

VERALLGEMEINERUNG DER WIDERSTANDSGESETZE VON PRANDTL UND BLASIUS FÜR NICHTAUSGEBILDETE TURBULENTE ROHRSTRÖMUNGEN

Von

E. LITVAI

Lehrstuhl für Strömungslehre, Technische Universität,
Budapest

(Eingegangen am 28. März 1964)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. GRUBER

I. Einleitung

Bekanntlich kann die Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen — außerhalb der wandnahen laminaren Schicht — durch Überlagerung einer universellen logarithmischen Verteilung und einer geeignet angenommenen Ergänzungsverteilung hergestellt werden.

Der allgemeine Charakter der logarithmischen Grundverteilung wurde von PRANDTL [6] und KÁRMÁN [3] für den Fall ausgebildeter Rohrströmung und für die ebene Platte, von LUDWIG und TILLMANN [5] hingegen für zweidimensionale Grenzschichten mit Druckgradient nachgewiesen. Durch Annahme einer linearen, einparametrischen Ergänzungsverteilung schuf ROTTA [8] die Grundlagen der Berechnungsverfahren von TRUCKENBRODT [13]. Die Ergänzungsverteilung wurde dann von COLES [1] sehr gründlich untersucht, für universell und einparametrisch befunden und »law of the wake« (Gesetz der Delle) genannt. Diese Verteilung läßt sich mit einer trigonometrischen Funktion annähern (vgl. HINZE [2], S. 507). Über ein Berechnungsverfahren mit alleiniger Berücksichtigung des logarithmischen Profils für den Rohreinlauf wurde von SZABLEWSKI [12] berichtet.

Dem Verfasser gelang es, die Gültigkeit der logarithmischen und der Colesschen Verteilungen auf Grund eigener und von SCHULZ und FASOL [11] durchgeführter Messungen im zylindrischen Mischraum von Strahlapparaten nachzuweisen [4].

Die vorliegende Arbeit will zeigen, daß bei rotationssymmetrischen, drallfreien, turbulenten Strömungen in hydraulisch glatten Rohren unter Annahme der logarithmischen Grundverteilung und einer beliebigen Zusatzverteilung eine dem Prandtlschen Widerstandsgesetz

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (1)$$

der Form nach verwandte, jedoch noch allgemeinere Reibungsformel abgeleitet werden kann, die den Zahlenwert des geeignet definierten Widerstandskoeffizienten der allgemeinen, nicht ausgebildeten Rohrströmung mit Potenzialkern gut wiedergibt und die die Gl. (1) als einen Spezialfall enthält.

2. Ausgangsbedingungen und Grundgleichungen

Im folgenden soll also die drallfreie, turbulente und volumbeständig Strömung in kreisförmigen, geraden und hydraulisch glatten Rohren betrachtet werden. Es sei ferner vorausgesetzt, daß die Strömung Grenzschichtcharakter trägt, daß also

1. die radiale Komponente der Geschwindigkeit mindestens um eine Größenordnung kleiner ist als die axiale und daß sich
2. der statische Druck in radialer Richtung nur vernachlässigbar geringfügig ändert.

Ist r die Ordinate in radialer Richtung, u die Axialkomponente der Strömungsgeschwindigkeit (der zeitliche Mittelwert der turbulenten Strömung) und R der Rohrradius, ergibt sich anhand der durch die Gleichung

$$v_3 = \frac{2}{R^2} \int_0^R ur \, dr \quad (2)$$

definierten mittleren Geschwindigkeit v_3 und mit den Bezeichnungen

$$\frac{r}{R} = \eta; \quad \frac{u}{v_3} = U.$$

die Gleichung

$$\int_0^1 U \eta \, d\eta = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

die die Kontinuitätsbedingung ausdrückt.

Bezeichnet ferner x die Abszisse in axialer Richtung, p den statischen Druck und τ_R die Wandschubspannung, nimmt die Impulsgleichung die Form (vgl. [10]):

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^R u^2 r \, dr = - \frac{1}{\rho} \frac{R^2}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{R}{\rho} \tau_R \quad (4)$$

an.

