}	[°]	= Betriebseingriffswinkel im Stirnschnitt
α_{s0}	[°]	= Eingriffswinkel im Stirnschnitt
y_w	—	= Werkstofffaktor
y_c	—	= Wälzpunktfaktor
y_β	—	= Zahnlängenfaktor = $f \left(\frac{\text{Profilüberdeckung}}{\text{Sprungüberdeckung}} \right)$.

Die allgemeine Hertzsche Formel wurde für die Berechnung im Wälzpunkt angewandt, wobei diese auf die Umfangskraft im Teilkreis P_{u0} bezogen ist.

Es ergibt sich damit ein verhältnismäßig komplizierter Formelaufbau, der jedoch durch die Zusammenfassung verschiedener Werte in Berechnungsfaktoren weitgehend vereinfacht wird. Bei schrägverzahnten Stirnrädern muß in die Berechnung die minimale Länge der Berührungslinie eingeführt werden.

In Tabelle III sind die Werkstofffaktoren y_w für Räder aus Stahl und Gußeisen zusammengefaßt.

Der Wälzpunktfaktor y_c kann dem Diagramm in Bild 8 in Abhängigkeit von der Zähnesumme und der Profilverschiebungssumme für Geradverzahnung ($\beta_0 = 0$) und für Schrägverzahnung y_c entnommen werden. Die Anwendung des Diagramms ist an Hand eines Beispiels gezeigt. Für unkorrigierte Verzahnungen sind die Werte in Abhängigkeit von β_0 direkt an der Abszisse abzugreifen, d.h. sie sind unabhängig von der Zähnezahlsomme.

Die minimale Länge der Berührungslinie wird im Zahnlängenfaktor y_β erfaßt, der in Funktion der Profilüberdeckung ε und der Sprungüberdeckung ε_{Sp} dem Diagramm in Bild 9 entnommen werden kann.

Bei Geradverzahnung ist $y_\beta = 1$; hier sei bemerkt, daß für ganzzahlige Sprungüberdeckung y_β für bestimmte ε -Werte konstant bleibt.

5.12 *Walzenpressung im inneren Einzeleingriffspunkt des Ritzels.* Für Ritzelzähnezahlen unter 20 ist die Berechnung auf Walzenpressung nach der Norm

Tabelle III
Werkstofffaktor y_W

Werkstoff-Paarung				Elastizit.-Mod.		Werkstofffaktor y_{te} $\sqrt{0,35 \frac{2 E_1 E_2}{E_1 + E_2}}$ $\left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$
Ritzel		Rad		in $10^6 \left[\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$		
Bezeichnung	Kurzzeichen	Bezeichnung	Kurzzeichen	Ritzel	Rad	
Stahl	St	Stahl	St	2,10	2,10	857
Stahl	St	Stahlguß	GS-60	2,10	2,05	852
Stahl	St	Stahlguß	GS-52	2,10	2,05	852
Stahl	St	Sphäroguß	GG-50	2,10	1,76	818
Stahl	St	Sphäroguß	GG-40	2,10	1,75	818
Stahl	St	Bronze geg.	GBz-14	2,10	1,05	700
Stahl	St	Bz geschm.	—	2,10	1,15	720
Stahl	St	Grauguß	GG-26	2,10	1,28	745
Stahl	St	Grauguß	GG-22	2,10	1,20	731
Stahlguß	GS-60	Stahlguß	GS-52	2,05	2,05	845
Stahlguß	GS-60	Sphäroguß	GG-50	2,05	1,76	815
Stahlguß	GS-60	Grauguß	GG-22	2,05	1,20	726
Sphäroguß	GG-50	Sphäroguß	GG-40	1,76	1,75	785
Sphäroguß	GG-50	Grauguß	GG-22	1,76	1,20	706
Grauguß	GG-26	Grauguß	GG-22	1,28	1,20	660
Grauguß	GG-22	Grauguß	GG-22	1,20	1,20	648

