

BERECHNUNG DES EINGRIFFSWINKELS DER EVOLVENTENPROFILRÜCKNAHME BEI GERADVERZAHNTEN ZAHNRÄDERN

Von

I. VÖRÖS

Lehrstuhl für Maschinenelemente, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 22. September, 1962)

Im Lauf geradverzahnter Stirnräder läßt sich die Forderung nach Geräuscharmheit am besten durch Profilrücknahme erfüllen [5]. Nach Abb. 1 beginnt der Eingriff eines am Fuß des oberen Rades befindlichen Punktes mit dem ersten Kopfkreispunkt des unteren Rades im Punkt A der Eingriffslinie. Im Abstand der Eingriffsteilung t_g von diesem Punkt A , u. zw. im Punkte D , befindet sich das vorhergehende Zahnepaar in Eingriff, dessen Zähne sich unter Einwirkung der Belastung deformieren. Bei dem im Punkt A in Eingriff tretenden Zahnepaar kann der exakte Eingriff erzielt werden, indem man die Zahnkopfflanke des unteren Zahnrades um den Gesamtbetrag der Deformation des vorhergehenden Zahnepaares im Punkt D vermindert, damit dieses mit dem Fußteil des oberen Rades stoßfrei zusammentreffen kann. Im Punkt E der Eingriffslinie tritt der Kopfkreispunkt des oberen Rades aus dem Eingriff. An dieser Stelle muß die Profilflanke des oberen Zahnrades um den Betrag der im Punkt B auftretenden Deformation des folgenden Zahnepaares zurückgenommen werden. Diese Profilrücknahme ist besonders bei hoch belasteten und schnellaufenden Zahnradgetrieben, z. B. bei Zahnradern von Triebwagenzügen und anderen Fahrzeugen, ferner bei den Zahnradern von Turbogetrieben von besonderem Vorteil, u. zw. weil sie nicht nur das Geräusch, sondern auch die an den Zähnen auftretenden dynamischen Kräfteinflüsse vermindert.

Zur Bestimmung der unter Belastung im Punkte D bzw. B auftretenden Zahn deformationen sind aus der Literatur viele Berechnungs- und Versuchsverfahren bekannt [1, 2 und 3]. Die der Zahn deformation entsprechende Profilrücknahme kann man, insbesondere mit der Zahnrad schleifmaschine System Maag zweckmäßig durchführen, indem man nach dem mit dem Bezugswinkel α_0 durchgeführten, der Abb. 2 entsprechenden Zahnschliff den Schleifscheibenwinkel auf einen etwas größeren Winkel α'_0 einstellt und dann das Zahnprofil entsprechend der in der Figur dünn gezogenen Evolvente um den wegen der Zahn deformation erforderlichen Betrag f_k abschleift. In Abb. 2 ist ein Zahn des unteren Rades ohne Angabe der Index-Bezeichnung dargestellt. Im folgenden sollen die Indexbezeichnungen »1« und »2« der Räder

der Einfachheit halber nur dann angegeben werden, wenn dies die Verständlichkeit verlangt. Im übrigen muß das mitgeteilte Berechnungs- und Konstruktionsverfahren bei beiden kämmenden Zahnrädern durchgeführt werden.

Der erforderliche Wert der Profilrücknahme am Kopfkreis r_k senkrecht zum Zahnprofil soll f_k betragen. Bei diesem Herstellungsverfahren muß der geänderte größere Winkel α'_0 dem am Kopfkreis nötigen Rücknahmewert entsprechend bestimmt werden, und dementsprechend hat man die Schleifscheiben einzustellen. Die auf diese Weise nachgestellten Schleifscheiben schleifen in Richtung des Zahnfusses gleichmäßig abnehmend von beiden Zahnflanken nach der dünn ausgezogenen Evolvente so viel ab, daß