Für ausgebildete Strömungen, für denen die linke Seite der Gl. (4) verschwindet, wird der durch die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\varrho}{2} v_3^2 \frac{\lambda_P}{2R}$$

definierte Widerstandskoeffizient λ_P verwendet, woraus

$$\tau_R = - \frac{\varrho}{2} v_3^2 \frac{\lambda_P}{4} \tag{5}$$

folgt. Gl. (5) kann für den Fall nichtausgebildeter Strömungen verallgemeinert werden, indem man an Stelle von λ_P den örtlichen Widerstandskoeffizienten

$$\lambda = - 4 \frac{\tau_R}{\frac{\varrho}{2} v_3^2} \tag{6}$$

einführt. Im folgenden wird der durch Gl. (6) definierte Widerstandskoeffizient untersucht, der sich ebenso wie die Wandschubspannung in axialer Richtung ändern kann.

3. Annahme der Geschwindigkeitsverteilung

Auf Grund der in der Einleitung erwähnten Arbeiten läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung in einem Querschnitt in der Form

$$u(r) = u_P(r) + u_C(r) \tag{7}$$

durch Superposition herstellen, wobei $u_P(r)$ die durch die Gleichung

$$\frac{u_P}{\sqrt{\frac{|\tau_R|}{\varrho}}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{R-r}{\nu} \sqrt{\frac{|\tau_R|}{\varrho}} \right) + c \tag{8}$$

beschriebene Grundverteilung und $u_C(r)$ eine hier zunächst nicht näher definierte Verteilung bedeutet. In Gl. (8) ist in axialer Richtung nur τ_R veränderlich, die Form von $u_C(r)$ hingegen kann sich von Querschnitt zu Querschnitt beliebig ändern. An dieser Stelle soll von $u_C(r)$ nur gefordert werden, daß es die Bedingungen

$$u_C(R - \varepsilon) = 0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial u_C}{\partial r} \right)_{r=R-\varepsilon} = 0 \tag{10}$$

erfüllt, wobei ε einen Abstand bezeichnet, der größer ist als die laminare Wandschichtdicke. Mit den neuen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} u_P/v_3 = P; \quad u_C/v_3 = C; \quad 2Rv_3/\nu = \text{Re}, \\ 1/z\sqrt{8} = a; \quad (zc - \ln\sqrt{8} - \ln 2)/z\sqrt{8} = \delta \end{aligned} \quad (11)$$

und mit der Gl. (6) folgt aus (7)

$$U(\eta) = P(\eta) + C(\eta) \quad (12)$$

und aus Gl. (8)

$$P(\eta) = \sqrt{|\lambda|} \cdot \{a \ln [(1 - \eta) \text{Re} \sqrt{|\lambda|}] + \delta\}. \quad (13)$$

Soll das Prinzip der Superposition nach COLES [1] auch auf die Rückströmgebiete angewendet werden, die im Mischraum von Strahlapparaten

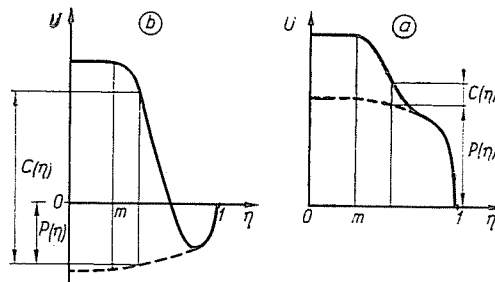


Abb. 1

neben der Wand auftreten, ist es wegen des Vorzeichenwechsels von τ_R und λ erforderlich, sich statt der Gl. (12) der Gleichung

$$U(\eta) = -P(\eta) + C(\eta) \quad (14)$$

zu bedienen, und zwar in jenen Querschnitten, in denen eine Rückströmung auftritt. Allerdings ist darauf zu achten, daß der Grenzschichtcharakter der Strömung nächst den Stellen der Ablösung und des Wiederanliegens, die die Rückströmgebiete begrenzen, nicht mehr vorhanden ist, so daß dort die Annahmen (7) und (8) ungültig werden.

Wird um die Rohrachse der Verallgemeinerung halber noch eine Potentialströmung mit dem Halbmesser mR , also ein Potentialkern vorausgesetzt, ist die Verteilung (12) naturgemäß nur im Bereich $m \leq \eta < 1$ gültig, während im Potentialkern mit dem Wert

$$U(m) = \sqrt{|\lambda|} \{a \ln [(1 - m) \text{Re} \sqrt{|\lambda|}] + \delta\} + C(m) \quad (15)$$

gerechnet werden muß, der von η unabhängig ist.

Abb. 1 gibt eine gute Übersicht über die Eigenschaften der angenommenen Geschwindigkeitsverteilung.

