

# BEITRAG ZUR FESTIGKEITSBESTIMMUNG VON BEHÄLTERWAGEN

Von

L. SZILÁGYI

Lehrstuhl für chemisches Maschinenwesen und landwirtschaftliche Industrien,  
Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 21. Januar 1964)

Vorgelegt von Dozent B. SZÁNTAY

Beim Bau von Behälterwagen für den Flüssigkeitstransport finden verbreitet Behälter mit elliptischem und korbkurvenförmigem Querschnitt Verwendung. Die in der Fachliteratur bisher auffindbaren Studien über die Festigkeitsbemessung derartigen Behälter [1, 2, 3, 4] beziehen sich ausschließlich auf Behälter mit elliptischem Querschnitt; sie wurden schon in einem unserer früheren Aufsätze [5] zusammengefaßt. Ihrer einfacheren Herstellung halber baut man überwiegend Behälter mit korbkurvenförmigem Querschnitt (siehe Abb. 1). Da zu ihrer Festigkeitsbemessung noch keine Methoden zur Verfügung stehen, schien es zweckmäßig, für die Berechnung ein — verhältnismäßig einfaches — Näherungsverfahren zu entwickeln. Das vorgeschlagene Berechnungsverfahren wurde anhand der für die Kreiszyinderschale abgeleiteten Gleichungen entwickelt und wird im folgenden ausführlich geschildert.

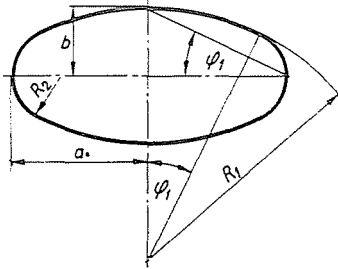


Abb. 1. Darstellung der Korbkurve

Unsere Untersuchungen wurden an einem durch konstanten Innendruck belasteten Rohr mit korbkurvenförmigen Querschnitt laut Abb. 1 durchgeführt. Man stelle sich das Rohr als an den Anschlußstellen der Schalen vom Halbmesser  $R_1$  und  $R_2$  durchschnitten vor und lasse die gleichgewichtssichernden Kräfte  $Q_0$ ,  $n_0$  sowie das Schnittmoment  $M_0$  wirken (siehe Abb. 2). Infolge der bestehenden Symmetrieverhältnisse genügt die Untersuchung eines Viertels des Rohrquerschnitts. Die durch die Innenkraft  $p$ , die Schnittkräfte  $Q_0$ ,  $n_0$  und das Schnittmoment  $M_0$  verursachte Beanspruchung kann auch auf die in

den Abb. 3 und 4 dargestellte Weise — durch Superponierung der Teilbelastungen — hervorgerufen werden.

Von den solcherart zerlegten Belastungen verursacht der in den Abb. 3a und 4a dargestellte Innendruck einen einfach berechenbaren Membranspannungszustand, während die Beanspruchung durch die Belastungen im Sinne

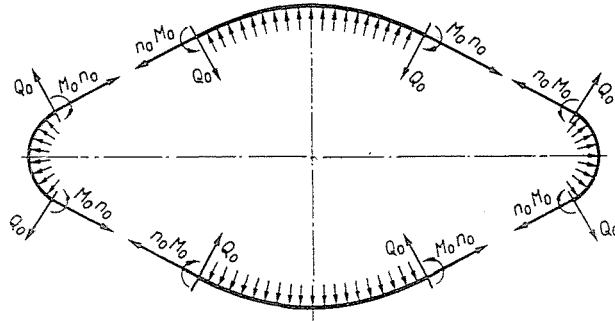


Abb. 2. Rechenschema

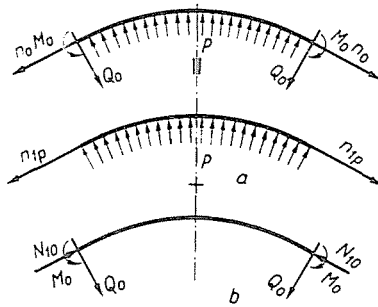


Abb. 3. Zerlegung der auf die Schale 1 wirkenden Belastung

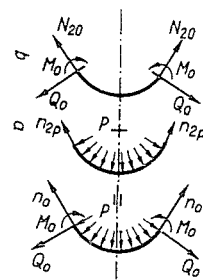


Abb. 4. Zerlegung der auf die Schale 2 wirkenden Belastung

der mit *b* bezeichneten Abbildungen aus den für die Biegetheorie der Zylinderschale gültigen statischen und Formänderungsgleichungen [6] auf nachstehende Weise ermittelt werden kann.

