

# DAS KRÄFTESPIEL IN EINER INFOLGE DER TÜRÖFFNUNG UNSYMMETRISCHER OMNIBUSKAROSSERIE MIT ELASTISCHEN QUERTRÄGERN

Von

P. MICHELBERGER

Lehrstuhl für Schienenfahrzeuge, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 19. Dezember 1962)

Vorgelegt von Prof. Dr. G. Rudnai

## 1. Einleitung

Wie in unserem Aufsatz [1] nachgewiesen, wird man das Kräftespiel in einer wegen der Tür örtlich unsymmetrischen Konstruktion zweckmäßig in zwei Schritten berechnen. Zunächst wird das Kräftespiel in der in Gedanken zu einer symmetrischen ergänzten Konstruktion bestimmt, wobei man sich die durch die Symmetrie gegebenen Vorteile zunutze machen kann. Im zweiten Schritt dagegen lassen wir eine der fiktiven Belastung entgegengesetzte, an der Türöffnungsstelle angreifende Belastung auf die Konstruktion wirken; diese Belastung ruft nur an einem verhältnismäßig geringen Teil der ganzen Konstruktion eine wesentliche Beanspruchung hervor, deren Untersuchung erheblich einfacher ist als die direkte Berücksichtigung der unsymmetrischen Konstruktion.

Das erwähnte Verfahren ging von zwei annähernden Annahmen aus:

1. die Eigensteifigkeit des Türrahmens wurde außer acht gelassen und
2. wurden die Querträger als unendlich steif betrachtet.

Ein Verfahren, das auch die Steifigkeit des Türrahmens in Betracht zieht, wurde in einem weiteren Aufsatz [2] ausgearbeitet, doch fehlt bisher eine Analyse der zusätzlichen Belastung, die an Omnibussen mit elastischen Querträgern durch die Türöffnung verursacht wird.

## 2. Allgemeine Untersuchung des mit Ausnahme des Türabschnittes symmetrischen Omnibusses

Es sei ein Kraftomnibus mit Bodenrahmen oder Fahrgestell untersucht, der an der rechten Seite des Wagenkastens eine einzige Tür besitzt (Abb. 1). Das statische Modell der Karosserie und das zur Untersuchung gewählte statisch bestimmte Grundsystem sind in Abb. 2 dargestellt. Die Trägheitsmomente der Querträger sind mit  $I$ , die der Seitenwand mit  $I'$  und jene der Längsträger mit  $I''$  bezeichnet. In den Berechnungen können, wie dies im

Aufsatz [1] festgestellt wurde, die Drehbeanspruchungen, die von den Querträgern aus auf die Längstragelemente und umgekehrt wirken, vernachlässigt werden. Durch diese Verdrehung wird das KräfteSpiel in der Rahmenkonstruktion wegen der geringen Drehsteifigkeit der einzelnen Tragelemente nur unwe-

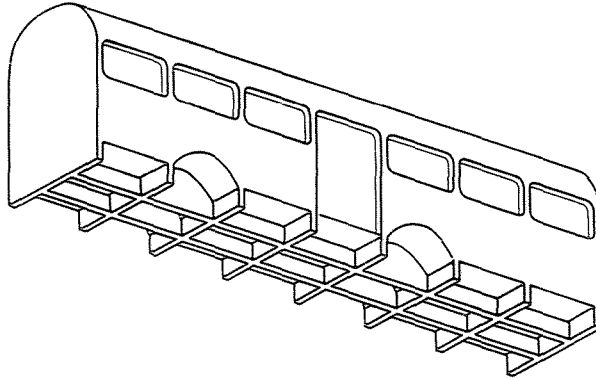


Abb. 1. Schema einer Omnibuskarosserie mit einer etwa in der Mitte des Wagenkastens angebrachten Tür

sentlich beeinflusst. Die zur Herstellung des Grundsystems erforderlichen einzelnen Durchschnitte sind, von der Tür nach vorn und nach hinten gerechnet, gleicherweise mit 1 beginnend numeriert. Zur Unterscheidung sind jedoch die

