UNTERSUCHUNG DES GESCHLOSSENEN RAHMENWERKS IN DER EBENE

Von

B. SÁLYI

Lehrstuhl der Technischen Mechanik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 19. Januar, 1963)

Den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet die Untersuchung der Kräfteverhältnisse der geschlossenen Rahmenkonstruktionen in der Ebene. Solche Konstruktionen sind stets statisch vielfach unbestimmt. Die Bestimmung der gesamten äußeren und inneren Kräfte wird nur möglich, wenn wir neben den statischen Gleichgewichtsgleichungen auch die Deformationsgleichungen anschreiben, die der Zahl der Unbestimmten entsprechen. Bei

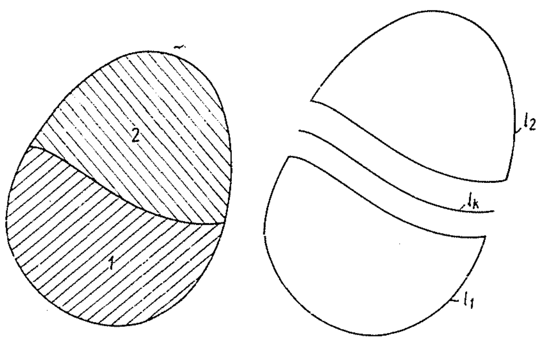

Abb. 1

einer allgemeinen Lösungsmethode können die Unbekannten nur als Lösung des aus statischen und formverändernden Gleichungen gebildeten gesamten Gleichungssystems ermittelt werden, und zwar im Zusammenhang miteinander.

Durch eine besondere Auswahl der Gleichungen wird es jedoch möglich, die Bestimmungen der einzelnen Unbekannten von einander unabhängig zu gestalten, das heißt die Unbekannten von einander zu trennen. Die gegenwärtige Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung der statisch sechsfach unbestimmten Rahmen, bei Belastungen, bei denen sämtliche Kraftwirkungen in die Ebene des Rahmens fallen.

Zur Aufstellung der Formänderungsgleichungen bzw. zur Berechnung der Deformationsarbeit wird — wie bei ähnlichen Konstruktionen üblich —

die Annäherungsmethode angewendet, die die totale Deformationsarbeit der durch Biegung bewirkten Deformationsarbeit gleichsetzt und die durch Scher- und Zugbeanspruchungen bewirkten Formänderungen vernachlässigt.

In Abb. 1 ist ein statisch sechsfach unbestimmter, zweifach geschlossener Rahmen dargestellt. Der Rahmen teilt sich in ein Feld 1 und ein Feld 2, die von den l_1 und l_2 langen, geschlossenen Kurven begrenzt sind. Die Länge des gemeinsamen Abschnittes der beiden Kurven ist l_k.

Schreibt man zum Beispiel die Formänderungsgleichungen nach dem Theorem von Castigliano auf, so muß man die Konstruktion mit der Aufhebung des Formänderungszwanges, dessen Zahl mit der der Unbestimmtheiten identisch ist, statisch bestimmt gestalten. Um die Unbestimmtheit zu beseitigen,

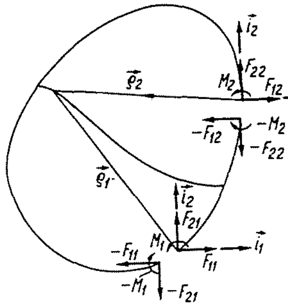

Abb. 2

wird zum Beispiel der Rahmen in zwei Punkten aufgeschnitten (Abb. 2) und die Unterbrechung (der stofflichen Kontinuität) durch entsprechende Kraftwirkungen ersetzt. Unsere weitere Aufgabe besteht eben in Bestimmung dieser Kraftwirkungen. Die Formänderungsgleichungen, die wir aufschreiben, werden beweisen, daß an der Stelle der Aufspaltungen die relative Verschiebung — Verrückung und Verschränkung — der beiden Stab-Enden Null beträgt.