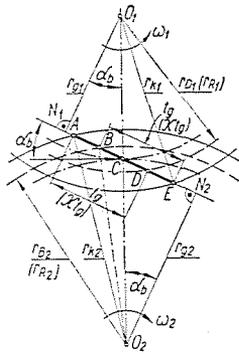


Abb. 1. Bestimmung des äußeren Einzeleingriffspunkthalbmessers bzw. des Profilrücknahme-Grenzkreishalbmessers

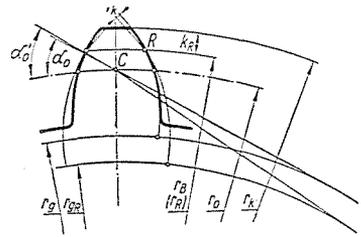


Abb. 2. Die Lage der Evolvente für die Profilrücknahme

die Rücknahme beim Profilpunkt R bereits den Wert 0 hat. Dieser Profilpunkt liegt auf dem Kreis, der durch den äußeren Einzeleingriffspunkt geht. Auf diese Weise treffen die beiden Evolventen im Punkt R zusammen. Die Profilrücknahme verläuft also vom Kopfkreis bis k_R . Der Kreis mit dem Halbmesser r_R müßte demnach beim Rad »2« theoretisch der dem äußeren Einzeleingriffspunkt entsprechende Grenzkreis r_{B_2} sein. Innerhalb dieses Profilteiles, und zwar nach Abb. 1 an dem der Eingriffsstrecke \overline{BD} entsprechenden Profilteil, überträgt ein einziges Zahnpaar die volle Belastung.

Die Profilrücknahme müßte also theoretisch vom Zahnkopf bis zu dem dem äußeren Einzeleingriffspunkt entsprechenden Kreis mit dem Halbmesser r_{B_2} bzw. beim Rad »1« bis zu dem auf dem Kreis mit dem Halbmesser r_{D_1} liegenden Punkt reichen. Aus Sicherheitsgründen empfiehlt es sich jedoch im allgemeinen nicht, mit der Profilrücknahme bis zum äußeren Einzeleingriffspunkt zu gehen, da sich der Überdeckungsgrad bei ungünstigem Einfluß von Herstellungsfehlern verringern würde. Außerdem würden die Zahnverformungen bei Belastungen, die geringer sind als die der Deformationsberechnung

zugrunde gelegten, kleiner werden, d. h. die Räder würden geräuschvoller laufen, was sich besonders beim Leerlauf nachteilig auswirken würde. Deshalb kann man dem Vorschlag von ERNEY [4] so vorgehen, daß man an der Eingriffslinie jenen Punkt, durch den der Grenzkreis r_{R_2} hindurchgeht, nicht mit dem Abstand t_g vom Punkt E , sondern mit einem größeren Abstand Kt_g festlegt, wobei der Wert K von dem Überdeckungsgrad ε wie folgt in Abhängigkeit gebracht werden kann:

Falls $\varepsilon \leq 1,2$ kann $K = 1$ gesetzt werden, das heißt, in diesem Falle bleibt der äußere Einzeleingriffspunkt der Grenzpunkt der Profilirücknahme.

Für $1,4 > \varepsilon > 1,2$ wählt man $K = 1,1$ und

für $\varepsilon > 1,4$ wählt man $K = 1,2$ als Faktor für die Eingriffsteilung t_g .

In den beiden letzteren Fällen ist es nämlich wegen der größeren Länge der Eingriffslinie leichter möglich, die Profilirücknahme nur bis zum Punkt R zu führen, der außerhalb des äußeren Einzeleingriffspunktes liegt. Auf diese Weise wird der die Profilirücknahme bestimmende Kreis größer sein als der Einzeleingriffskreis. Der Einfachheit halber soll jedoch der Punkt auf dem Grenzkreis der Profilirücknahme an der Eingriffslinie weiterhin mit B und der Punkt an der Zahnflanke mit R bezeichnet werden.

