

# EIN VERFAHREN ZUR GENAUEREN BESTIMMUNG DER ISOCHROMATEN-ORDNUNGSZAHLEN AN ANGRIFFSTELLEN ÄUSSERER LASTEN

Von

F. THAMM

Lehrstuhl für Technische Mechanik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 28. November, 1963)

Vorgelegt von Prof. Dr. Gy. Kozmann

Die spannungsoptische Untersuchung ergibt — wie bekannt — die Differenz zwischen den beiden Hauptspannungen des ebenen Spannungszustandes sowie die Hauptspannungsrichtungen (siehe z. B. [1], [2], [3]). Zur vollständigen Beschreibung eines ebenen Spannungszustandes bedarf es aber noch einer weiteren Angabe, die nach einer anderen Rechen- oder Meßmethode zu bestimmen ist. Die diesbezüglichen Rechenmethoden fußen auf den Gleichgewichtsbedingungen des Elementarwürfels und integrieren die so resultierenden Differentialgleichungen schrittweise entlang einer im spannungsoptischen Modell angegebenen Linie, ausgehend vom Rand des Modells, oder es werden die durch die Spannungskomponenten ausgedrückten Verträglichkeitsbedingungen des ebenen Spannungszustandes numerisch integriert [2], [4], [5]. Die Ausgangswerte der Integration erhält man aus den Isochromatenwerten am Modellrand. An den durch äußere Kräfte nicht belasteten Abschnitten des Modellrandes ist nämlich der Spannungszustand immer einachsig, die dort beobachtete Isochromaten-Ordnungszahl ergibt also unmittelbar die dort auftretende einzige von Null verschiedene Hauptspannung. An Lastangriffstellen kann die auf den Rand des Modells normale Spannungskomponente aus Größe und Verteilung der angreifenden Last mit einer für die weitere Untersuchung ausreichenden Genauigkeit bestimmt werden [5], wodurch bei Kenntnis des dort beobachteten Isochromatenwertes die Bestimmung der beiden Hauptspannungen an dieser Stelle möglich wird.

Bei starker Belastung, die auf eine kurze Strecke des Modellrandes verteilt ist (»konzentrierte« Belastung) verursacht es jedoch Schwierigkeiten, den genauen Wert der Isochromatenordnung in der Umgebung der Auflagerfläche der Belastung zu ermitteln. Die Gründe dafür sind:

a) An solchen Stellen tritt ein hoher Spannungsgradient auf, wodurch auf dem spannungsoptischen Bild dicht aneinander gereihete schmale Isochromaten erscheinen. Erfolgt die Auswertung aus der Photographie des Isochromatenbildes, so erscheinen die Isochromaten wegen des starken Lichthofes der zwischen ihnen liegenden hellen Streifen stark verblaßt. Es kann sogar vorkommen, daß der Lichthof die Isochromaten ganz verdeckt.

b) Der Spannungszustand ist wegen der endlichen Modellbreite und des großen Spannungsgradienten nicht eben. Auch kann die gleichmäßige Verteilung des Kraftangriffes über die Modellbreite nicht immer ausreichend gewährleistet werden.

c) Erfolgt die Beleuchtung nicht genau senkrecht auf die Modellfläche, was sich bei Durchleuchtung im einfachen spannungsoptischen Gerät nicht immer vermeiden läßt, dann entstehen an der Stelle großer Spannungsgradienten Abbildungsfehler, die das Isochromatenbild verfälschen [8].

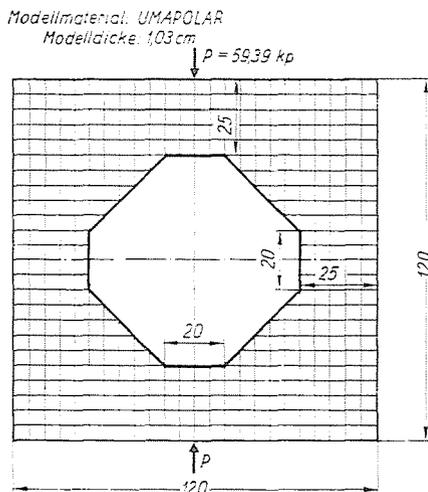


Abb. 1. Die Maßskizze des untersuchten Modells

Der bei der Ermittlung des Isochromatenwertes begangene Ablesefehler verfälscht die Resultate der nachfolgenden Rechnungen nicht nur an der untersuchten Stelle, vielmehr wirkt er sich, mehr oder weniger abgeschwächt, auch auf größere Teile der Modellfläche aus.