### Gleichgewichtsgleichungen ohne Berücksichtigung der durch die Rohrenden und die Unterstützung verursachten Störungen

Mit den Bezeichnungen der Abb. 5 lautet die Gleichgewichtsgleichung der Schale in Normalenrichtung

$$\dot{N}_\varphi - Q_\varphi = 0 \tag{1.a}$$

die Gleichgewichtsgleichung der in tangentialer Richtung wirkenden Kräfte hingegen

$$N_{\varphi} + \dot{Q}_{\varphi} = 0, \quad (1.b)$$

und schließlich schreibt sich die Gleichung für das Gleichgewicht der um die  $x$ -Achse rotierenden Kräfte zu

$$\dot{M}_{\varphi} = Q_{\varphi} R = 0. \quad (1.c)$$

In diesen sowie in allen folgenden Zusammenhängen sind die Ableitungen nach  $\varphi$  mit Punkten ( $\dot{\phantom{x}}$ ) bezeichnet.

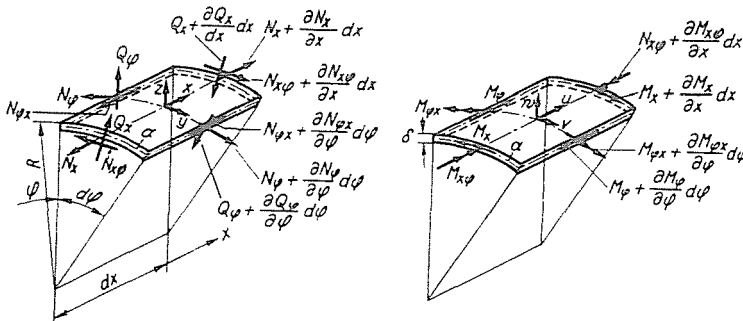


Abb. 5. Elementare Zylinderschale unter allgemeiner Beanspruchung

Gemäß Abb. 5 beträgt die Anzahl der unbekanntem Schnittkräfte und -momente fünf, wogegen zunächst nur die obigen drei Gleichgewichtsgleichungen zur Verfügung stehen. In ihnen kommen zwar nur drei Unbekannte vor, doch können aus den Gleichungen nichteinmal diese drei Unbekannten ermittelt werden, da für  $M_{\varphi}$  keine entsprechende Randbedingung vorhanden ist. Ferner kommen  $N_x$  und  $M_x$  in den Gleichgewichtsgleichungen gar nicht vor. Aus diesem Grunde müssen vor allem die Zusammenhänge zwischen den auf das Schalelement wirkenden Schnittkräften und -momenten einerseits und den Verschiebungen der Schalenmittelfläche andererseits untersucht werden.

### Beziehungen zwischen Formänderungen und Schnittkräften

Bei unseren Untersuchungen werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- $w$  — die radiale Verschiebung der Mittelfläche,
- $v$  — die tangentiale Verschiebung der Mittelfläche,
- $w', w'', w''', w''''$  — die Ableitungen von  $w$  nach  $\varphi$ ,
- $v', v''$  — die Ableitungen von  $v$  nach  $\varphi$ ,
- $\mu$  — die *Poissonsche* Konstante,

$$K = \frac{E \delta^3}{12(1 - \mu^2)} \quad \text{die Biegesteifigkeit,}$$

$$D = \frac{E \delta}{1 - \mu^2} \quad \text{die Dehnungssteifigkeit}$$

und

$\delta$  — die Schalendicke.

