

ÜBER DIE UNTERSUCHUNG DER POTENTIALSTRÖMUNGEN DURCH EBENE RADIALE SCHAUFELGITTER MITTELS KONFORMER ABBILDUNG UND ELEKTROANALOGIE

Von

M. POPOV

(Eingegangen am 28. Dezember 1962)

1. Einleitung

Die Strömung durch ebene, gerade Schaufelgitter mit Hilfe der Elektroanalogie ist von verschiedenen Autoren [1], [2], [3], behandelt worden. Das Grundsätzliche der bekannten Verfahren besteht darin, daß die zirkulationsfreie Durchströmung des zu untersuchenden Gitters im elektrolytischen Trog ausgemessen und konform in einer bekannten Strömung, z. B. dieser durch ein aus Zylindern bzw. aus ebenen, unendlich dünnen Platten bestehendes Gitter oder um den Einheitskreis abgebildet wird, wo die zirkulationsbehaftete Strömung rechnerisch ermittelt werden kann. Die dort gewonnenen Ergebnisse werden dann auf das zu untersuchende Gitter umgerechnet. Im allgemeinen ist aber die Abbildungsfunktion nicht bekannt. Diese Schwierigkeit wird auf Grund der bekannten Tatsache umgangen, daß in konform zugeordneten Punkten beider Strömungen die Potentialwerte bis auf eine additive Konstante gleich sind, wodurch der konforme Zusammenhang hergestellt werden kann.

Die vorliegende Arbeit setzt sich das Ziel, das Verfahren der Elektroanalogie auf radiale, ebene Schaufelgitter auszudehnen, wie es bei Kreiselpumpen, Zentrifugalventilatoren, Wasserturbinen und anderen Strömungsmaschinen Anwendung findet. Die Schaufeln sollen beliebige Form haben, und das Schaufelgitter kann gleichmäßig rotieren (Schaufelrad) oder ruhen (Leitapparat). Zur Vereinfachung der Ausführungen wird ein radial nach außen hin durchströmtes Schaufelrad (Pumpe oder Ventilator) behandelt; wie weiter gezeigt wird, sind die Ergebnisse auch auf den umgekehrten Fall (Turbine) anwendbar.

2. Ausmessen der Durchflußströmung im Schaufelgitter

Zunächst ist die zirkulationsfreie Durchströmung des ruhenden, radialen Schaufelgitters, im weiteren Durchflußströmung genannt, im elektrolytischen Trog experimentell auszumessen. Wie üblich, wird diese Strömung als von einer Quelle im Mittelpunkt des Schaufelgitters und als von einer Senke gleicher Ergiebigkeit im Unendlichen verursacht betrachtet.

Für die Versuche wird eine kreisrunde ¹Wanne nach Abb. 1 benutzt, in der koaxial die aus Isolationsmaterial hergestellten Schaufeln 9 angebracht sind. Die Durchflußströmung wird durch Anlegen einer elektrischen Wechselspannung an beide zylindrische Elektroden 1 und 2 modelliert, von denen die innere mit genügend kleinem, die äußere hingegen mit genügend großem Halbmesser gegenüber der radialen Ausdehnung des Gitters gewählt ist, damit in ihrer Nähe die von den Schaufeln verursachten Störungen praktisch abgeklungen sind. Die in Abb. 1 gezeigte Wheatstonesche Brückenschaltung erlaubt mittels der im Elektrolyt (z. B. Leitungswasser) eingetauchten Sonde 4 in bekannter Weise die Bestimmung der Potentialwerte in beliebigen Punkten des Feldes. Zweckmäßig wird man diese Potentialwerte Φ_x dem Teilwider-

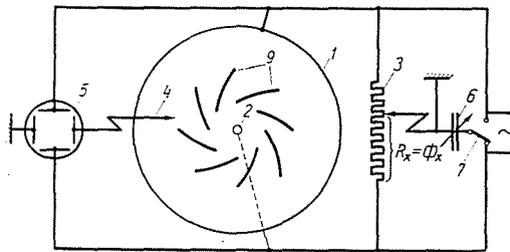


Abb. 1. Der elektrolytische Trog: 1. Außenelektrode, 2. Innenelektrode, 3. Potentiometer, 4. Sonde, 5. Kathodenstrahlzillograph als Indikator, 6. Kondensator zum Phasenausgleich, 7. Umschalter zum Phasenausgleich

stand R_x des Potentiometers 3 gleichsetzen, der mit der die Quelle darstellenden inneren Elektrode verbunden ist.