Aus diesem Grunde ist die Ermittlung des Isochromatenwertes an Stellen »konzentrierter« Kraftangriffe durch Abzählen und Ausmessen der Isochromaten aus den aufgenommenen Bildern und durch Extrapolation der Isochromatenwerte bis an einen bestimmten Punkt der Kraftangriffsfläche nicht verlässlich.

Zur Vermeidung der Unsicherheiten der Ablesung wurden vom Verfasser am Lehrstuhl für Technische Mechanik der Technischen Universität Budapest Untersuchungen angestellt, über die im folgenden an Hand eines Beispiels berichtet werden soll.

Die Untersuchungen wurden an dem in Abb. 1 gezeigten symmetrischen geschlossenen Rahmen durchgeführt. Das Isochromatenbild, zwischen gekreuzten Polarisatoren aufgenommen, ist aus Abb. 2 ersichtlich. Mit Hilfe der

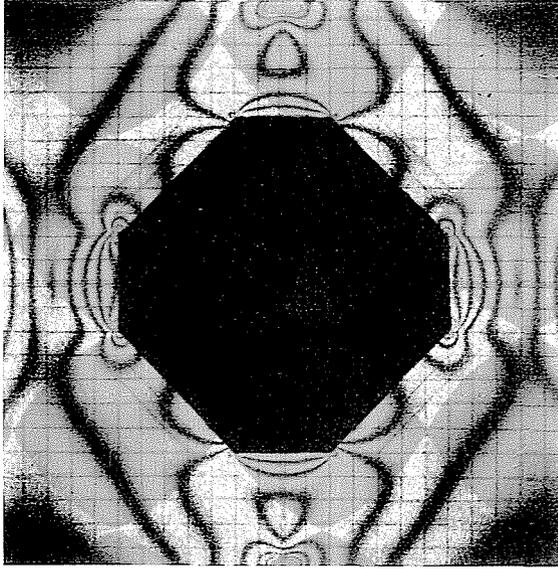


Abb. 2. Das Isochromatenbild des Modells in gekreuzter Polarisatorstellung

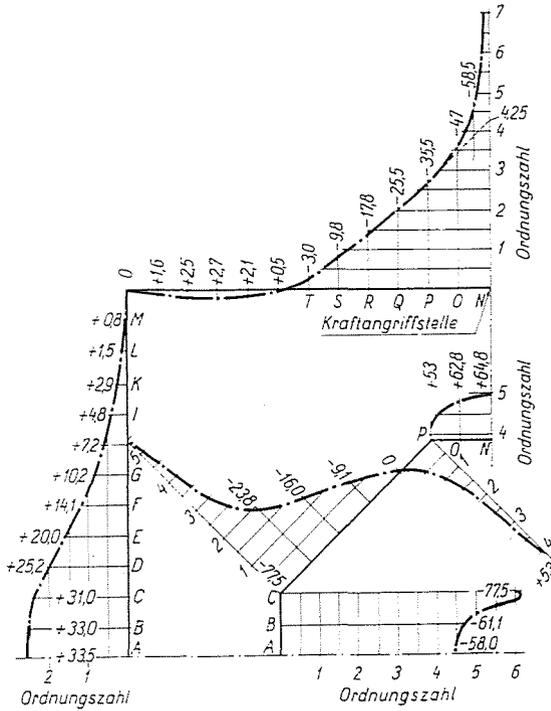


Abb. 3. Die Spannungen am Umfang des Modells, in  $\text{kp}/\text{cm}^2$ , berechnet auf Grund der Isochromatenwerte und der spannungsoptischen Konstante des Modellmaterials

spannungsoptischen Konstante des Modellmaterials wurden die Spannungen am Modellrand errechnet und unter Berücksichtigung des Vorzeichens in Abb. 3 zusammengefaßt. Die spannungsoptischen Untersuchungen wurden auf einem am Lehrstuhl selbst hergestellten einfachen spannungsoptischen Gerät durchgeführt. Die Durchleuchtung erfolgte in rotem Licht ( $\lambda = 6500 \text{ \AA}$ ).