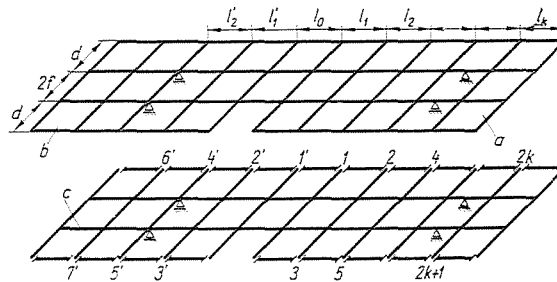


Abb. 2. Statisches Modell eines Omnibusses mit Fahrgestell bzw. Bodenrahmen und das Grundsystem zur Bestimmung des KräfteSpiels.  $a$  — Querträger;  $b$  — Seitenwand;  $c$  — Längsträger

Durchschnitte (die Unbekannten), die zwischen Tür und hinteres Ende des Wagenkastens zu liegen kommen, mit dem Zeichen ' bezeichnet. Zwischen den Beiwerten (Einheitsfaktoren) des Gleichungssystems, das zur Bestimmung der inneren Kräfte eines — abgesehen vom Türabschnitt — symmetrisch aufgebauten Omnibusses dient, bestehen nach den Gleichungen (3) des Aufsatzes [1], wenn  $k \geq 3$ , die Beziehungen

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{wenn} \quad \delta_{2k,2k+i} = \delta_{2k+1,2k+i+1}, \\
 \quad \quad \quad i = -4, -2, 0, 2, 4, \quad \text{und} \\
 \text{wenn} \quad \delta_{2k,2k+i} = \delta_{2k+1,2k+i-1}, \\
 \quad \quad \quad i = -3, -1, 1, 3, 5.
 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Im weiteren wird angenommen, daß das Kräftespiel in der in Gedanken zu einer symmetrischen ergänzten Karosserie bekannt ist und daß nur die Wirkung der an der Türöffnung angreifenden Störbelastung untersucht zu

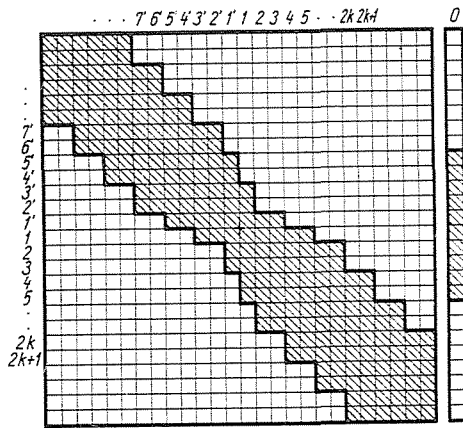


Abb. 3. Schema des Gleichungssystems zur Bestimmung der inneren Kräfte eines Omnibusses

werden braucht. In diesem Fall läßt sich — unter Berücksichtigung von (1) — stets die  $2k$ -te und  $2k + 1$ -te Formänderungsgleichung in der Form

$$\left. \begin{array}{l}
 AX_{2k-4} + BX_{2k-3} + CX_{2k-2} + DX_{2k-1} + EX_{2k} + FX_{2k+1} + \\
 \quad + GX_{2k+2} + HX_{2k+3} + IX_{2k+4} + JX_{2k+5} = 0 \\
 BX_{2k-4} + AX_{2k-3} + DX_{2k-2} + CX_{2k-1} + FX_{2k} + EX_{2k+1} + \\
 \quad + HX_{2k+2} + GX_{2k+3} + JX_{2k+4} + IX_{2k+5} = 0
 \end{array} \right\} \quad (2)$$

schreiben.