Man mißt die extremen Potentialwerte Φ_{\max} und Φ_{\min} auf der Schaufeloberfläche, die offenbar zu den Staupunkten der Strömung gehören. Ferner sind die Potentialwerte Φ_i und Φ_a der inneren, bzw. der äußeren Schaufelspitze zu ermitteln. Bei dicken, profilierten Schaufeln sind dazu die Endpunkte der Skelettlinie zu nehmen. Zur Bestimmung der Durchflußmenge, d. h. der Ergiebigkeit der Quelle, genügt es, im ungestörten Gebiet innerhalb oder außerhalb des Gitters die Potentialwerte Φ_1 und Φ_2 für zwei Radien r_1 und r_2 zu bestimmen. Aus der Potentialfunktion der Quelle folgt

$$\Phi_1 + \Phi_c = \frac{Q}{2\pi} \ln r_1, \quad \Phi_2 + \Phi_c = \frac{Q}{2\pi} \ln r_2,$$

worin $\Phi_c = \text{const.}$ Daraus ergibt sich

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad \text{und} \quad e = \frac{Q}{2\pi} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}, \quad (1)$$

wenn zur Kürzung $Q/2\pi = e$ gesetzt wird.

Abb. 2 zeigt als Beispiel die experimentell ermittelten Abschnitte der Equipotentiallinien um die Schaufel eines vorgegebenen Gitters. Daraus lassen sich in bekannter Weise die Geschwindigkeiten der Durchflußströmung auf der Schaufeloberfläche nach der angenäherten Beziehung

$$c_q = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} \quad (2)$$

bestimmen, worin $\Delta\Phi$ die Potentialdifferenz zweier benachbarter Equipotentiallinien bedeutet, die die Schaufeloberfläche im Abstand S schneiden.

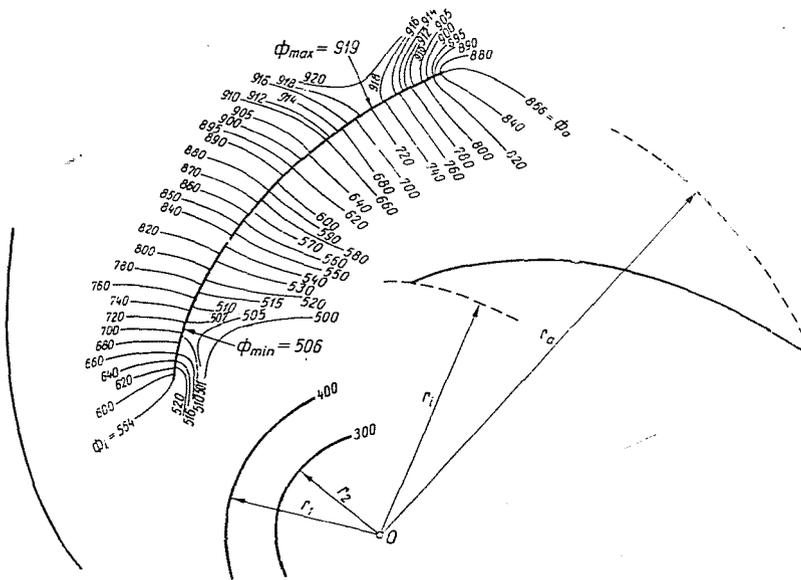


Abb. 2. Equipotentiallinien der Durchflußströmung um eine Schaufel des radialen Gitters

Diese Ergebnisse aus den Messungen im elektrolytischen Trog reichen, wie im weiteren gezeigt werden wird, aus, um die vollständige Strömung durch das rotierende Schaufelgitter zu bestimmen.

3. Konforme Abbildung und Durchflußströmung

Das zu untersuchende Schaufelgitter sei in der ζ -Ebene nach Abb. 3 vorgegeben und zunächst als ruhend gedacht. In seinem Mittelpunkt sei eine Quelle und im Unendlichen eine Senke gleicher Ergiebigkeit Q angebracht.