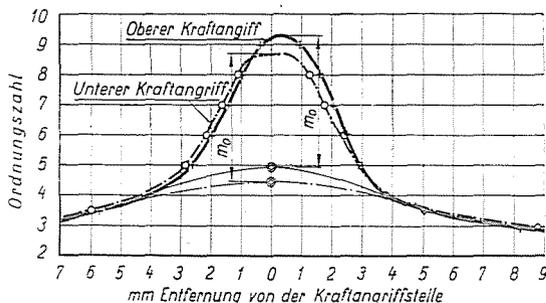


Abb. 4. Die Änderung der Isochromatenordnung am Umfang des Modells in der Nähe des Kraftangriffes

Bei dieser Wellenlänge war die spannungsoptische Konstante des Modellmaterials  $S = 13,39 \left[ \frac{\text{kp/cm}^2}{\text{Ordnung/cm}} \right]$ .

Wegen der Symmetrie des Modells wurde in Abb. 3 nur ein Viertel der Modellfläche abgebildet. Die Änderung des Isochromatenwertes in der

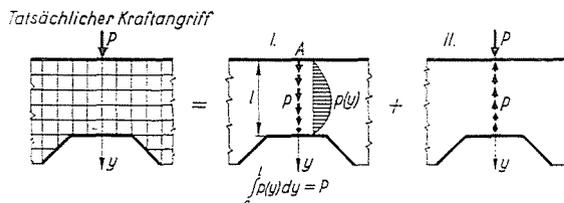


Abb. 5. Aufteilung des Spannungszustandes in zwei Teil-Spannungszustände

Umgebung der oberen und der unteren Kraftangriffstelle wurde in Abb. 4 in größerem Maßstab noch einmal abgebildet. Das starke Anwachsen des Isochromatenwertes in der Nähe des Kraftangriffes ist gut zu erkennen.

Es soll nun im folgenden untersucht werden, ob dieser steile Anstieg der Isochromatenordnung tatsächlich auftritt oder nur die Folge eines Abbildungsfehlers ist. Zu diesem Zweck kann der untersuchte Spannungszustand in die zwei in Abb. 5 sichtbaren Teil-Spannungszustände aufgeteilt werden. Der mit I bezeichnete Spannungszustand entsteht, wenn die Resultierende  $P$  der angreifenden Kraft, auf das Modell längs des Querschnittes unter der Kraftangriffstelle verteilt, übertragen wird, während der Spannungszustand II

durch die an ihrer tatsächlichen Angriffstelle wirkende Kraft  $P$  und eine verteilte Belastung erzeugt wird; diese letztere ist der Belastung des Spannungszustandes I der Größe nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. In genügender Entfernung von der tatsächlichen Kraftangriffstelle ist der Spannungszustand I wegen des De Saint Vénantschen Prinzips praktisch identisch mit dem tatsächlichen Spannungszustand, zeigt aber an Stelle des Kraftangriffes  $A$  keine Spannungsspitze. Diese kann nur von der Belastung

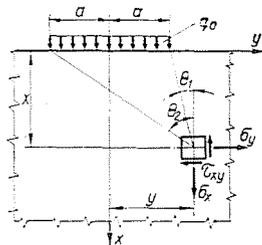


Abb. 6. Über die Länge  $2a$  gleichmäßig verteilte Belastung auf einer unendlichen Halbebene

des Spannungszustandes II erzeugt werden, weshalb im folgenden dieser letztere untersucht werden soll.

In der Umgebung der tatsächlichen Kraftangriffstelle kann die verteilte Belastung  $p$  gegenüber der im folgenden näher zu untersuchenden tatsächlich auftretenden  $q_0$  bzw.  $q_{\max} = \frac{\pi F}{a}$  großen Belastung vernachlässigt werden.

Der II. Spannungszustand kann deshalb in der unmittelbaren Umgebung der Kraftangriffstelle mit guter Annäherung als Kraftangriff auf eine unendliche Halbebene angesehen werden.

Da der durch diese Belastung in der unendlichen Halbebene verursachte Spannungszustand bekannt und analytisch in geschlossener Form darstellbar ist, wurde dieser für zwei Arten der Kraftverteilung ausgewertet.