Die Beziehungen zwischen den Schnittkräften und -momenten und den Verschiebungen der Schalenmittelfläche lauten unter Anwendung obiger Bezeichnungen folgendermaßen [7]:

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{D}{R} (v' + w) \\ N_x &= \mu N_\varphi \\ Q_\varphi &= \frac{K}{R^3} w'''' \\ M_\varphi &= \frac{K}{R^2} w'''' \\ M_x &= \mu M_\varphi \end{aligned} \quad (2.a-e)$$

Mit den durch die Formänderungen ausgedrückten Schnittkräften, gelten gemäß den Gleichgewichtsgleichungen (1.a) und (1.b) die Beziehungen

$$\frac{D}{R} (v'' + w') = \frac{K}{R^3} w'''' \quad (3.a)$$

und

$$\frac{D}{R} (v' + w) = -\frac{K}{R^3} w'''' . \quad (3.b)$$

Wird die Ableitung der Beziehung (3.b) nach  $\varphi$  von (3.a) subtrahiert und die Differenz durch  $\frac{K}{R^3}$  dividiert, erhält man die die Lösung des Problems enthaltende Differentialgleichung in der Form [8]

$$w'''' + w'' = 0. \quad (4)$$

Die unsere Randbedingungen erfüllende partikuläre Lösung der homogenen, linearen Differentialgleichung mit unvollständigem konstanten Koeffizienten (4) lautet

$$w = A \cos \varphi + B \sin \varphi + C_1 \varphi^2. \quad (5)$$

Mit dem obigen Ausdruck für  $w$  ergibt sich aus Gl. (3.b) für  $v$  die Beziehung

$$v = -\frac{R}{D} \frac{K}{R^3} [(A \cos \varphi - B \sin \varphi) - (A \cos \varphi + B \sin \varphi + C_1 \varphi^2)]. \quad (6)$$

während man mit den entsprechenden Differentialquotienten von  $v$  und  $w$  aus den Gln. (2.a-e) folgende Gln. (7.a-e) erhält:

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{K}{R^3} (A \cos \varphi + B \sin \varphi) \\ N_x &= \mu N_\varphi \\ Q_\varphi &= \frac{K}{R^3} (A \sin \varphi - B \cos \varphi) \\ M_\varphi &= -\frac{K}{R^2} (A \cos \varphi + B \sin \varphi - 2C_1) \\ M_x &= \mu M_\varphi \end{aligned} \quad (7.a-e)$$

Bei Anwendung der allgemeinen Ausdrücke (7.a-e) auf die Schalenelemente, die die in Abb. 1 dargestellte Korbkurve bilden, erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{K_1}{R_1^3} (A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi) \\ N_{x1} &= \mu N_\varphi \\ Q_\varphi &= \frac{K_1}{R_1^3} (A_1 \sin \varphi - B_1 \cos \varphi) \\ M_\varphi &= -\frac{K_1}{R_1^2} (A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi - 2C_{11}) \\ M_{x1} &= \mu M_\varphi \end{aligned} \quad (8'.a-e)$$

für die Schale 1 und

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{K_2}{R_2^3} (A_2 \cos \psi + B_2 \sin \psi) \\ N_{x2} &= \mu N_\varphi \\ Q_\varphi &= \frac{K_2}{R_2^3} (A_2 \sin \psi - B_2 \cos \psi) \\ M_\varphi &= -\frac{K_2}{R_2^2} (A_2 \cos \psi + B_2 \sin \psi - 2C_{21}) \\ M_{x2} &= \mu M_\varphi \end{aligned} \quad (8''.a-e)$$

für die Schale 2.

### Bestimmung der Integrationskonstanten

Die in den Gln. (8'.a—e) und (8''.a—e) vorkommenden Integrationskonstanten können auf Grund der Symmetrieverhältnisse und der Randbedingungen folgendermaßen bestimmt werden:

Wegen der Symmetrieverhältnisse muß an den Stellen  $\varphi = \psi = 0$  die Bedingung  $Q_\varphi = Q_\psi = 0$  erfüllt sein, was nur dann möglich ist, wenn

$$B_1 = 0 \quad (9.a)$$

und

$$B_2 = 0. \quad (9.b)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen für die an der Anschlußstelle der beiden Schalen angreifenden Schnittkräfte folgt aus dem Gleichgewicht der Querkräfte, daß

$$\frac{K_1}{R_1^3} A_1 \sin \varphi_1 + \frac{K_2}{R_2^3} A_2 \sin \psi_1 = 0, \quad (9.c)$$

aus dem Gleichgewicht der Normalkräfte hingegen

$$p(R_1 - R_2) - \frac{K_1}{R_1^3} A_1 \cos \varphi_1 + \frac{K_2}{R_2^3} A_2 \cos \psi_1 = 0. \quad (9.d)$$