Die Schaufeln dieses Gitters sollen jetzt auf den Einheitskreis in der z -Ebene konform abgebildet werden. Eine Abbildungsfunktion für logarithmisch spiralförmige, unendlich dünne Schaufeln bei einer derartigen konformen Transformation wurde in geschlossener Form von BUSEMANN [4] und ACOSTA [5] angegeben. Dabei geht die Quelle vom Mittelpunkt des Schaufelgitters in eine Quelle außerhalb des Kreises über und die Senke im Unendlichen ebenfalls in eine Senke im Unendlichen der z -Ebene. Diese konforme Abbildung führt aber zu

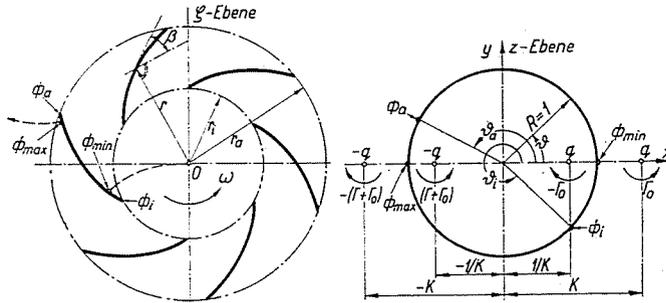


Abb. 3. Zur konformen Abbildung des radialen Gitters um den Einheitskreis

gewissen Schwierigkeiten bei der rechnerischen Bearbeitung Acostas, welche die Brauchbarkeit des Verfahrens praktisch bis auf etwa 6 Schaufeln einschränkt. Es zeigte sich, daß diese Schwierigkeiten weitgehend beseitigt werden können wenn eine Abbildungsfunktion vorausgesetzt wird, die sonst die gleiche, Abbildung wie die erwähnte ermöglicht, die unendlich ferne Senke jedoch, wie in Abb. 3 gezeigt, ebenfalls ins Endliche der z -Ebene bringt. Es sei erwähnt, daß Weinig (6) eine derartige Abbildung des geraden Schaufelgitters eingeführt hat, die auch von Hackeschmidt benutzt wurde. Im allgemeinen können die Entfernungen beider Singularitäten vom Einheitskreis verschieden sein, im weiteren werden sie aber zur Vereinfachung als gleich groß vorausgesetzt.

Im folgenden wird der konforme Zusammenhang beider Ebenen nach HACKESCHMIDT [3] hergestellt, womit die Übereinstimmung mehrerer Bestimmungsgleichungen mit den seinigen zu erklären ist.

Nach Abb. 3 sind die Singularitäten diametral zum Kreismittelpunkt auf der reellen Achse in den Punkten $\pm k$ angebracht. Um den Kreisen einer Stromlinie werden zu lassen, müssen diese am Kreis gespiegelt werden, und für das komplexe Potential der zirkulationsfreien Strömung folgt

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\left(z - k\right) \left(z - \frac{1}{k}\right)}{\left(z + k\right) \left(z + \frac{1}{k}\right)} + F_c, \quad (3)$$

worin q die für alle Quellen und Senken gleiche Ergiebigkeit und $F_c = \text{const.}$ bedeuten. Es ist z. B. aus (4) und (5) bekannt, daß bei der konformen Abbildung dieser Art zwischen der Ergiebigkeit q und der Durchflußmenge Q des Schaufelgitters der Zusammenhang

$$q = Q/N$$

besteht, worin N die Schaufelzahl ist. Folglich kann q aus den Messungen im elektrolytischen Trog durch Gl. (1) aus der Beziehung

$$\frac{q}{2\pi} = \frac{e}{N} \tag{4}$$

bestimmt werden.

Die Potentialfunktion erhält man aus Gl. (3) durch die bekannte Beziehung

$$\Phi = \frac{1}{2}(F(z) + \bar{F}(z)),$$

worin $\bar{F}(z)$ das konjugierte komplexe Potential bedeutet. Für den Kreisumfang ist $z = e^{i\vartheta}$, für ihn folgt mithin

$$\Phi = \frac{e}{N} \ln \frac{k + \frac{1}{k} - 2 \cos \vartheta}{k + \frac{1}{k} + 2 \cos \vartheta} + \Phi_c = \frac{e}{N} \frac{\text{ch} \ln k - \cos \vartheta}{\text{ch} \ln k + \cos \vartheta} + \Phi_c. \tag{5}$$

Die Konstanten k und Φ_c lassen sich aus der Bedingung bestimmen, daß die Potentialwerte konform zugeordneter Punkte gleich sein müssen. Die Staupunkte liegen am Kreise bei $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, man kann also schreiben

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\min} &= \frac{e}{N} \ln \frac{\text{ch} \ln k - 1}{\text{ch} \ln k + 1} + \Phi_c, \\ \Phi_{\max} &= \frac{e}{N} \ln \frac{\text{ch} \ln k + 1}{\text{ch} \ln k - 1} + \Phi_c. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