Den durch die Einführung des Faktors K erhaltenen Grenzkreishalbmesser r_{R_2} berechnet man beim unteren Rad folgendermaßen. Mit den Kopf- und Grundkreishalbmessern kann man beim oberen Rad auf Grund des Pythagoreischen Lehrsatzes nach Abb. 1 folgenden Zusammenhang aufschreiben

$$\overline{N_1 E} = \sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2}. \quad (1)$$

Subtrahiert man diesen Wert vom Abstand: $\overline{N_1 N_2} = a \sin a_b$, erhält man die Entfernung $\overline{N_2 E}$. Zu dieser muß man den Wert Kt_g addieren, um zum Punkte B zu gelangen, d.h.

$$\overline{N_2 B} = a \sin a_b - \sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} + Kt_g. \quad (2)$$

Mit dieser Entfernung kann aus dem rechtwinkligen Dreieck O_2BN_2 der Halbmesser r_{R_2} als Hypotenuse bei bekannten Grundkreishalbmesser r_{g2} aus dem Pythagoreischen Lehrsatz berechnet werden, d.h.:

$$r_{R_2} = \sqrt{(a \sin a_b - \sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} + Kt_g)^2 + r_{g2}^2}. \quad (3)$$

Wenn für kleine Überdeckungsgrade der Wert $K = 1$ angewendet wird, erhält man aus dieser Formel den äußeren Einzeleingriffshalbmesser r_{B2} .

Den Winkel α'_0 , auf den man zur Erzeugung der Profilirücknahme die Schleifscheiben einstellen muß, kann man durch die Beziehungen jenes Bezugsprofils, das zur Erzeugung der Profilirücknahme dient, und durch die Ein-

Bei bekanntem Kopfkreisradius r_k und Halbmesser r_B oder r_R kann die Entfernung \overline{AB} aus dem Pythagoreischen Lehrsatz anhand folgender Formel berechnet werden:

$$\overline{AB} = \sqrt{r_k^2 - r_g^2} - \sqrt{r_R^2 - r_g^2}. \quad (5)$$

Zur Kontrolle der Berechnung wird man die einzelnen Entfernungen zweckmäßig auch graphisch derart bestimmen, daß man die Konstruktionen der Abb. 1 und 3 in großen Maßstab durchführt und aus der Zeichnung den Halbmesser r_R sowie die Entfernung l abmißt.

Die für die Profilirücknahme f_k und für die Entfernung l nötige Winkelzunahme $\Delta\alpha$ läßt sich aus dem in Abb. 3 schraffierten rechtwinkligen Dreieck nach folgender Beziehung berechnen:

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{f_k}{l}. \quad (6)$$

Da bei kleinen Winkeln der Tangens dem Bogenmaß des Winkels entspricht, kann man diesen Wert auch als Bogenmaß des Winkels $\Delta\alpha$ annehmen. Somit wird also

$$\alpha'_0 = \alpha_0 + \Delta\alpha. \quad (7)$$

Es kommt häufig vor, daß man die Begrenzung der Profilirücknahme nicht unter Annahme des Eingriffsteilungsfaktors K , sondern durch Angabe des Höhenwertes k_R der Profilirücknahme angibt. Dies vereinfacht die Berechnung, da sich der Halbmesser r_R des durch den Punkt R gehenden Kreises ohne weiteres aus der Gleichung

$$r_R = r_k - k_R \quad (8)$$

ergibt. In diesem Falle läßt sich der Wert des Winkels α'_0 aus den Formeln (4—7) sogleich berechnen.

Am Zahnrad läßt sich der nach Abb. 2 resultierende Wert f_k rechnerisch folgendermaßen kontrollieren. Dem nach dem Zahnstangenwerkzeug berechneten Profilirücknahmewinkel α'_0 entspricht gemäß Abb. 2 der Grundkreisradius r_{gR} . Der Wert dieses Halbmessers läßt sich aus dem Teilkreisradius berechnen, d.h. es wird

$$r_{gR} = r_0 \cos \alpha'_0. \quad (9)$$

Danach berechnet man die am Kopfkreisradius r_k und am Halbmesser r_R dem Punkt R zugehörigen Profilwinkel mit Hilfe des Cosinussatzes auch für die in Abb. 2 stark bzw. dünn ausgezogenen Evolventen.

