ÜBER DIE TOPOLOGISCHE STRUKTUR METRISCHHOMOGENER RÄUME

Von

J. SZENTHE

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 28 Dezember, 1962)

Eine Hauptaufgabe der mengentheoretischen Geometrie besteht darin, differentialgeometrische Probleme rein geometrisch zu behandeln. Diese Bestrebung, die ursprünglich die Koordinaten auszuschalten und die Sätze von den Differenzierbarkeitsannahmen unabhängig zu machen suchte, also nur von methodischer Art war, führte später zu neuen Ergebnissen, die außerhalb der Reichweite der früheren Theorien zu liegen kommen. Dieser Bestrebung entsprechend hat H. BUSEMANN eine ganze Theorie entwickelt, die sich auf die erfolgreiche Begriffsbildung des sogenannten G-Raumes[1] gründet. Der topologische Inhalt des durchaus geometrischen Begriffes der G-Räume scheint sich aber nicht einfach klären zu lassen. Mehrere Gründe sprechen dafür, daß jeder G-Raum eine topologische Mannigfaltigkeit ist, doch ist es bisher nicht einmal gelungen, jene einfachere Frage zu entscheiden, ob jeder G-Raum von endlicher Dimension ist.[2] Diese Frage, die sich auf die topologische Struktur bezieht, läßt sich leichter behandeln, wenn man statt des G-Raumes einen engeren Raumbegriff betrachtet. Diesen engeren Begriff führen wir dadurch ein, daß wir G-Räume betrachten, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

Zu jedem Punkt p des Raumes R gibt es eine positive Zahl $\varkappa_p$, bei der für $0 < \varkappa \leqq \varkappa_p$ die abgeschlossenen sphärischen Umgebungen mit dem Radius $\varkappa$ des Punktes p stark konvex[3] sind; betrachtet man bei einem Punkt p des Raumes R das Supremum $\varkappa(p)$ der Zahlen $\varkappa_p$, die dieser Bedingung genügen, so ist das Infimum von $\varkappa(p)$ auf jeder beschränkten Teilmenge des Raumes R positiv.

Es läßt sich nachweisen, daß die so eingeführte Einschränkung unwesentlich ist, da jedes interessantes Problem der Differentialgeometrie in das Gebiet dieses engeren Raumbegriffes fällt.

[1] BUSEMANN [1], S. 37.
[2] RINOW [2], S. 193.
[3] RINOW [2], S. 183.

Für G-Räume R, die den oben formulierten Bedingungen genügen, lassen sich die beiden folgenden Sätze beweisen:

Besitzt der Raum R eine abgeschlossene Gruppe von Isometrien, so ist diese Leine LIEsche Gruppe.

Ist der Raum R metrischhomogen, besitzt er also eine transitive Gruppe von Isometrien, so ist R eine topologische Mannigfaltigkeit.

Literatur

1. BUSEMANN, H.: The geometry of geodesics (New York, 1955)
2. RINOW, W.: Die innere Geometrie der metrischen Räume (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961)

J. SZENTHE, Budapest XI., Stoczek u. 4. Ungarn