### 1. Gleichmäßige Kraftverteilung über die Länge $2a$ von der Größe

$$q_0 = \frac{P}{2a}.$$

Die Gleichungen der Spannungsverteilung findet man z. B. bei FROCHT [2] Band II, Seite 60.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 6 schreiben sich die Spannungskomponenten zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q_0}{2\pi t} [2(\Theta_2 - \Theta_1) + (\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1)] \\ \sigma_y &= -\frac{q_0}{2\pi t} [2(\Theta_2 - \Theta_1) - (\sin 2\Theta_2 - \sin 2\Theta_1)] \\ \tau_{xy} &= -\frac{q_0}{2\pi t} [\cos 2\Theta_1 - \cos 2\Theta_2]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hier bedeutet  $t$  die Dicke der Ebene. Mit den der Abb. 6 zu entnehmenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin \Theta_1 &= \frac{y-a}{\sqrt{(y-a)^2 + x^2}}; \quad \cos \Theta_1 = \frac{x}{\sqrt{(y-a)^2 + x^2}}; \quad \Theta_1 = \arctg \frac{y-a}{x} \\ \sin \Theta_2 &= \frac{y+a}{\sqrt{(y+a)^2 + x^2}}; \quad \cos \Theta_2 = \frac{x}{\sqrt{(y+a)^2 + x^2}}; \quad \Theta_2 = \arctg \frac{y+a}{x} \end{aligned}$$

ergeben sich nach einiger Umformung für die Summe bzw. Differenz der Hauptspannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_{II} = \sigma_x + \sigma_y &= -\frac{2q_0}{\pi t} (\Theta_2 - \Theta_1) = \\ &= -\frac{2q_0}{\pi t} \left[ \arctg \frac{y+a}{x} - \arctg \frac{y-a}{x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_{II} &= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{q_0}{\pi t} \cdot \frac{4ax}{\sqrt{(y^2 - a^2)^2 + 2x^2(y^2 + a^2) + x^4}}. \end{aligned} \quad (3)$$

In der Symmetrieebene (d. h. bei  $y = 0$ ) hat man hieraus mit den Bezeichnungen

$\sigma_0 = \frac{4q_0}{\pi t}$  und  $\lambda_0 = \frac{x}{a}$  die Formeln

$$\sigma_1 + \sigma_{II} = -\sigma_0 \arctg \frac{1}{\lambda_0}, \quad (2a)$$

$$\sigma_1 - \sigma_{II} = \sigma_0 \frac{\lambda_0}{1 + \lambda_0^2}. \quad (3a)$$

In obigen Gleichungen, wie auch in den folgenden Ausführungen soll die algebraisch größere der beiden in der Modellebene wirkenden Hauptspannungen

mit  $\sigma_I$ , die kleinere mit  $\sigma_{II}$  bezeichnet werden. Von der üblichen Bezeichnung der Hauptspannungen ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) wurde deshalb Abstand genommen, weil je nach den Vorzeichen der Hauptspannungen und infolge der dritten, auf die Modellfläche normalen Hauptspannung von der Größe 0  $\sigma_1$  sowohl  $\sigma_1$  wie  $\sigma_2$  und  $\sigma_{II}$  sowohl  $\sigma_2$  wie  $\sigma_3$  sein kann.

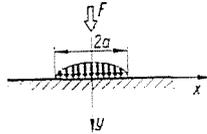


Abb. 7. Durch eine zylindrische Rolle auf eine unendliche Halbebene übertragene Belastung

2. Die in der unendlichen Halbebene infolge Krafteinleitung durch eine zylindrische Rolle verursachte Spannungsverteilung

Die Lösung dieses Problems findet sich in den Aufsätzen von HUBER-FUCHS [6] und PORITSKY [7]. Der an der Berührungsfäche auftretende Flächendruck zeigt eine Verteilung entlang einer Halbellipse, wie aus Abb. 7 ersichtlich. Mit den Bezeichnungen der Abb. 7 schreiben sich die von PORITSKY angegebenen Spannungskomponenten zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2F}{\pi a} I \left[ \frac{\frac{x}{a} e^{-\zeta} - e^{-2\zeta}}{\text{sh} \zeta} \right] \\ \sigma_y &= \frac{2F}{\pi a} I \left[ \frac{1 - \frac{x}{a} e^{-\zeta}}{\text{sh} \zeta} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{2F}{\pi a} R \left[ \frac{e^{-\zeta} \left( \frac{x}{a} - \text{ch} \zeta \right)}{\text{sh} \zeta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Hierin bedeutet  $F = \frac{P}{t}$  die auf die Dickeneinheit der Platte entfallende Kraft