Das Schema des vollständigen Gleichungssystems, das den allgemeinen Gleichungen (2) zugehört, ist aus Abb. 3 ersichtlich. Im Schema bezeichnen die waagrechten Reihen die einzelnen Gleichungen, die senkrechten Spalten die einzelnen Unbekannten, während die letzte, alleinstehende Spalte die Belastungsfaktoren enthält. Die Beiwerte der durch schraffierte Felder gekennzeichneten Unbekannten haben von Null abweichende Werte, die den leeren Feldern entsprechenden Beiwerte hingegen den Wert Null.

Die Zahl der in einer Gleichung vorkommenden Unbekannten läßt sich erheblich reduzieren, wenn man statt der ursprünglichen Unbekannten deren lineare Kombinationen als neue Veränderliche betrachtet. Der Wert dieser neuen Veränderlichen am Abschnitt zwischen Tür und Frontpartie des Omnibusses ergibt sich zu

$$\left. \begin{aligned} Y_k &= X_{2k+2} + X_{2k+3} \\ Z_k &= X_{2k+2} - X_{2k+3} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

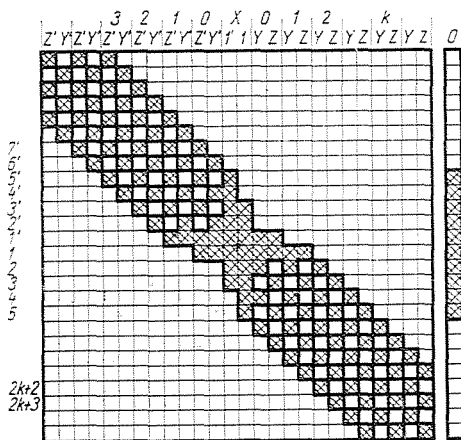


Abb. 4. Schema des durch Einführung der neuen Veränderlichen zu gewinnenden Gleichungssystems

während man von der Tür nach hinten

$$\left. \begin{aligned} Y'_k &= X'_{2k+2} + X'_{2k+3} \\ Z'_k &= X'_{2k+2} - X'_{2k+3} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

erhält, worin  $k = 0, 1, 2, \dots$  ganze Zahlen sind.

Die linearen Transformationen (3) und (4) sind richtig, da die Determinante, die aus den Beiwerten der an der rechten Seite der Gleichungen stehenden Unbekannten gebildet wird, nicht den Wert Null hat.

Die Einführung der neuen Veränderlichen führt für sich allein noch keineswegs zur Vereinfachung des Gleichungssystems, dazu muß zunächst nach Einführung der neuen Veränderlichen die Summe der  $k$ -ten und  $k + 1$ -ten Gleichungen (es entfallen die Unbekannten  $Z$ ) bzw. ihre Differenz (es entfallen die Unbekannten  $Y$ ) ermittelt werden. Das Resultat dieser Schritte erleichtert aus den Gleichungen (2) unmittelbar ein.

Der Ansatz der Gleichungen (3) und (4) hat zur Folge, daß die Unbekannten  $X_1$  und  $X'_1$  durch nicht neue Veränderliche ersetzt werden können.

In den einzelnen Gleichungen des neuen Gleichungssystems kommen im allgemeinen je 5 Unbekannte vor; eine Ausnahme bilden die beiden Gleichungen, die sich für die Deformationen der der Tür gegenüberliegenden Durchschnitte aufschreiben lassen, da in diesen die Zahl der Unbekannten je 8 beträgt. Das Schema des neuen Gleichungssystems ist in Abb. 4 dargestellt.