4. Das universelle Widerstandsgesetz

Die durch die Gleichungen (12), (13) bzw. (14) und (15) beschriebene Geschwindigkeitsverteilung muß die Kontinuitätsgleichung (3) befriedigen. Beschränkt man sich zunächst auf die positiven Werte des Widerstandskoeffizienten, dann gilt

$$\int_0^1 U \eta \, d\eta = a \sqrt{\lambda} \int_m^1 \eta \ln(1 - \eta) \, d\eta + \sqrt{\lambda} [a \ln(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) + \delta] \cdot \int_m^1 \eta \, d\eta + \\ + \sqrt{\lambda} \{a \ln[(1 - m) \operatorname{Re} \sqrt{\lambda}] + \delta\} \cdot \int_0^m \eta \, d\eta + \int_0^1 C(\eta) \cdot \eta \, d\eta.$$

Durch Integration, und nach Einführung der Bezeichnung

$$\int_0^1 C(\eta) \cdot \eta \, d\eta = D \quad (16)$$

ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung nach kurzer Zwischenrechnung die Formel

$$\sqrt{\lambda} \left\{ a \ln(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) + a \cdot \left[\ln(1 - m) + m + \frac{m^2}{2} - \frac{3}{2} \right] + \delta \right\} + 2D = 1, \quad (17)$$

die sogleich in die Form

$$\frac{1 - 2D}{\sqrt{\lambda}} = a \ln(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) + a \left[\ln(1 - m) + m + \frac{m^2}{2} \right] + \delta - \frac{3}{2} a$$

umgeordnet werden kann. Mit den Zahlenwerten $c = 5,6$ und $z = 0,4075$, die nach den Untersuchungen von Ross [7] den Versuchsergebnissen besser entsprechen, als die in Gl. (8) bisher verwendeten, erhält man aus Gl. (11) die Konstanten $a = 0,866$ und $\delta = 0,47$. Geht man noch auf die Briggsschen Logarithmen über, hat man

$$\frac{1 - 2D}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) + 2 \log(1 - m) + 0,866 \left(m + \frac{m^2}{2} \right) - 0,83. \quad (18)$$

Wird dieses Ergebnis auf Strömungen angewendet, die sich durch die logarithmische Verteilung allein beschreiben lassen ($D = 0$) und die keinen Potentialkern haben ($m = 0$), erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_P}} = 2 \log(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda_P}) - 0,83, \quad (19)$$

d. h. abgesehen von dem Unterschied in den Konstanten (0,83 bzw. 0,80), der sich mit der Streuung der Meßergebnisse erklären läßt, das Prandtl'sche Widerstandsgesetz ([9], S. 477).

Die Gleichung (18) ist also die verallgemeinerte Form des Prandtl'schen Widerstandsgesetzes für den Fall kreisförmiger, hydraulisch glatter Rohre, wenn sich auf die logarithmische Geschwindigkeitsverteilung eine die Bedingung der Rotationssymmetrie und die Bedingungen (9) und (10) befriedigende, sonst aber beliebige Geschwindigkeitsverteilung superponiert und wenn ein ebenso rotationssymmetrischer Potentialkern existiert.

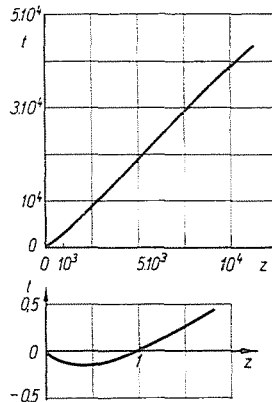


Abb. 2

Mit bekanntem Verlauf von $D(x)$ und $m(x)$ kann so der Verlauf von $\lambda(x)$ in axialer Richtung bestimmt werden.

Sehr lehrreich ist auch die graphische Darstellung der Formel (18). Mit der Umgestaltung

$$0,866 \left(m + \frac{m^2}{2} \right) - 0,83 = 2 \log (e^{m+m^2/2-0,96})$$

sowie mit den Bezeichnungen

$$(1 - m) e^{m+m^2/2-0,96} = F, \quad (20)$$

$$F \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} = z \quad (21)$$

und

$$\left(\frac{1}{2} - D \right) F \operatorname{Re} = t \quad (22)$$

geht Gl. (18) in die Form

$$t = z \log z \quad (23)$$

über, das neue Widerstandsgesetz kann also in der Ebene z, t mit einer einzigen Kurve dargestellt werden (Abb. 2). Solcherart kann λ sowohl iterativen als auch auf graphischem Wege ermittelt werden.