Die Integrationskonstanten  $C_{11}$  und  $C_{21}$  können aus der Bedingung abgeleitet werden, daß sich der Winkel, den die der Stelle  $\varphi = \psi = 0$  zugehörigen Tangenten einschließen, unter der Belastung nicht ändert. Diese Tatsache wurde auch bei der von MAYER-MITA [1] für doppelsymmetrische Rohre abgeleiteten allgemeinen Berechnungsmethode berücksichtigt, nach der sich für die Endpunkte der kleinen und großen Achsen die Beziehungen

$$\frac{p}{2} (b^2 - i_k^2) = - \frac{K_1}{R_1^2} A_1 + \frac{K_1}{R_1^2} 2C_{11} \quad (9.e)$$

bzw.

$$\frac{p}{2} (b^2 - i_k^2) = - \frac{K_2}{R_2^2} A_2 + \frac{K_2}{R_2^2} 2C_{21} \quad (9.f)$$

aufschreiben lassen, wenn  $i_k$  den Trägheitshalbmesser des korbkurvenförmigen Rohrquerschnitts bedeutet.

Das sechs unbekannte Integrationskonstanten enthaltende Gleichungssystem (9.a—f) kann auf einfachem Wege gelöst werden, und für die Bestimmung der Konstanten ergeben sich — unter Berücksichtigung der Zusammenhänge  $\sin \psi_1 = \cos \varphi_1$  und  $\cos \psi_1 = \sin \varphi_1$  — die Beziehungen

$$B_1 = 0$$

und

$$B_2 = 0$$

und ferner

$$\begin{aligned} A_1 &= p \frac{R_1 - R_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_1} \frac{1}{\sin \varphi_1} \frac{R_1^3}{K_1} \\ A_2 &= -p \frac{R_1 - R_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_1} \frac{1}{\cos \varphi_1} \frac{R_2^3}{K_2} \\ \frac{K_1}{R_1^2} 2C_{11} &= \frac{K_1}{R_1^2} A_1 + \frac{P}{2} (b^2 - i_k^2) \\ \frac{K_2}{R_2^2} 2C_{21} &= \frac{K_2}{R_2^2} A_2 + \frac{P}{2} (a^2 - i_k^2) \end{aligned} \quad (10.a-f)$$

### Bestimmung der Schnittkräfte und -momente

Die Wiedereinsetzung der entsprechenden Integrationskonstanten in die Gleichungsgruppe (8.a—e) ergibt Ausdrücke, die sich zur Ausführung von Berechnungen nun schon eignen, u. zw. lauten sie folgendermaßen:

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -p \frac{R_1 - R_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_1} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi_1} \\ N_{x1} &= \mu N_\varphi \\ Q_\varphi &= p \frac{R_1 - R_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_1} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} \\ M_\varphi &= p \left[ \frac{R_1(R_1 - R_2)}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_1} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi_1} + 0,5(b^2 - i_k^2) \right] \\ M_{x1} &= \mu M_\varphi \end{aligned} \quad (11.a-e)$$

für die Schale 1 und

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi} &= p \frac{R_1 - R_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_1} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi_1} \\
 N_{x_2} &= \mu N_{\varphi} \\
 Q_{\varphi} &= -p \frac{R_1 - R_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_1} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi_1} \\
 M_{\varphi} &= q \left[ \frac{R_2(R_1 - R_2)}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \varphi_1} \frac{\cos \varphi - 1}{\cos \varphi_1} + 0,5 (a^2 - i_k^2) \right] \\
 M_{x_2} &= \mu M_{\varphi}
 \end{aligned} \tag{11'.a-e}$$

für die Schale 2.

Die Gleichungsgruppen (11'.a—e) und (11".a—e) lassen sich durch Einführung dimensionsloser Faktoren noch weiter vereinfachen.