Prüft man die Gleichungen für die Deformation in einem von der Tür genügend weit entfernten Durchchnitt, so sind die beiden aufeinander folgenden Gleichungen als voneinander unabhängig zu betrachten. Die völlige Unab-

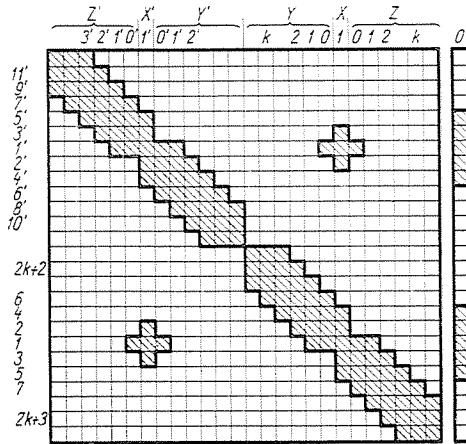


Abb. 5. Schema des Gleichungssystems nach Umgruppierung der Unbekannten und der Gleichungen

hängigkeit wird durch die Gleichungen mit den Unbekannten  $X_1$ , bzw.  $X'_1$  verhindert. Dies erhellt klar aus Abb. 5, in der das Schema des in Abb. 4. dargestellten Gleichungssystems etwas transformiert (d. h. mit geänderter Reihenfolge der einzelnen Gleichungen und Unbekannten) eingezeichnet ist. Die neuen Unbekannten bilden vier Gruppen, die beinahe als orthogonal zu betrachten sind. (Im weiteren sollen der Kürze halber die einzelnen Gruppen als orthogonal bezeichnet werden.) Die Lösung des auf diese Weise transformierten Gleichungssystems ist wesentlich einfacher als die des ursprünglichen.

### 3. Untersuchung einer Konstruktion mit regelmäßigem Aufbau

Bei einer regelmäßigen Konstruktion\* läßt sich je eine allgemeine Gleichung der orthogonalen Gruppen als eine homogene, lineare Differenzengleichung vierter Ordnung mit konstantem Beiwert auffassen, die in allge-

\* Die Konstruktion eines Omnibusses mit Fahrgestell bzw. Bodenrahmen wird regelmäßig genannt, wenn der Abstand zwischen den benachbarten Querträgern am ganzen Omnibus gleich, die Inertie des Längsträgers und der Seitenwand in ihrer ganzen Länge konstant und die Trägheitsmomente sämtlicher Querträger gleich sind.

meiner Form wie folgt geschrieben wird:

$$\text{bzw. } \left. \begin{aligned} Y_{k-2} + (\gamma_1 - 4) Y_{k-1} + (4\gamma_1 + 6) Y_k + (\gamma_1 - 4) Y_{k+1} + Y_{k+2} &= 0 \\ Z_{k-2} + (\gamma_2 - 4) Z_{k-1} + (4\gamma_2 + 6) Z_k + (\gamma_2 - 4) Z_{k+1} + Z_{k+2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wo

$$\gamma_1 = \frac{I^3}{2d^2(3f+d)} \left( \frac{1}{I'} + \frac{1}{I''} \right)$$

und

$$\gamma_2 = \frac{I^3}{2d^2(f+d)} \left[ \frac{1}{I'} + \frac{1}{I''} \left( \frac{f+d}{f} \right)^2 \right].$$

(Die mit ' bezeichneten Gleichungen sind nicht angeführt, da sie den Gleichungen (5) völlig identisch sind.)

Schreibt man nur die Lösung nach  $Y$  auf, da sich aus dieser  $Z$  durch Buchstabenwechsel derivieren läßt, ergibt sich die allgemeine Lösung der Differenzgleichung zu

$$Y_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k + C_3 \lambda_3^k + C_4 \lambda_4^k, \quad (6)$$

wo  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  und  $\lambda_4$  die Wurzeln der der Differenzgleichung zugehörigen charakteristischen Gleichung bezeichnen. Die charakteristische Gleichung schreibt sich zu

$$\lambda^4 + (\gamma_1 - 4) \lambda^3 + (4\gamma_1 + 6) \lambda^2 + (\gamma_1 - 4) \lambda + 1 = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung sind

$$\begin{aligned} \lambda_{(3,4)}^{1,2} &= \frac{\gamma}{4} + 1 - {}_{(+)} \frac{1}{4} \sqrt{\gamma^2 - 24\gamma} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{2} - 8\gamma + {}_{(-)} \left( \frac{\gamma}{2} - 2 \right) \sqrt{\gamma^2 - 24\gamma}} \end{aligned}$$