Daraus folgt

$$\text{ch} \ln k = \text{cth} \frac{N}{2e} \frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{2} \tag{7}$$

und

$$\Phi_c = \frac{\Phi_{\max} + \Phi_{\min}}{2}. \tag{8}$$

Mit diesen Ausdrücken geht Gl. (5) in die Form

$$\Phi = \frac{e}{N} \ln \frac{\operatorname{cth} \frac{N}{2e} \frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{2} - \cos \vartheta}{\operatorname{cth} \frac{N}{2e} \frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{2} + \cos \vartheta} + \frac{\Phi_{\max} + \Phi_{\min}}{2} \quad (9)$$

und weiter in die Form

$$\cos \vartheta = \frac{\operatorname{th} \left[\frac{N}{2\vartheta} \left(\frac{\Phi_{\max} + \Phi_{\min}}{2} - \Phi \right) \right]}{\operatorname{th} \left[\frac{N}{2e} \frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{2} \right]} \quad (10)$$

über. Mit dieser Gleichung kann man aus den im elektrolytischen Trog gemessenen Potentialwerten Φ die Amplituden ϑ der konform zugeordneten Punkte am Kreisumfang bestimmen; ϑ_i und ϑ_a gelten für die Schaufelspitzen.

Aus Gl. (9) folgt für die Geschwindigkeit der Durchflußströmung am Kreisumfang

$$v_q = \frac{d\Phi}{d\vartheta} = \frac{2e}{N} \frac{\left(\operatorname{cth} \frac{N}{2e} \frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{2} \right) \sin \vartheta}{\operatorname{cth}^2 \frac{N}{2e} \frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{2} - \cos^2 \vartheta} \quad (11)$$

Die Unkenntnis der Abbildungsfunktion $\zeta = \zeta(z)$ kann jetzt dadurch umgangen werden, daß man für jedes Paar konform zugeordneter Punkte den Absolutbetrag (den Modul) ihrer Ableitung bestimmt,

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{v_q}{c_q} \quad (12)$$

Unter Benutzung der experimentell bestimmten Geschwindigkeitswerte nach Gl. (2) und der berechneten nach Gl. (11) kann diese Ableitung für alle Punkt-paare berechnet und zur Umrechnung aller entsprechenden Geschwindigkeiten von der einen in die andere Ebene benutzt werden.

Für die Vorzeichen wird festgelegt, daß die Tangentialgeschwindigkeiten in der ζ -Ebene positiv nach außen hin sind und in der z -Ebene — in Richtung der positiven Amplitude ϑ .

4. Die Verdrängungsströmung

Beim rotierenden Schaufelgitter entsteht eine zweite, die sogenannte Verdrängungsströmung, d. h. die Schaufeln setzen die sie umgebende Flüssigkeit in Bewegung. Aus der Undurchdringlichkeit der Schaufeln und aus Abb. 4

folgt, daß die Flüssigkeit auf ihrer Oberfläche die gleiche Normalgeschwindigkeit c_n erhält wie die Flächenelemente der Schaufeloberfläche selbst. Mit den Bezeichnungen der letzten Abbildung kann folglich gesetzt werden

$$c_n = u \sin \beta = \omega r \sin \beta, \quad (13)$$

worin $\omega = \text{const}$ die Winkelgeschwindigkeit des Gitters und β die Schaufelneigung bedeuten.

Die Normalgeschwindigkeiten c_n können als aus einer Quell-Senkenbelegung der Schaufeloberfläche entstanden betrachtet werden. Aus der unterschiedlichen Ergiebigkeit der Singularitäten folgen aber auch die tangentialen

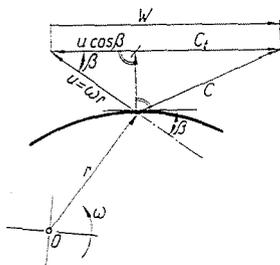


Abb. 4. Geschwindigkeiten an der Schaufel des rotierenden radialen Gitters

Geschwindigkeitskomponenten C_ω , die in der z -Ebene leichter zu ermitteln sind. Zu diesem Zwecke werden die aus Gl. (13) berechneten Normalgeschwindigkeiten mit Hilfe der Gl. (12) auf den Kreisumfang der z -Ebene umgerechnet, es wird also

$$v_n = c_n \left| \frac{dz}{dz} \right| = \omega r \sin \beta \left| \frac{dz}{dz} \right|. \quad (14)$$

Auf diese Weise kann man für die Verteilung der Normalgeschwindigkeit am Kreisumfang die Funktion $v_n = v_n(\vartheta)$ tabellarisch oder graphisch festlegen. Dabei sind die Normalgeschwindigkeiten in Richtung der Außennormale der Oberflächen positiv zu nehmen.