Selbstverständlich kann auch der Fall der ausgebildeten Strömung rechnerisch bestimmt werden, wobei die durch die Substitution

$$D = 0; m = 0$$

gewonnenen Koordinaten

$$z_p = e^{-0,96} \cdot \text{Re} \sqrt{\lambda} = 0,384 \cdot \text{Re} \sqrt{\lambda} \quad (24)$$

$$t_p = \frac{1}{2} e^{-0,96} \cdot \text{Re} = 0,192 \text{ Re} \quad (25)$$

zu benutzen sind.

Die Funktion (23) hat die auffallende Eigenschaft, im Bereich $0 \leq z \leq 1$ bezüglich z mehrwertig zu sein. Da sich dies physikalisch nicht erklären läßt, muß es als Hinweis darauf betrachtet werden, daß Gl. (23) nur über einem gewissen z_{\min} -Wert den tatsächlichen Verhältnissen entsprechende t -Werte liefert. Bei ausgebildeter Strömung kann diese Gültigkeitsgrenze durch die kritische Reynoldssche Zahl $\text{Re} \cong 2320$ bestimmt werden, woraus auf Grund von (24) bzw. (25) folgt, daß $t_{p\min} = 445$ bzw. $z_{p\min} = 195$. Ist $z_p < z_{p\min}$, dann ist Gl. (19) ungültig, da die Strömung im Rohr laminar ist und die Geschwindigkeitsverteilung von der logarithmischen wesentlich abweicht. Bei nichtausgebildeter Strömung verursacht die Bestimmung dieses Grenzwertes schon etwas größere Schwierigkeiten, weil die kritische Reynoldssche Zahl nicht bekannt ist. Annähernd kann vorausgesetzt werden, daß die Strömung bei $m = 0$, $D \neq 0$ turbulent bleibt, solange die der Verteilung $P(\eta)$ allein entsprechende Reynoldssche Zahl Re_p die Bedingung $\text{Re}_p > 2320$ befriedigt. Da die aus der Verteilung $C(\eta)$ berechenbare mittlere Geschwindigkeit gemäß (16) dem D proportional ist, folgt aus Gl. (16), daß

$$2 D \text{ Re} = \text{Re}_C = \frac{4 R v_3}{\nu} \int_0^1 C(\eta) \eta d\eta \quad (26)$$

Schreibt man die Reynoldssche Zahl Re der Rohrströmung nach obigem in der Form

$$\text{Re} = \text{Re}_p + \text{Re}_C$$

folgt aus (26), daß

$$\text{Re}_p = \text{Re} (1 - 2 D). \quad (27)$$

Da die Gl. (25) auch in der Form

$$t_p = \frac{1}{2} e^{-0,96} \text{Re}_p$$

geschrieben werden kann, erhellt bei einem Vergleich der Gl. (20) und (22) und unter Berücksichtigung der Gl. (27) sofort, daß $t = t_P$, $t_{\min} = t_{P\min}$; bei $m = 0$, $D \neq 0$ ergibt sich also für die Gl. (23) dieselbe Gültigkeitsgrenze wie bei der ausgebildeten Rohrströmung.

Der Fall $m \neq 0$, $D = 0$ gibt, wie leicht einzusehen ist, eine kleinere Gültigkeitsgrenze. Im Potentialkern ist nämlich die Geschwindigkeit kleiner, als jene, die sich aus dem logarithmischen Profil ergeben würde, weshalb $Re < Re_P$.

Der Gültigkeitsbereich des universellen Widerstandsgesetzes kann also durch $z > 195$ mit genügender Sicherheit angegeben werden. Das entspricht

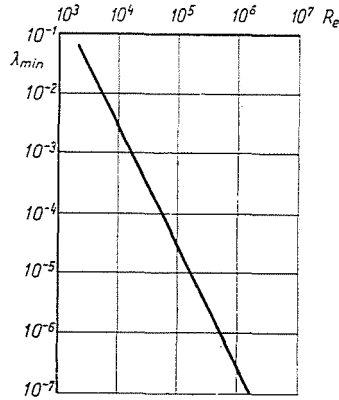


Abb. 3

natürlich einem Kleinstwert des Widerstandskoeffizienten λ_{\min} , der, wie aus obigem folgt, aus Gl. (24) durch die Substitution $z_{P\min} = 195$ berechnet werden kann. Die resultierende Formel

$$\lambda_{\min} = \left(\frac{507}{Re} \right)^2 \quad (28)$$

die in Abb. 3 graphisch dargestellt ist, zeigt, daß bei genügend großen Reynoldsschen Zahlen der Ungültigkeitsbereich vernachlässigbar klein wird.