Das Biegemoment ergibt sich aus dem der aktiven Belastung und dem Moment der Unbekannten Kraftwirkungen.

$$\vec{M} = \vec{M}_a + \sum_{i,j}^{2} (\vec{F}_{ij} \times \vec{\varrho}_j + \vec{M}_j) = \vec{M}_a + \sum_{i,j}^{2} (F_{ij}\vec{i}_j \times \vec{\varrho}_j + M_j\vec{k}). \tag{1}$$

Aus Abb. 2 geht klar hervor, daß die Kräfte $\vec{F}_{ij}$, bzw. das Kräftepaar $\vec{M}_j$ nur auf der Kurve l_j ein Biegemoment erzeugt. Im ganzen Rahmen werden also im Biegemoment nur auf dem Kurvenabschnitt l_k alle sechs Unbekannte zusammen vorkommen.

Die Formänderungsgleichungen, die sich auf die j-te Aufspaltung beziehen, lassen sich wie folgt aufschreiben:

$$\left.\begin{aligned}
f_{1j} &= \frac{\partial L}{\partial F_{1j}} = \frac{1}{E}\int\limits_{l} \frac{\vec{M}}{I}\,\frac{\partial \vec{M}}{\partial F_{1j}}\,ds = \frac{1}{E}\,\vec{i}_1 \int\limits_{l_j} \vec{\varrho}_j \times \frac{\vec{M}}{I}\,ds = 0\\
f_{2j} &= \frac{\partial L}{\partial F_{2j}} = \frac{1}{E}\int\limits_{l} \frac{\vec{M}}{I}\,\frac{\partial \vec{M}}{\partial F_{2j}}\,ds = \frac{1}{E}\,\vec{i}_2 \int\limits_{l_j} \vec{\varrho}_j \times \frac{\vec{M}}{I}\,ds = 0,\\
\varphi_j &= \frac{\partial L}{\partial M_j} = \frac{1}{E}\int\limits_{l} \frac{\vec{M}}{I}\,\frac{\partial \vec{M}}{\partial M_j}\,ds = \frac{\vec{k}}{E}\int\limits_{l_j} \frac{\vec{M}}{I}\,ds = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial F_{ij}} = \vec{i}_i \times \vec{\varrho}_j \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial M_j} = \vec{k}.$$

Diese drei Gleichungen beweisen, daß längs der geschlossenen Kurve l_j das Vektorsystem $\frac{\vec{M}}{I}$ ein Gleichgewichts-Vektorsystem bildet. Nach diesem Gedankengang können wir dasselbe für sämtliche geschlossene Kurven des

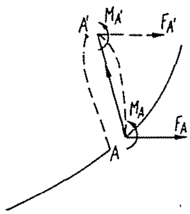

Abb. 3

Rahmens beweisen. Konstanten Querschnitt angenommen (I = konstant) bedeutet dies, daß das Vektorsystem des Biegemoments an jeder geschlossenen Kurve entlang Gleichgewichtsvektorsysteme bildet. Im folgenden wollen wir uns zuerst mit der Untersuchung derartiger Rahmen mit konstantem Querschnitt befassen.

Aus der obigen Feststellung ergibt sich, daß auch die Formänderungsgleichungen als statische Gleichgewichtsgleichungen behandelt werden können, wenn wir mit den Resultierenden des Momentenvektorsystems aus der aktiven Belastung bzw. aus den unbekannten Kraftwirkungen rechnen.

In einer früheren Arbeit habe ich schon bewiesen, daß die Resultierende des Momentenvektorsystems einer Kraft $\vec{F}$, die als längs einer in ihrer eigenen Ebene gelegenen, l langen Kurve wirkend gedeutet wird, an dem auf den Schwerpunkt der Kurve bezogenen Antipol der Kraftwirkungslinie angreift. Dies bedeutet, daß der Angriffspunkt der Resultierenden an der Antipolaren des Angriffspunktes der Kraft liegt. Offensichtlich kann ferner der Schnittpunkt A auf einen beliebigen, außerhalb der Rahmenkurve gelegenen Punkt A' verschoben werden, wenn man den Rahmen, der Abb. 3 entsprechend, mit absolut starren Stäben ergänzt, die an die durch die Aufspaltung entstandenen Stab-Enden starr befestigt sind. Die Berechnungen werden durch die Momente, die auf den starren Teilen des Stabes auftreten, nicht beeinflußt, weil auf diesen Abschnitten stets $\frac{1}{IE} = 0$. Doch ändert sich durch die Verschiebung der Wert des Kräftepaars, der bei der Aufspaltung entsteht, im allgemeinen gemäß