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi + i\eta \quad \text{wobei} \quad x = a \cdot \text{ch} \xi \cos \eta^* \\ & \quad y = a \cdot \text{sh} \xi \sin \eta \\ & \quad i = \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

\* Im vorliegenden Aufsatz wurden die Bezeichnungen aus den Schriftumsquellen [2] und [7] unverändert beibehalten. Um Mißverständnisse zu vermeiden, muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß die normal auf den Rand der Halbebene verlaufende Koordinatenrichtung in [2] mit  $x$  und in [7] mit  $y$  bezeichnet ist. Diese Unstimmigkeit wurde vom Verfasser durch Einführung der dimensionslosen Größe  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 = \frac{x}{a}$  in Gl. (2a) bzw. 3a und  $\lambda_0 = \frac{y}{a}$  in Gl. (7a) bzw. (8a)) zu beheben versucht.

Die Bezeichnung I soll angeben, daß nur der imaginäre Teil des folgenden Ausdrucks benötigt wird, während R bedeutet, daß nur der Realteil des nachfolgenden Ausdrucks zu verwenden ist. Um diese Ausdrücke in eine direkt brauchbare Form zu bringen, müssen Real- und Imaginärteil obiger Ausdrücke getrennt und die Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  mit  $x$  und  $y$  ausgedrückt werden.

Nach Durchführung der angedeuteten Rechnungen ergeben sich für die Spannungskomponenten folgende Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2F}{\pi a} e^{-\zeta} \left[ \frac{-\frac{x}{a} e^{\zeta} \frac{\sin 2\eta}{2} + e^{-\zeta} (\sin 2\eta \cos \eta \operatorname{sh} \xi + \cos 2\eta \sin \eta \operatorname{ch} \xi)}{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} \right] \\ \sigma_y &= \frac{2F}{\pi a} \cdot \frac{\frac{x}{2a} \sin 2\eta - \operatorname{ch} \xi \sin \eta}{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} \\ \tau_{xy} &= \frac{2F}{\pi a} e^{-\zeta} \left[ \frac{\frac{x}{a} (\operatorname{sh} \xi - e^{-\zeta} \sin^2 \eta) - \cos \eta (\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi + e^{-\zeta} \sin^2 \eta)}{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Auf Grund der weiter oben aufgeschriebenen Zusammenhänge wird für  $x$  und  $y$

$$\operatorname{sh}^2 \xi = \frac{x^2 + y^2 - a^2 \pm \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^2 + 4a^2 y^2}}{2a^2}$$

$$\sin^2 \eta = \frac{a^2 - x^2 - y^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2}}{2a^2},$$

in denen in beiden Fällen nur die positive Lösung einen physikalischen Sinn hat, da  $\operatorname{sh} \xi$  und  $\sin \eta$  real sein müssen.

An der Stelle  $x = 0$ , d. h. in der Symmetrieachse wird  $\operatorname{sh} \xi = \frac{y}{a}$  und  $\sin \eta = 1$ . Mit diesen wird nach den nötigen Zwischenrechnungen an der Stelle  $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2F}{\pi a} \left[ 2 \frac{y}{a} - \frac{1 + 2 \left( \frac{y}{a} \right)^2}{\sqrt{1 + \left( \frac{y}{a} \right)^2}} \right], \\ \sigma_y &= -\frac{2F}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{y}{a} \right)^2}}, \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Da  $\sigma_x \equiv \sigma_I$  und  $\sigma_y \equiv \sigma_{II}$ , wird weiter

$$\sigma_I + \sigma_{II} = \frac{4F}{\pi a} \left[ \frac{y}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} \right], \quad (7)$$

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \frac{4F}{\pi a} \left[ \frac{y}{a} - \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2}} \right]. \quad (8)$$

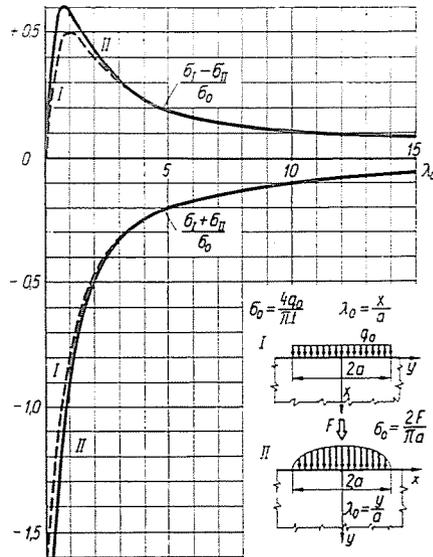


Abb. 8. Die Änderung des bezogenen Wertes der Hauptspannungsdifferenz und -summe längs der Symmetrieachse der Belastung