Die Gl. (23) hat eine weitere erwähnenswerte Eigenschaft: sie ist aus mathematischen Gründen nur für positive Werte von z und solche von λ anwendbar. Ist aber D genügend groß, kann t gemäß Gl. (22) auch negative Werte annehmen; das bedeutet offenbar eine der Abb. 1b entsprechende Rückströmung und einen negativen örtlichen Widerstandskoeffizienten. Um die Gl. (18) auch auf diesen Fall auszudehnen, kann die Funktion $t = z \log z$ für den Fall negativer Werte von t vereinbarungsgemäß z.B. auf den Anfangspunkt projiziert werden. Außerdem lassen sich den negativen Werten von t

negative Werte von λ zuordnen. Dieses Verfahren entspricht etwa einer Spiegelung der Funktion $U(\eta)$ auf die Achse η in *Abb. 1b*.

Nach einem ähnlichen, hier nicht wiedergegebenen Gedankengang erhält man dieselbe Werte von $z_{P\min}$, $t_{P\min}$ und λ_{\min} auch für den Fall $t < 0$, jedoch mit negativem Vorzeichen. In der Umgebung der Stellen der Ablösung und des Wiederanliegens ist also Gl. (18) im Bereich $-\lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\min}$ ungültig. Es ist natürlich eine andere Frage, ob der Gültigkeitsbereich, der sich wegen des vom Grenzschichtcharakter abweichenden Verhaltens der Strömung in der Nähe solcher Stellen ergibt, kleiner oder größer als der durch Gl. (28) erhaltene genommen werden muß. Die Versuche des Verfassers [4] gaben auf diese Frage wegen ihrer kleinen Zahl keine endgültige Antwort.

5. Näherungsformeln

Die numerische Behandlung der Gleichung (18) ist etwas schwierig, ebenso wie die der Gl. (19), die durch die Blasiusche Formel

$$\lambda_P = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}} \quad (29)$$

angenähert wird. Da das universelle und das Prandtlssche Widerstandsgesetz an der Ebene z, t durch ein und dieselbe Kurve beschrieben wird, besteht die Möglichkeit, eine der Blasiuschen Formel ähnliche Annäherung der Gl. (18) abzuleiten. Durch Substitution der Gl. (29) in Gl. (24) und durch wiederholte Benutzung des aus Gl. (25) sich ergebenden Ausdrucks

$$Re = \frac{t_P}{0,192}$$

hat man mit

$$t_P = 1,093 z_P^{8/7} \quad (30)$$

die in die Ebene z, t transformierte Form des Blasiuschen Gesetzes. Aus *Abb. 4* ist ersichtlich, daß die Annäherung bis zu einem $z_P = 5000$, welches gemäß Gln. (23) und (25) dem Werte $Re = 10^5$ entspricht, sehr gut ist. Wendet man die Annäherung

$$t = 1,093 z^{8/7}$$

auch auf den allgemeinen Fall an, so erhält man mit den Gln. (21) und (22) das verallgemeinerte Blasiusche Gesetz

$$\lambda = \frac{0,248}{\sqrt[4]{Re}} \cdot \sqrt[4]{\frac{(1-2D)^7}{F}} \quad (31)$$

Die numerische Analyse des Ausdrucks

$$\sqrt[4]{F} = \sqrt[4]{(1-m) \cdot e^{m + m^2/2 - 0,96}}$$

zeigt, daß für $0 \leq m \leq 0,5$ mit einem Fehler von 1,5% der Zahlenwert

$$\sqrt[4]{F} \approx 0,788$$

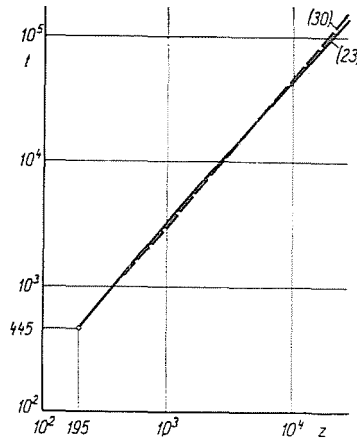


Abb. 4

anwendbar ist. Dadurch hat man statt der Gl. (31) die noch einfachere Formel

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}} (1 - 2D)^{2/4},$$

die bei $m \leq 0,5$ und $z \leq 5000$ eine gute Näherung bedeutet.