$$\vec{M}_{A'} = \vec{M}_A + \vec{F}_A \times \vec{\varrho}\,.$$

Im Sinne dieser Gleichung kann die Gleichheit $\vec{M}_{A'} = \vec{M}_A$ nur dann zu Recht bestehen, wenn die Verschiebung unmittelbar auf der Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_A$ erfolgt. Die Kraft bleibt jedoch unverändert, d. h. $\vec{F}_{A'} = \vec{F}_A$. Verändert man $\vec{\varrho}$, so findet sich unbedingt eine Stelle, an der $\vec{M}_{A'} = \vec{O}$.

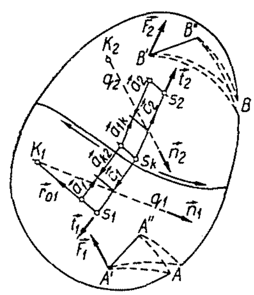

Abb. 4

Für die weitere Prüfung des Momentenvektorsystems entlang der Kurve l_1 sei die aus der Fläche der Zeichnung hinauszeigende Richtung $\vec{k}$ als positiv angenommen. Auch soll die Summation zur Bestimmung der Resultierenden entlang der beiden geschlossenen Kurven in der auf Abb. 4. sichtbarer Bewegungsrichtung erfolgen.

Die Größe und der Ortsvektor $\vec{r}_{01}$ des Angriffspunktes (Abb. 4) der aus der äußeren Belastung entstandenen Resultierenden $\vec{K}_1 = K_1\vec{k}$ hängt von der jeweiligen äußeren Belastung und davon ab, an welchen Punkten der Rahmen aufgeschnitten wurde. Wir verfügen über alle notwendigen Anhaltspunkte, um diese zu bestimmen.

Die durch die Aufspaltung entstandene Kraft $\vec{F}_1$ und das Kräftepaar $\vec{M}_1$ besitzen Momente längs der ganzen Kurve. Der zum ersteren gehörende Angriffspunkt der Resultierenden $\vec{P}_{11} = P_{11}\vec{k}$ wird sich an der auf dem Schwerpunkt S_1 bezogenen Antipolaren des Punktes A befinden, und der zum letzteren gehörende Angriffspunkt der Resultierenden $\vec{Q}_{11} = Q_{11}\vec{k}$ wird im Schwerpunkt S_1 liegen.

Die im Punkte B wirkende Kraft $\vec{F}_2$ und das Kräftepaar $\vec{M}_2$ haben nur auf den Abschnitt l_k der Kurve Momente. Wenn auf diesem Abschnitt, nach der auf Kurve l_2 angegebenen Fortbewegungsrichtung integriert, $\vec{P}_{k2}$ und $\vec{Q}_{k2}$, die der Kraft und dem Kräftepaar zugehörigen Resultierenden sind, so haben wir auf der Kurve l_1 (wegen der entgegengesetzten Fortbewegungsrichtung) mit den Resultierenden $-\vec{P}_{k2}$ und $-\vec{Q}_{k2}$ zu rechnen. Die erste greift an der auf die Kurve l_k und auf dem Schwerpunkt S_k bezogenen Antipolaren des Punktes B an, die zweite hingegen im Punkte S_k.