Zur stark ausgezogenen Evolvente gehört der Grundkreisradius r_g . Mit diesem lassen sich die am Kopfkreis bzw. die beim Punkt R liegenden Winkel aus folgenden Formeln berechnen:

$$\cos \alpha_k = \frac{r_g}{r_k} \quad \text{und} \quad \cos \alpha_R = \frac{r_g}{r_R}. \quad (10)$$

Bei der dünn ausgezogenen Evolvente ist der Grundkreishalbmesser r_{gR} . Hier schreiben sich die Profilwinkel am Kopfkreis und am Punkte R zu

$$\cos \alpha'_k = \frac{r_{gR}}{r_k} \quad \text{und} \quad \cos \alpha'_R = \frac{r_{gR}}{r_R}. \quad (11)$$

Nach Bestimmung der vier Winkel werden aus der Involutfunktionen-tabelle die ihnen entsprechenden inv. Werte ermittelt. Bei diesen handelt es sich um jene Zentriwinkel, die unter den im Punkt R sich treffenden Evolventen liegen. Der Wert von f_k in Richtung des Kopfkreises errechnet sich aus dem Kopfkreiswinkel α_k zu

$$\frac{f_k}{\cos \alpha_k}.$$

Der diesem Wert entsprechende Zentriwinkel ergibt sich durch Division mit dem Kopfkreishalbmesser r_k . Da die beiden Evolventen im Punkte R einen gemeinsamen Punkt besitzen, kann man für den Zentriwinkel folgende Gleichung aufschreiben:

$$\frac{f_k}{r_k \cos \alpha_k} + \text{inv } \alpha_k - \text{inv } \alpha_R = \text{inv } \alpha'_k - \text{inv } \alpha'_R.$$

Da $r_k \cos \alpha_k = r_g$ ist, ergibt sich mit diesem Ausdruck die Gleichung

$$f_k = r_g [(\text{inv } \alpha'_k - \text{inv } \alpha_k) - (\text{inv } \alpha'_R - \text{inv } \alpha_R)]. \quad (12)$$

Diese Formel gibt also mit den Daten des Rades die Größe der Profilrücknahme an. Bei dieser Kontrollrechnung muß man besonders bei den Involutwinkeln große Genauigkeit anstreben, da mit der Differenz einander sehr nahe liegender Involutwinkelwerte gearbeitet werden muß, wie aus der Formel ersichtlich ist.

Die Zahndicke am Kopfkreis kann aus der bekannten Zahndicke im Teilkreis aus folgender Formel berechnet werden:

$$s_k = 2r_k \left(\frac{s_0}{2r_0} + \text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_k \right). \quad (13)$$

Die im Kopfkreis verkleinerte Zahndicke s_{kR} ergibt sich nach Abb. 4, indem man den in Richtung des Kopfkreises errechneten Wert von f_k mit zwei multipliziert, aus dem mit Hilfe der Formel (13) berechneten s_k Wert subtrahiert. Demnach schreibt sich die verminderte Zahnkopfdicke zu

$$s_{kR} = s_k - 2 \frac{f_k}{\cos \alpha_k}. \quad (14)$$

Das Maß der Profilrücknahme läßt sich durch Messung der derart berechneten Kopfdicke am fertigen Rad nicht genau kontrollieren, da die Kopfstärke meßrechnerisch nur außerordentlich ungenau erfaßbar ist. Zweckmäßiger wird man die Kontrolle auf dem Evolventenprüfgerät durchführen, an dem die Werte in Richtung der Profilrücknahme in 400—500facher Vergrößerung ablesbar sind. Es empfiehlt sich, auch in der Zahnradzeichnung das zu erwartende Profildiagramm (siehe Abb. 5) anzugeben, in welchem man das Maß der Profilrücknahme mit dem Maß des Vergrößerungsmaßstabes des Evolventenprüfgerätes angibt. Der Diagrammwert k_R ist in der Zeichnung entsprechend der Vergrößerung des Prüfgerätes festzulegen. Bei genauer