6. Schlußfolgerungen

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bei beliebiger Zusatzverteilung $u_C(r)$ gültig sind. Das bedeutet aber, daß die Anwendung eine genauere Angabe von $C(\eta)$ erfordert.

Der Ansatz $C(\eta) = 0$ ermöglicht die Ausarbeitung einer von der Szablewskischen Lösung [12] etwas abweichenden, einfacheren Methode zur Berechnung des turbulenten Rohreinlaufproblems.

Wird $u_c(r)$ durch das Colessche Gesetz der Delle ersetzt, was nach den Untersuchungen des Verfassers [4] die Einführung mehrerer von x abhängiger Profilparameter erfordert, kann das allgemeine Problem der nichtausgebildeten turbulenten Rohrströmungen auf die Untersuchung dieser Parameter zurückgeführt werden. Gl. (18) stellt in diesem Falle eine jener funktionellen Zusammenhänge dar, die zwischen den Profilparametern bestehen.

Diese Fragen führen aber über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden in Rahmen eines Auftrags des Chemischen Projektierungsbüros, Budapest, im Institut für Strömungslehre an der Technischen Universität, Budapest, ausgeführt. Verfasser dankt auch an dieser Stelle Herrn Professor Dr. J. Gruber für die wertvollen Ratschläge und für seine Kritik.

7. Zusammenfassung

Die Arbeit beweist, daß bei rotationssymmetrischen, drallfreien, turbulenten Strömungen in hydraulisch glatten Rohren unter Annahme der logarithmischen Geschwindigkeitsverteilung als Grundverteilung und einer auf diese superponierten beliebigen Zusatzverteilung eine dem Prandtl'schen Widerstandsgesetz der Form nach verwandte jedoch noch allgemeinere Formel abgeleitet werden kann, die den Zahlenwert des geeignet definierten Widerstandskoeffizienten der allgemeinen, nicht ausgebildeten Rohrströmung mit Potentialkern gut wiedergibt und die die Prandtl'sche Formel als einen Spezialfall enthält. Es wird der Gültigkeitsbereich der neuen Formel diskutiert und eine Näherungsformel angegeben, die dem Blasius'schen Widerstandsgesetz entspricht. Als konkrete Zusatzverteilung wird das Colessche »Gesetz der Delle« vorgeschlagen.

Schrifttum

1. COLES, D.: The Law of the Wake in the Turbulent Boundary Layer. *J. Fluid Mech.* **1**, 191 (1956).
2. HINZE, J. O. *Turbulence*. McGraw-Hill. 1959.
3. KÁRMÁN, T.: *Turbulence and Skin Friction*. *J. Aero. Sci.* **1**, 1 (1934).
4. LITVAI, E.: Sugárszivattyú keverőterének áramlástechnikai vizsgálata. (Strömungstechnische Untersuchung des Mischraums von Strahlapparaten.) Diss. Ung. Akad. Wiss. Budapest, 1964. Nicht publiziert.
5. LUDWIG, H.—TILMAN, W.: Untersuchungen über die Wandschubspannungen in turbulenten Grenzschichten. *Ing.—Arch.* **17**, 288 (1949).
6. PRANDTL, L.: Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten. *Erg. AVA*. Göttingen. **4**, 18 (1932).
7. ROSS, D.: A New Analysis of Nikuradse's Experiments on Turbulent Flow in Smooth Pipes. *Proc. Third Midwestern Conference on Fluid Mechanics*. Minneapolis. 651, 1953.
8. ROTTA, J.: Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten. *Ing.—Arch.* **20**, 195 (1952).
9. SCHLICHTING, H.: *Grenzschicht-Theorie*. Karlsruhe (1951).
10. SCHLICHTING, H.—GERSTEN, K.: Berechnung der Strömung in rotationssymmetrischen Diffusoren mit Hilfe der Grenzschichttheorie. *Z. Flugwiss.* **9**, 135 (1961).
11. SCHULZ, F.—FASOL, K. H.: *Wasserstrahlpumpen zur Förderung von Flüssigkeiten*. Springer. Wien (1958).
12. SZABLEWSKI, W.: Der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung. *Ing.—Arch.* **21**, 323 (1953).
13. TRUCKENBRODT, E.: Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung. *Ing.—Arch.* **20**, 211 (1952).

Elemér LITVAI, Budapest, XI. Bertalan Lajos u. 4—6. Ungarn.