Nehmen wir eine durch den Punkt K_1 gehende und der Richtung $\vec{n}_1$ folgende Gerade an und verschieben wir den Punkt A auf den auf l_1 und S_1 bezogenen Antipol dieser Geraden und den Punkt B auf den auf l_k und S_k bezogenen Antipol dieser Geraden (Punkte A' und B'). Bei dieser Anordnung der Aufspaltung liegen die Resultierenden $\vec{P}_{11}$ und $-\vec{P}_{k2}$ auf der Geraden q_1. Schreibt man auf diese Gerade das Moment der Resultierenden auf, so werden in der Gleichung nur zwei Unbekannte vorkommen:

$$\vec{Q}_{11} = M_1' l_l \vec{k}, \quad -\vec{Q}_{k2} = -M_2' l_k \vec{k}$$

Nach der Abbildung ist

$$(\vec{Q}_{11} \times \vec{a}_1 - \vec{Q}_{k2} \times \vec{a}_{k2}) \vec{n}_1 = 0$$

oder

$$M_1' l_1 a_1 - M_2' l_k a_{k2} = 0,$$

und somit

$$\frac{M_1'}{M_2'} = \frac{l_k a_{k2}}{l_1 a_1} \tag{3}$$

Die Prüfung der Kurve l_2 zeigt, daß $\vec{K}_2 = K_2 \vec{k}$ die Resultierende jenes Vektorsystems ist, das den äußeren Kräften zugehört. Nach Annahme einer Geraden q_2 mit der Fortbewegungsrichtung $\vec{n}_2$, die den Angriffspunkt durchquert, verschieben wir einerseits den Punkt A auf den auf l_k und S_k bezogenen Antipol des Punktes A'' und anderseits den Punkt B auf den auf l_2 und S_2 bezogenen Antipol des Punktes B''. Nun liegen die Resultierenden $-\vec{P}_{k1}$, $\vec{P}_{22}$, die den Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zugehören, auf der Geraden q_2, die auf die Gerade aufgestellte Momentengleichung nimmt also die Form

$$(-\vec{Q}_{k1} \times \vec{a}_{k1} + \vec{Q}_{22} \times \vec{a}_2) \vec{n}_2 = 0.$$

an oder nochmals skalar

$$-M_1'' l_k a_{k1} + M_2'' l_2 a_2 = 0.$$

Hieraus wird

$$\frac{M_1''}{M_2''} = \frac{l_2 a_2}{l_k a_{k1}}. \tag{4}$$

Im allgemeinen decken sich die Punkte A' und A'' bzw. die Punkte B' und B'' nicht. Da uns die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ noch nicht bekannt sind, müssen wir vorerst voraussetzen, daß die Geraden $A'A''$ bzw. $B'B''$ nicht parallel zu den Wirkungslinien der Kräfte $\vec{F}_1$ bzw. $\vec{F}_2$ verlaufen, woraus sich ergibt, daß $M_1' \neq M_1''$ und $M_2' \neq M_2''$. Durch geeignete Wahl der Richtungen $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ läßt sich erreichen, daß

$$\frac{M_1'}{M_2'} = \frac{M_1''}{M_2''}$$

wird. Auf Grund der obigen Gleichungen ist dies der Fall, wenn

$$\frac{l_k a_{k2}}{l_1 a_1} = \frac{l_2 a_2}{l_k a_{k1}},$$

d. h. wenn

$$l_k^2 a_{k1} a_{k2} = l_1 l_2 a_1 a_2. \tag{5}$$

Wenn wir neben diesen Bedingungen noch sicherstellen könnten, daß $A' = A''$ bzw. $M_1' = M_2''$ sei, dann muß auch $M_2' = M_2''$ sein. Aus dieser letzteren Gleichheit ergibt sich, daß die Gerade $B'B''$ eben die Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_2$ darstellt.

Prüfen wir die Möglichkeit seiner Verwirklichung in dem angenommenen Spezialfall, daß auf der Kurve l_2 $\vec{K}_2 = \vec{O}$. Ziehen wir zu dieser Prüfung — auf Grund der Abb. 4 — in Betracht, daß

$$\vec{a}_{k2} = \vec{c}_1 + \vec{a}_1, \qquad a_{k2} = c_1 + a_1,$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_{k1} - \vec{c}_2, \qquad a_2 = a_{k1} - c_2.$$