Zwischen den Wurzeln bestehen, wie dies ohne Schwierigkeit nachgewiesen werden kann, die Beziehungen

$$a) \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_4}.$$

b)  $\lambda_1$  und  $\lambda_3$  sowie  $\lambda_2$  und  $\lambda_4$  sind konjugierte komplexe Zahlen, wenn  $|\gamma| < 24$ .

c) In diesem Falle sind die absoluten Werte  $r$  der komplexen Wurzeln paarweise gleichfalls reziprok und der absolute Wert des von der wirklichen Achse eingeschlossenen Winkels  $\varphi$  ist bei allen vier Wurzeln gleich.

Da in der Praxis im allgemeinen  $\gamma < 24$ , verdienen zunächst die komplexen Wurzeln Interesse. Unter Berücksichtigung des Gesagten wird

$$Y_k = r_1^k C_1 \cos k \varphi_1 + C_3 \sin k \varphi_1 + \frac{1}{r_1^k} (C_2 \cos k \varphi_1 - C_4 \sin k \varphi_1). \quad (7)$$

Bei einer unendlich langen Konstruktion kommen nur die Wurzeln  $|r| < 1$  in Betracht (eine Konstruktion kann als unendlich lang betrachtet werden, wenn zwischen Tür und Wagenende mindestens 3 bis 5 Querträger

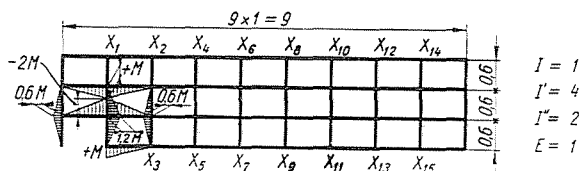


Abb. 6. Prinzipaufbau eines Omnibusrahmens und die Wirkung der durch die Türöffnung verursachten Störbelastung auf das Grundsystem

vorhanden sind; sind es weniger, dann ist es zweckmäßiger, das Gleichungssystem unmittelbar zu lösen. Es wird mithin

$$Y_k = r_1^k (C_1 \cos k \varphi_1 + C_3 \sin k \varphi_1) \quad (8)$$

bzw., weil  $C_1 = Y_0$

$$Y_k = r_1^k (Y_0 \cos k \varphi_1 + C_3 \sin k \varphi_1). \quad (8')$$

Eine ähnliche Form haben auch die Lösungen nach den Unbekannten bezüglich des Abschnitts von der Tür nach dem Wagenende zu, lediglich die Werte von  $Y'_0$  und  $C'_3$  zeigen Abweichungen, weil die äußere Belastung eventuell unsymmetrisch ist. Wenn der Bus nach vor und hinter der Tür in gleicher Weise als unendlich lang betrachtet werden kann, dann läßt sich die auf die Tür wirkende Störbelastung jederzeit in eine symmetrische (die auf die vordere und hintere Seite der Tür wirkenden Belastungen sind gleich) und in eine antisymmetrische Komponente zerlegen (die auf die vordere und hintere Türseite wirkenden Belastungen sind gleich, haben aber verschiedene Vorzeichen). Die Werte von  $Y_k$  und  $Z_k$  können immer durch die Werte von  $X_1$  und  $X'_1$  ausgedrückt werden. Zur Bestimmung der übriggebliebenen zwei Unbekannten können die bisher nicht benützten beiden Gleichungen dienen, die die Deformation des der Tür gegenüberliegenden Durchschnittes bestimmen.

Ist die Tür an einem der Enden des Busses angebracht, so läßt sich die Lösung der Aufgabe weiter vereinfachen. Dabei sind nur zwei orthogonale Gruppen (Kraftgruppen) vorhanden.

Die Werte von  $Y_0$  und  $Z_0$  können als Funktion von  $X_1$  ausgedrückt werden, während sich  $X_1$  aus der bisher nicht angewandten Gleichung mit einer Unbekannten bestimmen läßt.