Nach Einführung der Bezeichnungen  $\sigma_0 = \frac{2F}{\pi a}$  und  $\lambda_0 = \frac{y}{a}$ , die gleichbedeutend mit den Bezeichnungen in den Gleichungen (2a) und (3a) sind, erhalten die Gl. (7) und (8) die Form

$$\sigma_I + \sigma_{II} = 2 \sigma_0 \left[ \lambda_0 - \sqrt{1 + \lambda_0^2} \right], \quad (7a)$$

$$\sigma_I - \sigma_{II} = 2 \sigma_0 \left[ \lambda_0 - \frac{\lambda_0^2}{\sqrt{1 + \lambda_0^2}} \right]. \quad (8a)$$

In Abb. 8 wurden die Funktionen  $\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{\sigma_0}$  auf Grund der Gleichungen (2a) und (7a) sowie die Funktionen  $\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{\sigma_0}$  gemäß den Gleichungen (3a) und

(8a) aufgetragen. Bemerkt sei hier, daß bei beiden Arten der Lastübertragung an der Stelle  $\lambda_0 = 0$ , d. h. in der Mitte der Belastungsfläche  $\sigma_I - \sigma_{II} = 0$  ist. Dies bedeutet, daß dort parallel zum Rand der Halbebene eine Spannungskomponente entsteht, die nach Größe und Vorzeichen der darauf senkrecht wirkenden Spannungskomponente gleich ist, die der angreifenden äußeren Kraft das Gleichgewicht hält. Der Spannungszustand ist also in der  $x - y$  Ebene in diesem Punkte isotrop, der Spannungszustand, der durch die tatsächliche Krafteinleitung in die unendliche Halbebene entsteht, läßt den Isochromatenwert in der Mitte der Auflagerfläche unbeeinflusst. Da auch

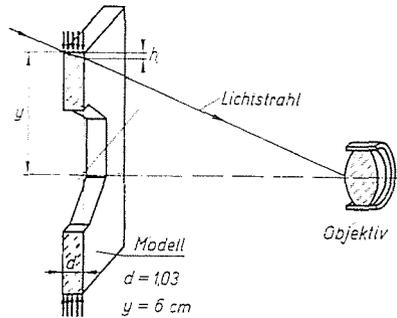


Abb. 9. Die Wirkung der schiefen Durchleuchtung auf den Strahlengang an der Kraftangriffstelle

der I. Spannungszustand der Abb. 5 an dieser Stelle keine örtliche Spannungsspitze erzeugt, darf der Isochromatenwert an dieser Stelle im Sinne obiger Ausführungen keine große Abweichung gegenüber den Isochromatenwerten an den der Kraftangriffstelle benachbarten Punkten des Modellrandes aufweisen.

Im Punkt  $A$  (Abb. 5) sollte daher die Isochromatenordnung der des I. Spannungszustandes entsprechen. Dies steht in offensichtlichem Gegensatz zu der laut Abb. 4 experimentell ermittelten Isochromatenverteilung. Es soll deshalb im folgenden untersucht werden, womit diese Abweichung erklärt werden kann.

Der Strahlengang im einfachen spannungsoptischen Gerät ist nicht parallel sondern konvergent, es entstehen also Bildfehler in allen Modellpunkten, die außerhalb der optischen Achse des abbildenden Systems (Photopararat) liegen. Um nun diese Bildfehler über der ganzen Modellfläche möglichst klein zu halten und außerdem eine möglichst gleichmäßig ausgeleuchtete Isochromaten-Aufnahme zu erhalten, wurde die optische Achse des Photopararates auf die Symmetrieachse des Modells eingestellt (Abb. 9). Infolgedessen wird ein abbildender Lichtstrahl, der am Rand des Modells eintritt, an der anderen Seite in einer Entfernung  $h$  vom Rand aus dem Modell austreten. Da aber die Hauptspannungsdifferenz  $\sigma_I - \sigma_{II}$  nach Abb. 8 im Quer-

schnitt unter der Kraftangriffstelle entlang der Symmetrieachse stark anwächst, passiert der Lichtstrahl beim Durchgang Stellen des Modells mit stark unterschiedlicher Hauptspannungsdifferenz.