Mit diesen Gleichungen nimmt (5) die Form

$$l_k^2 a_{k1} (c_1 + a_1) = l_1 l_2 a_1 (a_{k1} - c_2)$$

an. Dividieren wir diese Gleichung durch $a_1 a_{k1}$ und führen wir die möglichen Kürzungen durch, so haben wir

$$\frac{l_1 l_2 c_2}{a_{k1}} + \frac{l_k^2 c_1}{a_1} = l_1 l_2 - l_k^2 = L. \tag{6}$$

Da die Gerade q_1 den Punkt K_1 kreuzt und — auf l_1 und S_1 bezogen — die Antipolare des Punktes A ist, so besagt dies, daß der Punkt A bestimmt auf der Antipolaren q_{01} des Punktes K_1 liegt (Abb. 5), oder mit anderen Worten, daß sein Ortsvektor die Gleichung der Antipolaren q_{01} befriedigt, daß also

$$\vec{r}_{1A}\overline{\overline{J}}_1\vec{r}_{01}+\frac{J_{1II}}{l_1}=0.$$

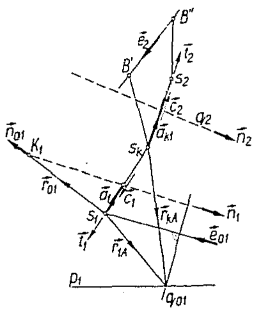

Abb. 5

$\overline{\overline{J}}_1$ ist hierbei der auf den Schwerpunkt S_1 bezogene Trägheitstensor der Kurve l_1. Wenn

$$\vec{r}_{01}=r_{01}\vec{n}_{01}\quad\text{und}\quad\overline{\overline{J}}_1\vec{n}_{01}=\vec{J}_{01}=J_{01}\vec{e}_{01},$$

dann ist

$$\vec{r}_{1A}\,\vec{e}_{01}\,r_{01}\,J_{01}+\frac{J_{1II}}{l_1}=0,$$

d. h.

$$\vec{r}_{1A}=-\frac{J_{1II}}{l_1\,r_{01}\,J_{01}}\vec{e}_{01}+\lambda_1(\vec{k}\times\vec{e}_{01}). \tag{7}$$

λ_1 ist vorläufig unbekannt.

Anderseits muß der Vektor $\vec{a}_1$ die Gleichung der Antipolaren q_1 befriedigen:

$$\vec{a}\,\overline{\overline{J}}_1\vec{r}_{1A}+\frac{J_{1II}}{l_1}=a_1\vec{t}_1J_1\vec{r}_{1A}+\frac{J_{1II}}{l_1}=0,$$

$$a_1=-\frac{J_{1II}}{l_1\vec{t}_1\overline{\overline{J}}_1\vec{r}_{1A}}\,. \tag{8}$$

Im entsprechend gewählten Fall wird die Gerade q_2 die auf die Kurve l_k und auf den Schwerpunkt S_k bezogene Antipolare des Punktes A. $\vec{a}_{k1}$ muß die Gleichung der Antipolaren befriedigen:

$$\vec{a}_{k1}\,\overline{\overline{J}}_k\,\vec{r}_{kA}+\frac{J_{kII}}{l_k}=a_{k1}\,\vec{t}_2\,\overline{\overline{J}}_k\,(\vec{r}_{1A}+\vec{c}_1)+\frac{J_{kII}}{l_k}=0,$$

$$a_{k1}=-\frac{J_{kII}}{l_k\,\vec{t}_2\,\overline{\overline{J}}_k\,(\vec{r}_{1A}+\vec{c}_1)}\,. \tag{9}$$

Weiterhin müssen a_1 und a_{k1} die Gleichung (6) befriedigen:

$$-\frac{l_1\,l_2\,l_k}{J_{kII}}\,\vec{c}_2\,\overline{\overline{J}}_k\,(\vec{r}_{1A}+\vec{c}_1)-\frac{l_1\,l_k^2}{J_{1II}}\,\vec{c}_1\,\overline{\overline{J}}_1\,\vec{r}_{1A}=L.$$