Für die Schale 1 gilt dann

$$\begin{aligned}
 \frac{N_{\varphi}}{pa} &= -K(x) \cos \varphi \\
 \frac{N_{x_1}}{pa} &= -\mu K(x) \cos \varphi \\
 \frac{Q_{\varphi}}{pa} &= K(x) \sin \varphi \\
 \frac{M_{\varphi}}{pa^2} &= K'(x) (1 - \cos \varphi) - K''(x) \\
 \frac{M_{x_1}}{pa^2} &= \mu [K'(x) (1 - \cos \varphi) - K''(x)],
 \end{aligned} \tag{12'.a-e}$$

für die Schale 2 hingegen

$$\begin{aligned}
 \frac{N_{\varphi}}{pa} &= H(x) \cos \psi \\
 \frac{N_{x_2}}{pa} &= \mu H(x) \cos \psi \\
 \frac{Q_{\varphi}}{pa} &= -H(x) \sin \psi \\
 \frac{M_{\varphi}}{pa^2} &= H'(x) (\cos \psi - 1) + H''(x) \\
 \frac{M_{x_2}}{pa^2} &= \mu [H'(x) (\cos \psi - 1) + H''(x)]
 \end{aligned} \tag{12'.a-e}$$



### Die dimensionslosen Faktoren in Abhängigkeit von den geometrischen Kennzahlen

Die Anwendung der geometrischen Beziehungen der Korbkurve sowie der Bezeichnungen aus Abb. 1 liefert die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b}{a} = x$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (13.a-e)$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

ferner

$$\frac{R_1}{a} = Y(x) \quad \text{und} \quad \frac{R_2}{a} = Z(x),$$

wobei

$$Z(x) = \frac{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-1)}{x-(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}-1)} \quad (14)$$

und

$$Y(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}-Z(x)}{\sqrt{1+x^2}-1}. \quad (15)$$

Mit den Beziehungen (13)–(15) hat man für die dimensionslosen Faktoren

$$K(x) = \frac{Y(x) - Z(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$K'(x) = Y(x) \cdot K(x)$$

$$K''(x) = 0,5 \left( \frac{i_k^2}{a^2} - x^2 \right) \quad (16.a-f)$$

$$H(x) = X \cdot K(x)$$

$$H'(x) = Z(x) \cdot H(x)$$

$$H''(x) = 0,5 \left( 1 - \frac{i_k^2}{a^2} \right).$$

Sind die Wanddicken  $\delta_1$  und  $\delta_2$  der Schalen 1 und 2 konstant, kann das Quadrat des Trägheitshalbmessers in unserem Fall durch das bestimmte Integral

$$i_k^2 = \frac{\delta_1 \int_0^{\varphi_1} \rho_1^2 ds_1 + \delta_2 \int_{\frac{\varphi_1}{2}}^{\pi/2} \rho_2^2 ds_2}{\delta_1 \int_0^{\varphi_1} ds_1 + \delta_2 \int_{\frac{\varphi_1}{2}}^{\pi/2} ds_2} \quad (17)$$

ausgedrückt werden.

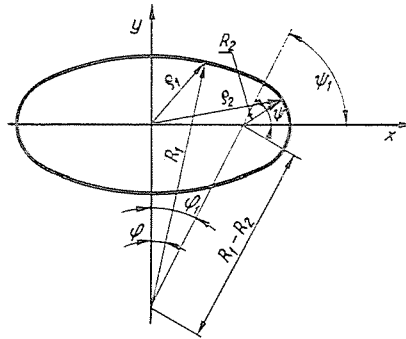


Abb. 6. Geometrische Kenngrößen

Mit den Bezeichnungen aus Abb. 6 werden

$$\rho_1^2 = R_1^2 + (R_1 - R_2)^2 \cos^2 \varphi_1 - 2 R_1 (R_1 - R_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi$$

$$\rho_2^2 = R_2^2 + (R_1 - R_2)^2 \sin^2 \varphi_1 + 2 R_2 (R_1 - R_2) \sin \varphi_1 \cos \varphi.$$

Nach Einsetzen und Integrieren erhält man

$$\frac{i_k^2}{a^2} = \frac{Y(x) (e_1 \varphi_1 - e_{11} \sin \varphi_1) + V Z(x) (e_2 \psi_1 + e_{21} \sin \psi_1)}{Y(x) \varphi_1 + V Z(x) \psi_1}, \quad (18)$$

worin

$$e_1 = [Y(x)]^2 + [Y(x) - Z(x)]^2 \cos^2 \varphi_1$$

$$e_{11} = 2 Y(x) [Y(x) - Z(x)] \cos \varphi_1$$

$$e_2 = [Z(x)]^2 + [Y(x) - Z(x)]^2 \sin^2 \varphi_1$$

$$e_{21} = 2 Z(x) [Y(x) - Z(x)] \sin \varphi_1$$

$$V = \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Die Werte der dimensionslosen Faktoren für den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall  $V = 1$  im Achsenverhältnsbereich  $x = 0,5 \div 1$  sind in den Abb. 7–10 aufgetragen.