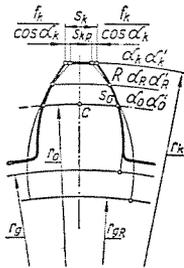


Abb. 4. Die Verminderung der Zahnkopfstärke bei der Evolventenprofilrücknahme



Abb. 5. Profildiagramm beim Evolventenprüfgerät im Falle der Profilrücknahme

Herstellung müssen zu dem angegebenen Profildiagramm auch die Toleranzen dieser Werte angegeben werden. Zur Herstellung der Profilrücknahme ist übrigens auch die Angabe des Profilwinkels α'_0 der Profilrücknahme erforderlich, da dies zur Einstellung der Zahnschleifmaschine nötig ist; überdies benötigt man auch die Höhe f_k zusammen mit ihrem Toleranzwert.

Zahlenbeispiel

Bei einem Zahnräderpaar mit den Zähnezahlen $z_1 = 17$ und $z_2 = 44$, dem Modul $m = 10$ mm und dem Werkzeug-Eingriffswinkel $\alpha_0 = 20^\circ$ sei der vorgeschriebene Achsabstand $a = 310$ mm. Bei dem kleinen Rad sei eine Profilrücknahme mit $f_{k1} = 0,0332$ mm zu verwirklichen. Zu berechnen ist der beim Schleifen zur Herstellung der Profilrücknahme nötige Eingriffswinkel.

Die Teilkreishalbmesser sind

$$r_{01} = 85 \text{ mm} \quad \text{und} \quad r_{02} = 220 \text{ mm},$$

der normale Achsabstand ist $a_0 = 305$ mm.

Der Betriebseingriffswinkel errechnet sich zu

$$\cos \alpha_b \frac{305 \cos 20^\circ}{310} = 0,924536 \text{ und hieraus } \alpha_b = 22^\circ 24' 5''.$$

Die Profilverschiebungsfaktoren für ausgeglichenes spezifisches Gleiten sind $x_1 = 0,428$ und $x_2 = 0,10126$. Mit diesen sind die Kopfkreisradiuswerte der zur Beibehaltung des Kopfspieles nötigen Kopfkreisabkürzung

$$r_{k1} = 98,9874 \text{ mm und } r_{k2} = 230,72 \text{ mm}.$$

Die Grundkreisradiuswerte sind

$$\begin{aligned} r_{g1} &= 85 \cos 20^\circ = 79,8739 \text{ mm,} \\ r_{g2} &= 220 \cos 20^\circ = 206,7325 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Die Eingriffsteilung beträgt

$$t_g = 10 \pi \cos 20^\circ = 29,521 \text{ mm}.$$

Mit diesen Werten ist der Überdeckungsgrad

$$\varepsilon = 1,44869.$$

Da $\varepsilon > 1,4$ wenden wir $K = 1,2$ als Faktor der Eingriffsteilung an, es wird also

$$Kt_a = 1,2 \cdot 29,521 = 35,4252 \text{ mm}.$$

Somit ist beim Ritzel der Grenzkreis der Profilrücknahme auf Grund der Formel (3)

$$\begin{aligned} r_{R1} &= \sqrt{(310 \cdot \sin \alpha_b - \sqrt{230,72^2 - 206,7325^2 + 35,4252^2} + 79,8739)^2} = \\ &= 94,835 \text{ mm} \end{aligned}$$

und die Entfernung \overline{AB}

$$\overline{AB} = \sqrt{98,9874^2 - 79,8739^2} - \sqrt{94,835^2 - 79,8739^2} = 7,3417 \text{ mm}.$$