Nach Einführung der Bezeichnung $\dfrac{\overline{\overline{J}}}{J_{II}}={}^*\overline{\overline{J}}$ dividieren wir die Gleichung durch $-\,l_1 l_2$, dann haben wir nach den möglichen Kürzungen

$$(l_2\,\vec{c}_2{}^*\overline{\overline{J}}_k+l_k\,\vec{c}_1{}^*\overline{\overline{J}}_1\,(\vec{r}_{1A}-\left(l_2\,\vec{c}_2{}^*\overline{\overline{J}}_k\,\vec{c}_1+\frac{L}{l_1\,l_k}\right)=-\,B_1.$$

Mit der Bezeichnung

$$l_2\,\vec{c}_2{}^*\overline{\overline{J}}_k+l_k\,\vec{c}_1{}^*\overline{\overline{J}}_1=\vec{J}_{1r}=J_{1r}\,\vec{e}_{1r}$$

erhalten wir

$$\vec{r}_{1A}\,\vec{e}_{1r}+\frac{B_1}{J_{1r}}=0, \tag{10}$$

und hieraus

$$\vec{r}_{1A}=-\frac{B_1}{J_{1r}}\,\vec{e}_{1r}+\nu_1\,\vec{k}\times\vec{e}_{1r}. \tag{11}$$

Die Gleichung (10) ist die Gleichung der Geraden p_1 (Abb. 5). Punkt A muß auf diesen Geraden liegen. Der Schnittpunkt der beiden Geraden q_{01} und p_1 setzt den Ort des Punktes A eindeutig fest.

Aus den Gleichungen (7) und (11) können wir $\vec{r}_{1A}$ bestimmen:

$$-\frac{J_{1II}}{l_1\,r_{01}\,J_{01}}\,\vec{e}_{01}+\lambda_1\,(\vec{k}\times\vec{e}_{01})=-\frac{B_1}{J_{1r}}\,\vec{e}_{1r}+\nu_1\,\vec{k}\times\vec{e}_{1r}.$$

Man multipliziert die Gleichung skalar mit dem Vektor $\vec{e}_{1r}$ und berechnet λ_1

$$\lambda_1 = \frac{-\dfrac{B_1}{J_{1r}} + \dfrac{J_{1II}\,\vec{e}_{01}\,\vec{e}_{1r}}{l_1\,r_{01}\,J_{01}}}{\vec{k}\,\vec{e}_{01}\,\vec{e}_{1r}}\,.$$

Mit diesem Wert von λ_1 läßt sich aus Gleichung (7) der Wert von $\vec{r}_{1A}$ bestimmen:

$$\vec{r}_{1A} = -\frac{J_{1II}}{l_1\,r_{01}\,J_{01}}\left[\vec{e}_{01} - \frac{\vec{e}_{01}\,\vec{e}_{1r}}{\vec{k}\,\vec{e}_{01}\,\vec{e}_{1r}}\,\vec{k}\times\vec{e}_{01}\right] - \frac{B_1}{J_{1r}\,\vec{k}\,\vec{e}_{01}\,\vec{e}_{1r}}\,\vec{k}\times\vec{e}_{01} =$$

$$= \frac{J_{1II}}{l_1\,(\vec{k}\times\overline{\overline{J}}_1\,\vec{r}_{01})\,\vec{e}_{1r}}\,\vec{k}\times\vec{e}_{1r} - \frac{B_1}{\vec{k}\vec{e}_{01}\,\vec{J}_{1r}}\,\vec{k}\times\vec{e}_{01}\,, \qquad (12)$$

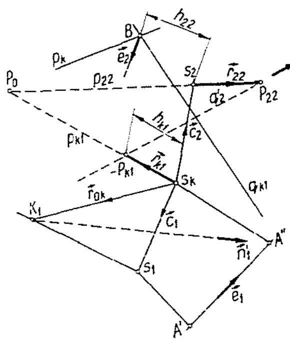

Abb. 6

da

$$[(\vec{k}\times\vec{e}_{01})\,\vec{e}_{1r}]\vec{e}_{01} - (\vec{e}_{01}\,\vec{e}_{1r})\,(\vec{k}\times\vec{e}_{01}) = -\,\vec{k}\times\vec{e}_{1r}$$

und

$$r_{01}\,J_{01}\,\vec{e}_0 = \overline{\overline{J}}_1\,\vec{r}_{01}, \quad J_{1r}\,\vec{e}_{1r} = \vec{J}_{1r}\,.$$