Mit der quantitativen Untersuchung solcher Erscheinungen hat sich der Verfasser in einer früheren Arbeit [8] beschäftigt und für die am Modellrand auftretenden scheinbaren Isochromaten-Ordnungszahlen die Formel

$$m_0 = \frac{c}{\lambda} d \sqrt{1 + \left(\frac{h}{d}\right)^2} \cdot \frac{1}{h} \int_y^{y-h} (\sigma_I - \sigma_{II}) dy \quad (9)$$

abgeleitet, in der mit guter Annäherung

$$h = \frac{d \cdot y}{n \cdot f \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

gesetzt werden kann. Die Bedeutung von  $d$ ,  $h$ , und  $y$  ist aus Abb. 9 ersichtlich. Des weiteren ist

$\lambda$  = die Wellenlänge des Lichtes,

$C = \frac{\lambda}{S}$  die spannungsoptische Konstante,

$f = 13,5$  cm — die Brennweite des Aufnahmeobjektivs,

$n = 1,5$  — die Brechungszahl des spannungsoptischen Modellmaterials

$\beta = \frac{y_1}{y}$  — der Abbildungsmaßstab, worin  $y_1$  die Größe des auf dem

Negativ entstehenden Bildes von  $y$  ist.

Da  $y = 6$  cm und  $y_1 = 0,93$  cm, wird

$$\beta = \frac{0,93}{6} = 0,155.$$

Mit diesen Werten hat man

$$h = \frac{1,03 \cdot 6}{1,5 \cdot 13,5 \left(1 + \frac{1}{0,155}\right)} = 0,0409 \text{ cm.}$$

Mit der Funktion  $\sigma_I - \sigma_{II}$  aus Gl. (3a) ergibt sich aus (9) nach Integrierung

$$m_0 = \frac{c}{\lambda} d \sqrt{1 + \left(\frac{h}{d}\right)^2} \cdot \sigma_0 \frac{a}{2h} \cdot \ln \left[1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]. \quad (10)$$

Wird die Hauptspannungsdifferenz nach Gl. (8) in Gl. (9) eingesetzt und die Integration durchgeführt, wird

$$m_0 = \frac{c}{\lambda} d \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{h}{d}\right)^2} \cdot \sigma_0 \left[ \frac{h}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} + \frac{a}{h} \ln \left( \frac{h}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} \right) \right] \right] \quad (11)$$

Mit den Zahlenwerten und auf Grund der Tatsache, daß

$$\frac{c}{\lambda} d = \frac{d}{S} = \frac{1}{13} \left[ \frac{\text{Ordnung}}{\text{kp/cm}^2} \right] \text{ und } \sqrt{1 + \left(\frac{h}{d}\right)^2} = \sqrt{1,00158} \approx 1$$

ergibt sich aus Gl. (10)  $m_0 = 2,48$ . Ordnung

aus Gl. (11)  $m_0 = 4,26$ . Ordnung.

Die schiefe Durchleuchtung verzerrt zwar auch das Bild des I. Spannungszustandes, der durch die idealisierte Krafteinleitung in das tatsächliche Modell entsteht, doch kann die Abweichung von der tatsächlichen Isochromatenordnung wegen des kleinen Spannungsgradienten im untersuchten Modellpunkt vernachlässigt werden. Die Isochromatenordnung, die im untersuchten Modellpunkt bei streng paralleler Durchleuchtung erscheinen würde, ist also um  $m_0$  kleiner als die aus der Abbildung 2 ersichtliche.

Da die Kraftübertragung in das Modell durch zylindrische Auflagerflächen erfolgte, muß als wahrscheinlich gelten, daß Gl. (11) den richtigeren Wert für  $m_0$  ergibt. Dieser Wert wurde deshalb in Abb. 4 von den Werten der Isochromatenordnung abgezogen, womit sich die mit Kreisen bezeichneten Punkte ergaben. Die so erhaltenen Isochromatenwerte  $m = 4,75$  bzw.  $m = 5$  liegen dem Werte  $m = 4,25$  ziemlich nahe, der in Abb. 3 als Schnittpunkt der gestrichelten Linie des Spannungsverlaufs bei idealisierter Krafteinleitung mit der Symmetrieachse der Belastung erscheint.