Damit wird

$$l = \overline{AB} \operatorname{tg} 20^\circ = 7,3417 \operatorname{tg} 20^\circ = 2,672 \text{ mm}.$$

Die zum vorgeschriebenen Profilrücknahmewert von 0,0332 mm nötige

Winkelzunahme Δa beträgt

$$\operatorname{tg} \Delta a = \frac{0,0332}{2,672} = 0,012425 \text{ und hieraus } \Delta a = 0^\circ 42' 42''.$$

Der für die Profilirücknahme nötige Schleifscheibenwinkel beträgt also

$$a'_0 = 20^\circ 42' 42''.$$

Somit wird der zur Profilirücknahme nötige Grundkreishalbmesser nach Gleichung (9)

$$r_{gR} = 85 \cos 20^\circ 42' 42'' = 79,506635 \text{ mm.}$$

Zur Kontrolle sind die einzelnen Winkelwerte bzw. die Involutwerte die folgenden:

$$\cos a_k = \frac{79,8739}{98,9874} = 0,806909 \quad \operatorname{inv} a_k = 0,100126$$

$$\cos a_R = \frac{79,8739}{94,835} = 0,842240 \quad \operatorname{inv} a_R = 0,070710$$

$$\cos a'_k = \frac{79,506535}{98,9874} = 0,803193 \quad \operatorname{inv} a'_k = 0,103523$$

$$\cos a'_R = \frac{79,506535}{94,835} = 0,838367 \quad \operatorname{inv} a'_R = 0,073684.$$

Mit diesen Involutwerten wird gemäß Formel (12)

$$\begin{aligned} f_{k1} &= 79,8739([0,103523 - 0,100126] - [0,073684 - 0,070710]) = \\ &= 79,8739 - 0,000423 = 0,033786 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Von dem vorgeschriebenen Wert 0,0332 mm unterscheidet sich der oben angeführte Wert nur um $\sim 1,8\%$, somit kann man den berechneten Wert von a'_0 als genügend genau ansehen.

Zusammenfassung

Bei geradverzahnten Stirnrädern ist es zweckmäßig, die Profilirücknahme bei geringen Überdeckungsgraden bis zum äußeren Einzeleingriffspunkt, bei größeren Überdeckungsgraden ein wenig über diesen Punkt hinaus vorzunehmen, dessen Halbmesser sich mit Hilfe des Faktors der Eingriffsteilung berechnen läßt. Bei Erzeugung einer Evolventen-Profilirücknahme kann man die vergrößerte Winkeleinstellung der Schleifscheibe durch das Zahnstangenwerkzeug benützen. Aus dem so errechneten Winkel läßt sich zur Kontrolle der bei der Profilirücknahme am Kopf des Zahnrades sich ergebende Profilirücknahmewert anhand evolventen-geometrischer Zusammenhänge errechnen. Die Endkontrolle der Profilirücknahme der hergestellten Räder kann mit Evolventenprüfgeräten durchgeführt werden.

LITERATUR

1. WALKER, H.: Gear Tooth Deflection and Profile Modification. The Engineer. Oct. 1938. Aug. 1940.
2. KARAS, F.: Elastische Formänderung und Lastverteilung beim Doppeleingriff gerader Stirnradzähne. VDI Forschungheft. 406 (1941).
3. WEBER, C.—BANASCHEK, K.: Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern. Fr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1953.
4. ERNEY, G.: Berechnung und Prüfung der Profilrücknahme geradverzahnter Evolventenstirnräder. Konstruktion 14, 30 (1962).
5. SCHLAF, G.: Verbesserung der Tragfähigkeit und Laufruhe geradverzahnter Stirnräder durch Profilrücknahme. Maschinenbautechnik 11, 83 (1962).
6. VÖRÖS, I.: Fogdeformációk és dinamikus terhelések fogaskerekeknél. Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest 1955.

Prof. Dr. I. Vörös, Budapest, XI., Műgyetem rkp. 3. Ungarn.