#### 4. Zahlenbeispiel

Die geometrischen Daten eines regelmäßigen Omnibusses und die Wirkung der durch die Tür verursachten Belastung auf das Grundsystem sind in Abb. 6 dargestellt. Die Einheits- und die Belastungsfaktoren des Gleichungssystems, das zur direkten Bestimmung der zusätzlichen Beanspruchung dient, sind in Tafel I, die den neueingeführten Unbekannten  $Y$  bzw.  $Z$  zugehörigen Beiwerte hingegen in Tafel II zusammengefaßt.

Die charakteristische Gleichung der den Unbekannten  $Y$  zugehörigen Differenzgleichung und die vier Wurzeln der Gleichung sind

$$\begin{aligned}\lambda^4 - 3,308\lambda^3 + 8,78\lambda^2 - 3,308\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0,197 + 0,308 i \\ \lambda_2 &= 1,457 - 2,319 i \\ \lambda_3 &= 0,197 - 0,308 i \\ \lambda_4 &= 1,457 + 2,319 i\end{aligned}$$

Tafel I

$i, k$		$\delta_{ik}$
Einheitsfaktoren		
$2k, 2k$		+2,697
$2k, 2k + 1$		-1,117
$2k, 2k + 2$	$2k, 2k - 2$	-0,118
$2k, 2k + 3$	$2k, 2k - 1$	-0,477
$2k, 2k + 4$	$2k, 2k - 4$	+0,144
$2k, 2k + 5$	$2k, 2k - 3$	+0,036
Belastungsfaktoren		
0,1		-1,117 M
0,2		-0,477 M
0,3		-0,118 M
0,4		0,036 M
0,5		0,144 M



Tafel II

$i, k$		$\delta_{ik}$	
Einheitsfaktoren		$Y$	$Z$
$i, i$		+1,580	+3,814
$i, i + 1$	$i, i - 1$	-0,595	+0,359
$i, i + 2$	$i, i - 2$	+0,180	+0,108
Belastungsfaktoren			
0,0		-0,595 ( $X_1 + M$ )	+0,359 ( $X_1 - M$ )
0,1		+0,180 ( $X_1 + M$ )	+0,108 ( $X_1 - M$ )

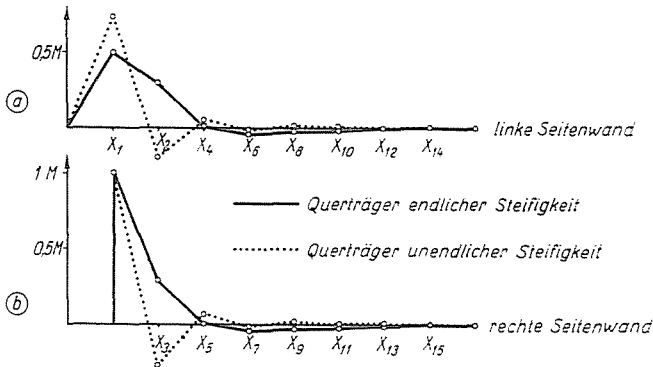


Abb. 7. Biegemoment der rechten und der linken Seitenwand des Wagenkastens. a — unter Berücksichtigung von Querträgern endlicher Steifigkeit; b — bei Annahme unendlich steifer Querträger ermittelter Wert

Die charakteristische Gleichung der den Unbekannten  $Z$  zugehörigen Differenzgleichung und deren Wurzeln sind

$$\lambda^4 + 3,324\lambda^3 + 35,34\lambda^2 + 3,324\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -0,0462 + 0,1626 i$$

$$\lambda_2 = -1,6157 - 5,6906 i$$

$$\lambda_3 = -0,0462 - 0,1626 i$$

$$\lambda_4 = -1,6157 + 5,6906 i$$

Die aus der Differenzgleichung errechneten Werte der Unbekannten  $Y$  und  $Z$  sind in Tafel III, die der Unbekannten  $X$  dagegen — unter Annahme von elastischen und unendlich steifen Querträgern — in Tafel IV zusammengestellt.