\*

Auf Grund dieser Untersuchungen kann also festgestellt werden, daß das starke Anwachsen der Isochromaten-Ordnungszahlen am Rand des Modells im Bereiche konzentrierter äußerer Kräfte nur eine Folge der Abbildungsfehler des einfachen spannungsoptischen Gerätes ist und in Wirklichkeit nicht auftritt. Die in der Nähe des Kraftangriffes tatsächlich auftretenden Isochromaten hoher Ordnungszahlen sind geschlossene Kurven, die den Rand des Modells nicht berühren.

Die tatsächliche Isochromatenordnung in der Symmetrieebene des Kraftangriffes kann also mit guter Annäherung erhalten werden, wenn das Diagramm der Verteilung der Isochromatenordnungen am Modellrand beider-

seits des Kraftangriffes mit einem daran tangential sich anschließenden Parabelbogen verbunden werden (Abb. 10). Die Ordinate des Parabelbogens in der Symmetrieebene des Kraftangriffes ergibt die gesuchte Isochromatenordnung  $m_s$ . Da konzentrierte Belastung ein experimentell nicht zu verwirklichender Grenzwert, und jede als »konzentriert« bezeichnete Belastung tatsächlich auf

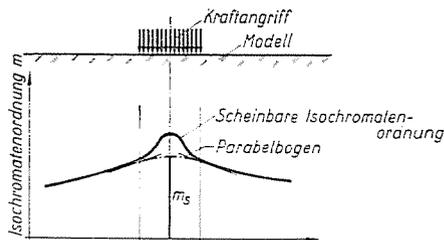


Abb. 10. Konstruktion der in der Symmetrieebene der Belastung auftretenden tatsächlichen Isochromatenordnung

einer kurzen Strecke verteilt ist, kann die Konstruktion der Abb. 10 sinngemäß für jede »konzentrierte« Belastung angewandt werden.

### Zusammenfassung

»Konzentrierter« Kraftangriff wird in spannungsoptischen Modellversuchen als über eine kurze Strecke verteilte, meist durch Walzendruck erzeugte Kraft verwirklicht. An Stellen derartiger Kraftangriffe steigt die Isochromaten-Ordnungszahl wegen starker Häufung der Isochromatenlinien scheinbar auch am Modellrand stark an, ihr genauer Wert läßt sich nur schwer ermitteln. Es wird gezeigt, daß das Anwachsen des Isochromatenwertes am Modellrand durch die Bildfehler des einfachen spannungsoptischen Gerätes bedingt ist. Tatsächlich ändert sich der Isochromatenwert am Modellrand in der Umgebung der Kraftangriffstelle kaum. Sein Anwachsen erfolgt erst innerhalb der Modellfläche.

### Schrifttum

1. MESMER, G.: Spannungsoptik, Springer, Berlin, 1939.
2. FROCHT, M. M.: Photoelasticity, John Wiley & Sons New York, 1941–48.
3. THAMM, F.: Az optikai feszültségvizsgálat alapjai (Die Grundlagen der Spannungsoptik). Mérés és Automatika, 2, 49–59 (1957).
4. ALBRECHT, R.: Das Schubspannungsdifferenz-Verfahren zur vollständigen Auswertung ebener Spannungszustände in der Spannungsoptik, Forschung, Bd. 19, Heft 1, 1953, S. 17–23.
5. THAMM, F.: Erfahrungen mit der Relaxationsmethode zur vollständigen Bestimmung des ebenen Spannungszustandes in der Spannungsoptik, Internationales spannungsoptisches Symposium, Akademie-Verlag Berlin, 1962.
6. HUBER—FUCHS: Spannungsverteilung bei der Berührung zweier elastischer Zylinder. Physikalische Zeitschrift, 1914, S. 298.
7. PORITSKY, H.: Stresses and Deflections of Cylindrical Bodies in Contact with Application to Contact of Gears and Locomotive Wheels, Journal of Applied Mechanics, 1950, S. 191–201.
8. THAMM, F.: Die Bildfehler des einfachen Polariskops. Periodica Polytechnica, Budapest, 1960, S. 19–40.

Dr. Fritz THAMM, Budapest., XI, Műgyetem rkp. 3. Ungarn.