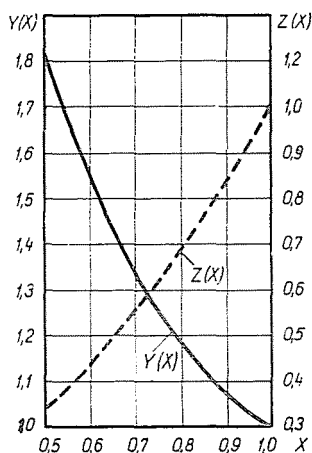


Abb. 7.  $Y(x)$  und  $Z(x)$  in Abhängigkeit vom Achsenverhältnis

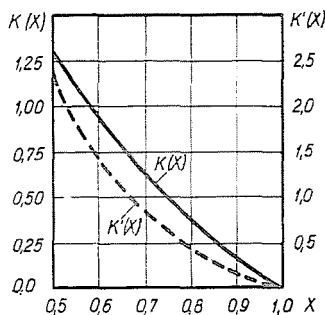


Abb. 8.  $K(x)$  und  $K'(x)$  in Abhängigkeit vom Achsenverhältnis

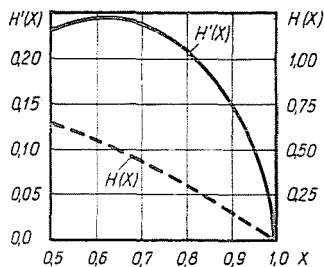


Abb. 9.  $H(x)$  und  $H'(x)$  in Abhängigkeit vom Achsenverhältnis

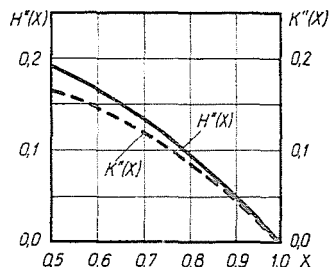


Abb. 10.  $H''(x)$  und  $K''(x)$  in Abhängigkeit vom Achsenverhältnis

Die Festigkeit kann nun im weiteren durch Summierung der Membranspannungen und der zusätzlichen Spannungen wie üblich berechnet werden.

### Kontrollmessungen\*

Zur Kontrolle der Richtigkeit der nach dem beschriebenen Berechnungsverfahren ermittelten Werte wurden Versuche an zwei aus verschiedenen Werkstoffen hergestellten, unterschiedlich großen Rohren mit korbkurvenförmigem Querschnitt und gleichen Achsenverhältnissen durchgeführt.

\* Die Versuche wurden im Laboratorium des Lehrstuhls für Eisenbahnwesen (Leiter Prof. Dr. Guido Rudnai) an der Technischen Universität, Budapest, durchgeführt.

<i>Versuchsrohr I</i>	<i>Versuchsrohr II</i>
Werkstoff: Stahl (A VIII. 23 k)	Werkstoff: Messing (Sr 72 I)
$l = 1000$ mm	$l = 500$ mm
$2a = 194$ mm	$2a = 100$ mm
$2b = 120$ mm	$2b = 62$ mm
$\delta_1 = \delta_2 = 1$ mm	$\delta_1 = \delta_2 = 0,5$ mm