Tafel III

$i$	$Y_i$	$Z_i$
0	+0,3875 ( $X_1 + M$ )	-0,0944 ( $X_1 - M$ )
1	+0,0168 ( $X_1 + M$ )	-0,01985 ( $X_1 - M$ )
2	-0,0454 ( $X_1 + M$ )	+0,00452 ( $X_1 - M$ )
3	-0,0316 ( $X_1 + M$ )	+0,00015 ( $X_1 - M$ )
4	-0,00186 ( $X_1 + M$ )	-0,00014 ( $X_1 - M$ )
5	+0,00197 ( $X_1 + M$ )	+0,000009 ( $X_1 - M$ )
6	+0,00101 ( $X_1 + M$ )	+0,000002 ( $X_1 - M$ )

Tafel IV

$i$	$X_i$	
	Genau	unter Annahme von unendlich steifen $Q$ -Trägern
1	+0,49360 $M$	+0,7320 $M$
2	+0,29239 $M$	-0,1960 $M$
3	+0,28761 $M$	-0,26795 $M$
4	+0,01750 $M$	+0,0524 $M$
5	+0,00750 $M$	+0,07160 $M$
6	-0,03504 $M$	-0,01405 $M$
7	-0,03276 $M$	-0,01918 $M$
8	-0,02369 $M$	+0,00376 $M$
9	-0,02361 $M$	+0,00514 $M$
10	-0,00135 $M$	-0,00101 $M$
11	-0,00142 $M$	-0,00138 $M$
12	+0,00147 $M$	+0,00027 $M$
13	+0,00147 $M$	+0,00037 $M$
14	+0,00075 $M$	-0,00006 $M$
15	+0,00075 $M$	-0,00009 $M$

Das Abklingen der Unbekannten ist aus Abb. 7 gut ersichtlich. Beim vierten Querträger, gerechnet von der Stelle der Störung, kann — bei praktisch elastischen und unendlich steifen Querträgern — die zusätzliche Belastung in gleicher Weise unberücksichtigt bleiben.

Vergleicht man die unter Annahme von Querträgern endlicher und unendlicher Steifigkeit durchgeführten Berechnungen, so findet sich eine wesentliche Abweichung nur bei dem zweiten Querträger neben der Tür.

## Zusammenfassung

Die Untersuchung des Kräftespiels in einem infolge einer seitlich angebrachten Tür unsymmetrischen Omnibusses läßt sich stets auf die Untersuchung eines Balkens mit symmetrischer Belastung und Anordnung und einer zusätzlichen Störbelastung zurückführen. Die Störbelastung klingt mit zunehmendem Abstand von der Tür rasch ab. Das Abklingen kann bei einer regelmäßigen Konstruktion mit unendlich steifen Querträgern durch eine Differenzengleichung zweiter Ordnung, bei Querträgern von endlicher Steifigkeit hingegen durch eine solche vierter Ordnung dargestellt werden. Dadurch werden die Berechnungsarbeiten erheblich vereinfacht. Das neue Gleichungssystem enthält — statt 10 Unbekannter — im allgemeinen 5 je Gleichung. Bei unregelmäßigen Konstruktionen läßt sich, sofern die Konstruktion abgesehen vom Türabschnitt symmetrisch ist, nur das Gleichungssystem zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größen vereinfachen.

## Literatur

1. MICHELBERGER, P.: Wirkung der Türöffnungen auf das Kräftespiel von Omnibuskarosserien. *Periodica Polytechnica*, 6, 2 (1962).
2. MICHELBERGER, P.: Quasisymmetrische Dimensionierung asymmetrischer (Fahrzeug-) Konstruktionen. *Acta Technica*. Tom. XXXV—XXXVI (1961).

DR. P. MICHELBERGER, Budapest, XI., Egri József u. 18/20, Ungarn.