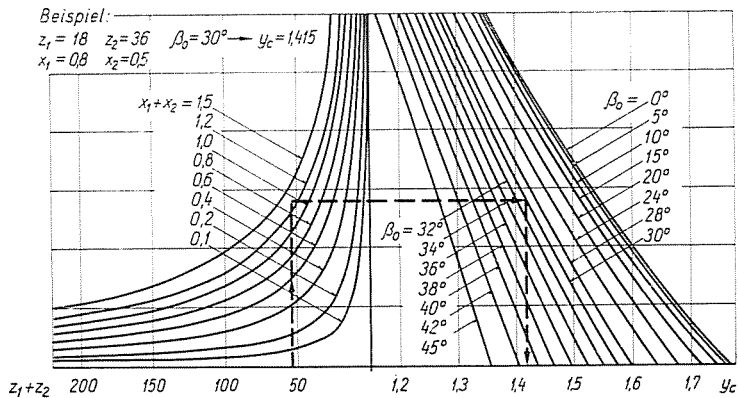


Bild 8

im inneren Einzeleingriffspunkt des Ritzels durchzuführen. Zur Vereinfachung der Rechnung kann die Walzenpressung im Wälzpunkt mit Hilfe des Einzeleingriffsfaktors y_B , auf die Walzenpressung im inneren Einzeleingriffspunkt

des Ritzels umgerechnet werden [siehe Formel (6)].

$$p_B = y_B \cdot p_C \tag{6}$$

- p_B [kg/cm²] = Walzenpressung im inneren Einzeleingriffspunkt des Ritzels
- p_C [kg/cm²] = Walzenpressung im Wälzpunkt
- y_B — = Einzeleingriffsfaktor

$$y_B = f\left(\frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon'_1 - 1}; u\right)$$

- $\varepsilon'_a; \varepsilon'_1$ — = Teilüberdeckungen
- $u = \frac{z_2}{z_1}$ — = Zähnezahlverhältnis

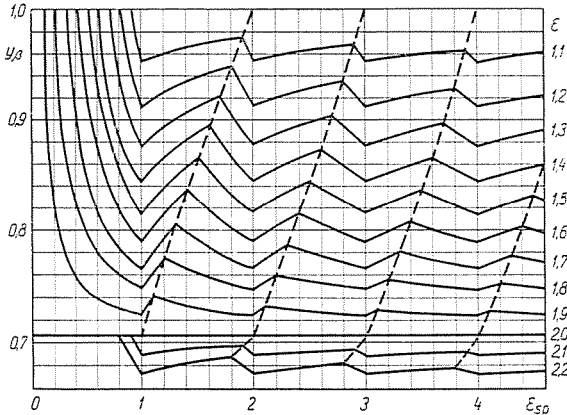


Bild 9

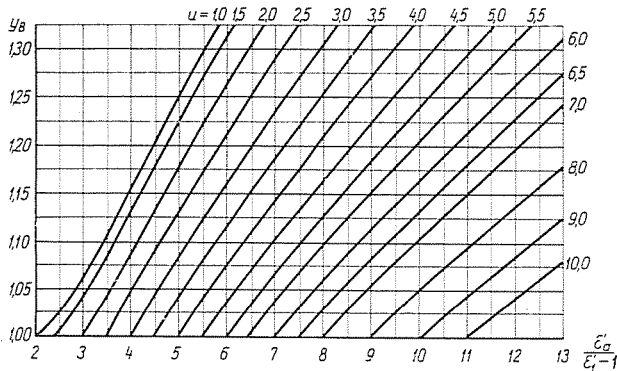


Bild 10

Der Einzeleingriffsfaktor y_B ist im Diagramm gemäß Bild 10 als Funktion der Teilprofilüberdeckungsgrade und des Zähnezahlnverhältnisses dargestellt. Die Teilüberdeckungsgrade sind dem Bild 6 zu entnehmen.