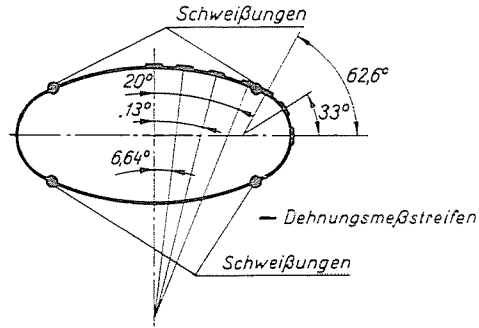


Abb. 11. Schema zur Anlegung der Dehnungsmeßstreifen

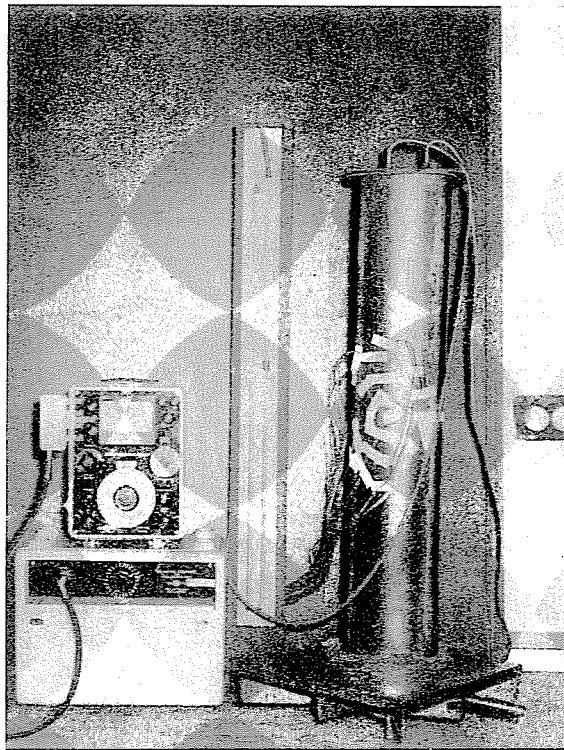


Abb. 12. Lichtbild der Messung

Am Versuchsrohr *I* wurden die auftretenden Spannungen mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen (siehe Abb. 12) an den in Abb. 11 bezeichneten Stellen gemessen. Beim Versuchsrohr *II* wurde dieselbe Messung nur an zwei Stellen, u. zw. an den Endpunkten der kleinen und großen Achse durchgeführt. Die hier folgenden Tabellen enthalten die an den Rohraußenflächen gemessenen und errechneten Spannungswerte bei einem Außendruck von  $p = 0,067$  [kp/m<sup>2</sup>], und zwar für das Versuchsrohr *I* gilt Tabelle I, für das Versuchsrohr *II* hingegen Tabelle II.

Tabelle I

$\varphi^{\circ}$	Errechnete Spannungswerte: $\sigma$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	Gemessene Spannungswerte: $\sigma$ [kp/cm <sup>2</sup> ]
0	—540	—490
6,64	—500	—443
13	—413	—370
20	—275	—250

$\varphi^{\circ}$	Errechnete Spannungswerte: $\sigma$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	Gemessene Spannungswerte: $\sigma$ [kp/cm <sup>2</sup> ]
0	611	580
33	466	420
62,6	110	— 97

Tabelle II

$\varphi^{\circ}$	Errechnete Spannungswerte $\sigma$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	Gemessene Spannungswerte $\sigma$ [kp/cm <sup>2</sup> ]
0	—585	—532

$\varphi^{\circ}$	Errechnete Spannungswerte: $\sigma$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	Gemessene Spannungswerte: $\sigma$ [kp/cm <sup>2</sup> ]
0	641	602

Aus den Tabellen I und II geht klar hervor, daß der Unterschied zwischen den errechneten und gemessenen Spannungswerten an den Höchstspannungsstellen weniger als 10% beträgt. Die Belastung wurde im Laufe der Versuche stufenweise bis  $p_{kr}$  erhöht, und inzwischen wurden die Längenänderungen der

kleinen und großen Achsen gemessen. Zum einen hatten die Versuche das Ziel, die zusätzliche Auswirkung der Formänderungen zu klären, weil diese in den früheren Veröffentlichungen — bezüglich des elliptischen Rohrquerschnitts — gleichfalls nur als Annahme mit in Betracht gezogen worden waren. Zum anderen bezweckten die Versuche zu prüfen, ob die Summe der kleinen und großen Achsenlänge während der Formänderungen als konstant angenommen werden kann.

Die Auswertung der Versuchsergebnisse (laut Tabelle III) zeigte, daß im Achsenverhältnis während der Belastung eine wesentliche Änderung eintrat. Diese Erscheinung bestätigte die Richtigkeit der Auffassung der unter [4] und [5] zitierten Autoren, daß die zusätzlichen Auswirkungen der Formänderungen bei der Festigkeitsberechnung der untersuchten Einrichtungen berücksichtigt werden müssen. Das andere wichtige Ergebnis der Versuche war die Feststellung, daß die Summe der kleinen und großen Achsenlänge bis zum Beginn der Einbeulung praktisch als konstant betrachtet werden kann.