Seinerseits bestimmt Punkt A die Geraden q_1 und q_2 als auf S_1 bzw. S_k bezogenen Antipolare des Punktes A. Die Punkte B' und B'' geben die auf S_k bzw. auf S_2 bezogene Antipole der Geraden q_1, bzw. q_2 an. Die Gerade $B'B''$ bestimmt hingegen ihrerseits die Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_2 = F_2\vec{e}_2$, das heißt $\vec{e}_2$.

Mit dem selben Schlußverfahren können wir die Richtung $\vec{e}_1$ der Kraft $\vec{F}_1$ ermitteln. In diesem Falle muß der Punkt B festliegen, u. zw. muß er auf der auf Kurve l_k und auf Punkt S_k bezogenen Antipolaren q_{k1} des Punktes K_1 sowie auf der durch die Gleichung

$$\vec{r}_{kB}\,\vec{e}_{2r} + \frac{B_2}{J_{2r}} = 0$$

bestimmten Geraden p_k liegen (Abb. 6). In diesem Falle ist der Punkt B der Schnittpunkt dieser beiden Geraden. Die in die Gleichung p_k eingesetzten Werte sind:

$$l_1 \vec{c}_1^* \overline{\overline{J}}_k + l_k \vec{c}_2^* \overline{\overline{J}}_2 = \vec{J}_{2r} = J_{2r} \vec{e}_{2r},$$

$$\frac{L}{l_2 l_k} - l_k \vec{c}_2^* J_2 \vec{c}_2 = B_2,$$

Der Wert von $\vec{r}_{kB}$ läßt sich ebenso bestimmen wie früher der Wert von $\vec{r}_{1A}$:

$$\vec{r}_{kB} = \frac{J_{kII}}{l_k (\vec{k} \times \overline{\overline{J}}_k \vec{r}_{ok}) \vec{e}_{2r}} \vec{k} \times \vec{e}_{2r} - \frac{B_2}{\vec{k} \vec{e}_{02} \vec{J}_{2r}} \vec{k} \times \vec{e}_{0k} \tag{13}$$

Die Gerade q_1 ist die auf l_k und S_k bezogene Antipolare des Punktes B, und Punkt A' ist das auf l_1 und S_1 bezogene Antipol derselben Geraden. Die auf l_2 und S_2 bezogene Antipolare des Punktes B ist die Gerade q_2', deren auf l_k und S_k bezogener Antipol hingegen der Punkt A''. Die Richtung der Geraden $A'A''$ entspricht der Richtung von $\vec{e}_1$. Die Richtung der Antipolaren und des Ortsvektors des Antipols sind einander konjugiert zugeordnet. Bezeichnet man den auf S_2 bezogenen Ortsvektor von $\vec{P}_{22}$ mit $\vec{r}_{22}$, so erhält man

$$\vec{r}_{22} \overline{\overline{J}}_2 \vec{e}_2 = 0, \qquad \vec{r}_{22} = \varkappa_{22} \vec{k} \times \overline{\overline{J}}_2 \vec{e}_2,$$

$$\varkappa_{22} = (\vec{r}_{22} \times \vec{e}_2) \vec{k} = h_{22}\,.$$

Für den auf S_k bezogenen Ortsvektor $\vec{r}_{k1}$ läßt sich

$$\vec{r}_{k1} \overline{\overline{J}}_k \vec{e}_1 = 0, \qquad \vec{r}_{k1} = \varkappa_{k1} \vec{k} \times \overline{\overline{J}}_k \vec{e}_1 = \frac{\vec{k} \times \overline{\overline{J}}_k \vec{e}_1}{h_{k1}}$$

schreiben. Wenn wir die Kurve l_2 prüfen, finden wir, daß sich dort zusammen vier Resultierende das Gleichgewicht halten, und zwar $\vec{P}_{22}$, $-\vec{P}_{k1}$, $\vec{Q}_{22}$, $-\vec{Q}_{k1}$. Die Angriffspunkte der beiden letzteren sind, unabhängig von der Lage der Punkte A und B, die Punkte S_2 bzw. S_k. Die Angriffspunkte der beiden ersteren Resultierenden bewegen sich jedoch infolge des Wechsels der Lage von Punkt A bzw. Punkt B auf den Geraden p_{k1} bzw. p_{22}.

Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist der Punkt P_0. Die auf S_k bzw. S_2 bezogenen Antipolare des Punktes P_0 sind die Gerade p_{0k} bzw. p_{02}. Liegt der Punkt A auf der Geraden p_{0k} und der Punkt B auf der Geraden p_{02}, dann fallen die Angriffspunkte beider Resultierenden $-\vec{P}_{k1}$ und $\vec{P}_{22}$ in den Punkt P_0. Unter solchen Bedingungen kann das Gleichgewicht nur dann bestehen, wenn $\vec{Q}_{k1} = \vec{Q}_{22} = \vec{O}$, das heißt wenn $M_1 = M_2 = 0$.

Jetzt können die Werte der noch Unbekannten F_1 und F_2 unschwer bestimmt werden. Auf der Kurve l_1 halten die Resultierenden $\vec{K}_1$, $\vec{P}_{11}$, $-\vec{P}_{k2}$ einander das Gleichgewicht (Abb. 7). Der Angriffspunkt von $\vec{P}_{11}$ ist das auf l_1 und S_1 bezogene Antipol der Geraden p_{0k}, der Angriffspunkt von $\vec{P}_{k2}$ dagegen das auf l_k und S_k bezogene Antipol der Geraden p_{02}. Aus der für die Punkte P_{11} und P_{k2} aufgeschriebenen Momentengleichung lassen sich die Werte von F_1 und F_2 einzeln ermitteln.

Die Berechnung kann auf dieselbe Art durchgeführt werden, wenn $\vec{K}_1 = \vec{0}$ und $\vec{K}_2 \neq \vec{0}$.

Endlich können wir die Berechnung für $\vec{K}_1 \neq \vec{0}$ und $\vec{K}_2 \neq \vec{0}$ nach dem Prinzip der Superposition in zwei Schritten durchführen.

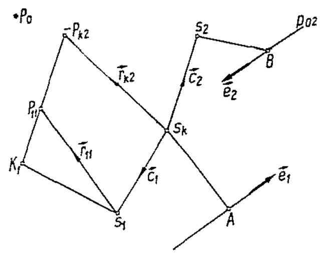

Abb. 7

Die Aufgabe kann nach der bekannten Methode der Antipolaren und des Antipols auch graphisch gelöst werden.

Es sei noch bemerkt, daß bei veränderlichem Querschnitt ($I \neq$ konstant) und mit der Bezeichnung $d\mu = \frac{ds}{I}$ (wo $d\mu$ das Massenelement der »schweren Linie« ist), die Berechnung gleichfalls auf die beschriebene Weise vorgenommen werden kann. Bei dieser Berechnung müssen jedoch selbstverständlich die Schwerpunkte und die Trägheitstensoren der schweren Linie berücksichtigt werden.

Zusammenfassung

Die Arbeit untersucht die Kräfteverhältnisse an statisch sechsfach unbestimmten Rahmen, die eine zweifach geschlossene, ebene Kurve bilden, für den Fall einer in die Ebene des Rahmens fallenden Belastung und beschreibt eine Methode zu einer voneinander unabhängigen Bestimmung der unbekannten Kraftwirkungen vor. Die Methode beruht auf der Erkenntnis, daß das an jeder geschlossenen Kurve des Rahmens angreifende Biegemoment-Vektorsystem ein Gleichgewichts-Vektorsystem bildet. Die Berechnung kann also mit Hilfe der Resultierenden des Biegemoment-Vektorsystems wie eine statische Berechnung durchgeführt werden.

B. Sályi, Budapest, V. Szerb u. 23. Ungarn