5.13 *Walzenpressung im Kopfeingriffspunkt des Rades.* Bei sehr kleiner Ritzelzähnezahl ist es möglich, daß die Walzenpressung im Kopfeingriffspunkt des Rades größer wird als die Walzenpressung im inneren Einzeleingriffspunkt, obzwar für den Kopfeingriffspunkt des Rades nur etwa die halbe Umfangskraft als Belastung anzusetzen ist. Für diese Fälle ist nach der Norm die Wal-

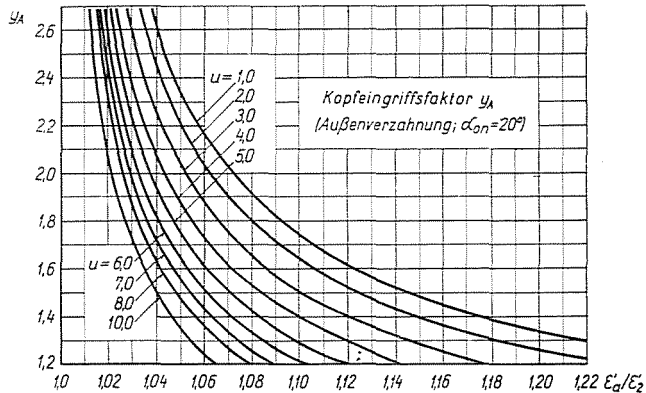


Bild 11

zenpressung im Kopfeingriffspunkt des Rades zu überprüfen. Mit Hilfe des Kopfeingriffsfaktors y_A (Bild 11) wird die Walzenpressung im Wälzpunkt, auf die Walzenpressung im Kopfeingriffspunkt des Rades bezogen, auf die gesamte Umfangskraft umgerechnet [siehe Formel (7)]. Die tatsächlich im Kopfeingriffspunkt auftretende Zahnkraft wird durch die zul. Werte $p_{A\text{zul}}$ erfaßt.

$$p_A = y_A \cdot p_C \quad (7)$$

p_A [kg/cm²] = Walzenpressung im Kopfeingriffspunkt des Rades
 p_C [kg/cm²] = Walzenpressung im Wälzpunkt
 y_A — = Kopfeingriffsfaktor

$$y_A = f\left(\frac{\varepsilon'_a}{\varepsilon'_2}; u\right).$$

$\varepsilon'_a; \varepsilon'_1$ — = Teilüberdeckung
 $u = \frac{z_2}{z_1}$ — = Zähnezahlnverhältnis.

5.2 Entwurfsberechnung

Für die Entwurfsberechnung wird die Formel zur Nachrechnung der Walzenpressung im Wälzpunkt umgestellt, und zwar wird zweckmäßig der Achsabstand des Getriebes vorausberechnet [siehe Formel (8)]. Der Teilkreisabstandsfaktor ist dabei in Abhängigkeit von der Summe der Profilver-

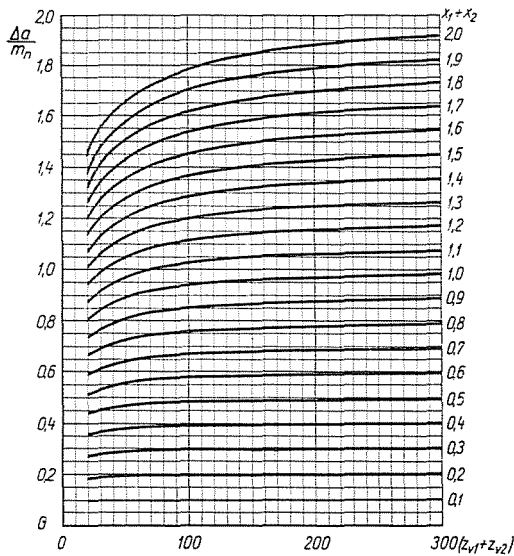


Bild 12

schiebungsfaktoren dem Diagramm in Bild 12 zu entnehmen.