Tabelle III

Bezeichnung der Versuchsröhre	$p_{2r}$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	$\Delta(a + b)$ %	$\Delta x$ %	$\Delta\left(\frac{M_{10}}{pa^2}\right)\%$	$\Delta\left(\frac{M_{20}}{pa^2}\right)\%$
I	0.34	-2.3	-14	15	12
II	0.107	-1.6	-10	11	6.9

Die beschriebene Berechnungsmethode eignet sich auch zur näherungsweise Bestimmung der zusätzlichen Beanspruchungen, wenn man die dimensionslosen Faktoren in Abhängigkeit von dem nach der Formänderung eintretenden Achsenverhältnis  $x'$  ermittelt. Für diesen Fall gilt die Beziehung

$$x' = \frac{b + w_{10}}{a + w_{20}}, \quad (19)$$

in der

$w_{10}$  die Schalenverschiebung am Endpunkt der kleinen Halbachse,

$w_{20}$  die Schalenverschiebung am Endpunkt der großen Halbachse,

bedeutet.

Nach den Versuchen ist

$$w_{10} + w_{20} \approx 0.$$

Der Wert von  $w_{10}$  läßt sich aus der Lösung

$$w = A \cos \varphi + C_{11} \varphi^2 + C_{12} \quad (20)$$

der Differentialgleichung (4) unter Anwendung der die Anschlußbedingungen erfüllenden Beziehung

$$w\varphi_1 = w\psi_1 \quad (21)$$

ermitteln, somit ist

$$w_{10} = \frac{p}{2} \left( \frac{R_2^2}{E_2 \delta_2} - \frac{R_1^2}{E_1 \delta_1} \right) - \frac{A_1}{2} (1 + \cos \varphi_1) - \\ - \frac{A_2}{2} (1 - \sin \varphi_1) - \frac{C_{11}}{2} \varphi_1^2 + \frac{C_{21}}{2} \psi_1^2. \quad (22)$$

### Zusammenfassung

Der Aufsatz beschreibt eine näherungsweise Methode zur Festigkeitsbemessung der sehr häufigen Behälter mit korbkurvenförmigem Querschnitt für konstanten Druck. Die für diese Festigkeitsbemessung vorgeschlagenen Beziehungen wurden aus der Differentialgleichung der Biegetheorie für Zylinderschalen abgeleitet. Zur Bestimmung der auftretenden zusätzlichen Spannungen und der dem Einbeulungsbeginn zugehörigen Formänderungen wurden Versuche durchgeführt. Die Messungen bestätigten die Annahmen früherer Mitteilungen, daß die Summe der kleinen und großen Achsen während der Formänderungen als konstant betrachtet werden kann.

Die anhand der angegebenen theoretischen Beziehungen errechneten Spannungswerte nähern die aus den Versuchen gewonnenen Meßwerte gut an.

### Schrifttum

1. MAYER-MITA, R.: Die Berechnung dünnwandiger ovaler, im besonderen elliptischer Röhren gegen gleichförmigen Normaldruck. VDI-Z. **58**, 649–654 (1914).
2. SCHMIDT, K.: Zur Spannungsberechnung unrunder Rohre unter Innendruck. VDI-Z. **98**, 121–125 (1956).
3. SCHMIDT, K.: Zur Spannungsberechnung unrunder Rohre unter Außendruck. Teil I. VDI-Z. **101**, 47–54 (1959).
4. SCHMIDT, K.: Zur Spannungsberechnung unrunder Rohre unter Außendruck. Teil II. VDI-Z. **101**, 126–130 (1959).
5. SZILÁGYI, L. – MICHELBERGER, P.: Ein Näherungsverfahren zur Festigkeitsberechnung von dünnwandigen elliptischen Rohren. VDI-Z. **102**, 1235–1238 (1960).
6. FLÜGGE, W.: *Stresses in Shells*. New York, 1961.
7. GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Wien, 1959.
8. SZILÁGYI, L.: *Festigkeits- und Stabilitätsuntersuchung druckbelasteter Rohre elliptischen Querschnitts*. (Übers. aus d. Ung.) Dissertation, 1963.

Dr. László SZILÁGYI, Budapest XI. Sztoczek u. 2. Ungarn.