Wie bekannt, kann man aus der Verteilung der Normalgeschwindigkeiten die induzierten Tangentialgeschwindigkeiten am Kreisumfang nach dem Poissonschen Integral

$$\begin{aligned} v_\omega(\vartheta^*) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_n(\vartheta) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta^*}{2} d\vartheta = \\ &= -\omega \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin \beta \left| \frac{dz}{dz} \right| \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta^*}{2} d\vartheta \right] = \omega v_{\omega 1} \end{aligned} \quad (15)$$

für jeden Punkt mit der Amplitude ϑ^* berechnen. Der Klammerausdruck ist gleich $v_{\omega 1}$ gesetzt und stellt offenbar die durch die Verdrängungsströmung bei $\omega = 1$ verursachten Tangentialgeschwindigkeit am Einheitskreis dar. Für das Integral ist der Cauchysche Hauptwert zu nehmen. Da die Funktion $v_n = v_n(\vartheta)$ tabellarisch oder graphisch gegeben ist, kann die Integration nur numerisch durchgeführt werden. Dazu sind verschiedene Rechnungsverfahren bekannt, von denen nur die von THEODORSEN—GARRICK [7], PEEBLES [8], SIMONOV [9] und WITTICH [10] erwähnt seien. ACOSTA (5) benutzt das zweitgenannte Verfahren das den Integrationsbereich in 80 gleichmäßig verteilte Punkte teilt, aber selbst bei 6 Schaufeln nicht genügend genau ist, weil der Integrand in der Nähe $\vartheta = 0$ sehr hohe und scharfe Spitzen zeigt. ACOSTA behilft sich, indem er vom Integranden eine geeignete Funktion subtrahiert, deren konjugierte Funktion bekannt ist, wodurch aber die Rechenarbeit erschwert wird.

Es zeigte sich, daß die zu integrierende Funktion bei der konformen Abbildung nach Abb. 3 eine wesentlich bequemere Form annimmt und die numerische Integration weitgehend erleichtert.

5. Die Zirkulationsströmung

Die Strömung durch das Schaufelrad hat einen dritten Anteil — die sogenannte Zirkulationsströmung. Erstens kann diese z. B. durch Leitschaufeln vor dem Schaufelgitter erzeugt worden sein, wobei eine drallbehaftete Zuströmung entsteht. Zweitens entstehen durch die Anfahrwirbel Zirkulationsströmungen um jede Schaufel, die die glatte Umströmung verwirklichen. Gemäß der konformen Abbildung nach Abb. 3 ist der Zirkulationsanteil der drallbehafteten Zuströmung in der z -Ebene durch einen Wirbel mit der Zirkulation Γ_0 im Punkte K anzusetzen, wobei Γ_0 die der einzelnen Schaufeln zufallende Zirkulation bedeutet. Um den Kreis als Stromlinie zu erhalten, ist im Punkte $1/k$ ein Wirbel mit entgegengesetzter Zirkulation $-\Gamma_0$ zu nehmen. Soll die Zirkulation um jede Schaufel Γ sein, so ist im Punkte $-1/k$ ein Wirbel mit der Zirkulation $\Gamma + \Gamma_0$ zu legen und entsprechend im Punkte $-k$ ein Wirbel mit der Zirkulation $-(\Gamma + \Gamma_0)$. Somit erhält man für das komplexe Potential der reinen Zirkulationsströmung in der z -Ebene

$$F(z) = \frac{i}{2\pi} \left(\Gamma_0 \ln \frac{z - \frac{1}{k}}{z - k} + (\Gamma + \Gamma_0) \ln \frac{z + k}{z + \frac{1}{k}} \right), \quad (16)$$

wenn Γ positiv in Richtung von ϑ angenommen wird. Daraus folgt für die Potentialfunktion