$$a_0 = (u + 1) \sqrt[3]{\frac{y_w^2 \cdot y_c^2 \cdot y_\beta^2 \cdot M_{i1}}{4 \left(\frac{b}{d_{01}}\right) \cdot p_{zul}^2} \cdot \frac{u + 1}{u}} \quad (8a)$$

$$a = a_0 + \left(\frac{\Delta a}{m_n}\right) \quad (8b)$$

- a [cm] = Achsabstand
 a_0 [cm] = Summe der Teilkreisradien
 M_{i1} [kpcm] = Tatsächliches Ritzeldrehmoment
 $\left(\frac{b}{d_{01}}\right)$ — = Zahnbreitenverhältnis
 $u = \frac{z_2}{z_1}$ — = Zähnezahlverhältnis
 y_w — = Werkstofffaktor

y_C	—	= Wälzpunktfaktor
y_β	—	= Zahnlängenfaktor
p_{zul}	[kp/cm ²]	= zulässige Walzenpressung
$\left(\frac{d_a}{m_n}\right)$	—	= Teilkreisabstandsfaktor

Da die Zähnezahzahl zuvor gewählt wurde, kann aus dem Achsabstand der Modul direkt errechnet und normgerecht festgelegt werden.

5.3 Zulässige Walzenpressung

Wie bei der Zahnfuß-Biegespannung kann z. Z. die zul. Walzenpressung p_{zul} nur in der TGL-Empfehlung erfaßt werden.

An Hand von Formel (9) können die p_{zul} -Werte für die verschiedenen Kraftangriffspunkte bestimmt werden.

Walzenpressung im Wälzpunkt	$p_C \leq p_{zul}$
Walzenpressung im inneren Einzeleingriffspunkt des Ritzels	$p_B \leq 1,1 \cdot p_{zul}$
Walzenpressung im Kopfeingriffspunkt des Rades	$p_A \leq 1,5 \cdot p_{zul}$

$$p_{zul} = \frac{p_D}{S_D} \quad (9)$$

p_{zul}	[kg/cm ²]	= zulässige Walzenpressung
p_D	[kg/cm ²]	= aus Versuchen ermittelte Dauerfestigkeit der Zahnflanken
S_D	—	= Sicherheitsfaktor (mit 1,5 anzusetzen).

Tabelle II enthält für einige Zahnradwerkstoffe die aus Versuchen ermittelte Dauerfestigkeit der Zahnflanken.

6. Gesamtaufbau der Rechnung

Für die Berechnung der Tragfähigkeit einer Zahnradtriebstufe ist auf einer Seite der DIN A 4 der Gesamtaufbau der Rechnung zusammengefaßt. Die Berechnung wird dadurch wesentlich vereinfacht, daß in den freien Raum jeweils nur die Zahlenwerte eingesetzt zu werden brauchen. Dieses Berechnungsschema hat sich bei uns schon vielfach bewährt.

Für die Entwurfsberechnung ist der notwendige Berechnungsgang ebenfalls auf einer Seite der DIN A 4 zusammengefaßt. Sie erweist sich nur dann als notwendig, wenn der Konstrukteur auf dem Zahnradtriebesektor wenig praktische Erfahrung besitzt.

7. Schlußbemerkungen

Die Anwendung eines einheitlichen Verfahrens für die Berechnung der Zahnradtragfähigkeit wird zum besseren Erfahrungsaustausch über die Belastbarkeit von Zahnradern und damit zur Festigung der Angaben über die zulässigen Dauerfestigkeitswerte von Zahnradwerkstoffen wesentlich beitragen. Damit können viele Schadensfälle vermieden werden.

Zusammenfassung

Dem Konstrukteur steht eine Vielzahl von Methoden zur Berechnung von Zahnradern zur Verfügung. Es liegt aber nahe, ein einheitliches Berechnungsverfahren zu erarbeiten. Das Institut für Maschinenelemente an der Technischen Universität Dresden hat einen Vorschlag ausgearbeitet, der vom ISO-Komitee TC 60, Arbeitsgruppe 6 zur Diskussion gestellt wurde. Die verschiedenen Getriebeschäden, u. zw. Zahnbruch, Grübchenbildung, Fressen, Zahnfußfestigkeit, sind unter Angabe von Berechnungsformeln und Tabellen behandelt. Die einheitliche Tragfähigkeitsberechnung ermöglicht die Vermeidung vieler Schadensfälle.

Dr. Ing. habil. Gustav NEUGEBAUER, Dresden A 34 Beruh. Wensch
Str. 15. D.D.R.