$$\Phi = \frac{1}{2} (F(z) + \overline{F}(z)) = \frac{i}{4\pi} \left\{ \Gamma_0 \ln \frac{\left(z - \frac{1}{k}\right) (z + k) (\bar{z} - k) \left(\bar{z} + \frac{1}{k}\right)}{(z - k) \left(z + \frac{1}{k}\right) \left(\bar{z} - \frac{1}{k}\right) (\bar{z} + k)} + \right. \\ \left. + \Gamma \ln \frac{(z + k) \left(\bar{z} + \frac{1}{k}\right)}{\left(z + \frac{1}{k}\right) (\bar{z} + k)} \right\} \quad (17)$$

und für die Geschwindigkeit am Kreisumfang

$$v_y = \frac{d\Phi}{d\vartheta} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\text{sh } \ln k}{\text{ch } \ln k + \cos \vartheta} - \frac{\Gamma_0}{\pi} \frac{\text{sh } \ln k}{\text{ch}^2 \ln k - \cos^2 \vartheta} = \Gamma v_{y1} - v_{y0}. \quad (18)$$

Hier bedeuten v_{y1} die Tangentialgeschwindigkeit, die allein durch die Zirkulation um die Schaufeln bei $\Gamma = 1$ zustande kommt, und v_{y0} die Tangentialgeschwindigkeit infolge der Zirkulation Γ_0 der Zuströmung.

6. Die Gesamtströmung

Die gesamte Tangentialgeschwindigkeit v_t am Kreisumfang in der z -Ebene setzt sich aus den Geschwindigkeiten der Teilströmungen (Durchflußströmung, Verdrängungsströmung und Zirkulationsströmung) zusammen und beträgt

$$v_t = v_q + \omega v_{\omega 1} + \Gamma v_{y1} - v_{y0}, \quad (19)$$

worin ω und Γ freie, noch zu bestimmende Konstanten sind, vorausgesetzt, daß die Ergiebigkeit der Quelle und somit auch v_q bzw. die Zirkulation der drallbehafteten Zuströmung und somit auch v_{y0} wie üblich gegeben sind.

Die Konstanten der Gl. (19) sind aus der Bedingung des glatten Abströmens von der hinteren Schaufelkante zu bestimmen. Nach der Kutta—Joukowski'schen Bedingung muß dann im Punkte des Kreisumfanges der z -Ebene, der der hinteren Schaufelkante konform zugeordnet ist und der nach Abb. 3 die Amplitude ϑ_a hat, die Tangentialgeschwindigkeit verschwinden, d. h. es muß

$$v_{qa} + \omega v_{\omega 1a} + \Gamma v_{y1a} - v_{y0a} = 0 \quad (20)$$

werden. Diese Bedingungsgleichung reicht aber nur für verhältnismäßig dicke und profilierte Schaufeln aus: man wählt die eine Konstante und bestimmt daraus die andere. Bei dünnen Schaufeln, wie sie meist bei Ventilatoren Ver-

wendung finden, muß auch eine glatte (stoßfreie) Umströmung der vorderen Schaufelkante gesichert werden. Dies ist zu erreichen, indem die Tangentialgeschwindigkeit in dem der vorderen Schaufelkante konform zugeordneten Punkt auf dem Einheitskreis der z -Ebene mit der Amplitude ϑ_i (s. Abb. 3) ebenfalls zum Verschwinden gebracht wird, wenn also

$$v_{qi} + \omega v_{\omega 1i} + \Gamma v_{y1i} - v_{y0a} = 0. \quad (21)$$

Mit Gl. (20) ergibt sich daraus

$$\omega = \frac{\frac{v_{y1a}}{v_{y1i}} (v_{qi} - v_{q0i}) - v_{qa} + v_{y0a}}{v_{\omega 1a} - \frac{v_{y1a}}{v_{y1i}} v_{\omega 1i}} = \frac{-\frac{v_{y1i}}{v_{y1a}} (v_{qa} - v_{y0a}) - v_{qi} + v_{y0a}}{v_{\omega 1i} - \frac{v_{y1i}}{v_{y1a}} v_{\omega 1a}}, \quad (22)$$

$$\Gamma = \frac{v_{y0i} - v_{qi} - \omega v_{\omega 1i}}{v_{y1i}} = \frac{v_{y0a} - v_{qa} - \omega v_{\omega 1a}}{v_{y1a}}. \quad (23)$$

Die hier vorkommenden Geschwindigkeiten v_q , $v_{\omega 1}$, v_{y1} und v_{y0} sind aus den Gl. (11), (15) und (18) für $\vartheta = \vartheta_a$ bzw. $\vartheta = \vartheta_i$ zu berechnen.

Nach Ermittlung von ω und Γ ist die Gesamtströmung um den Einheitskreis bestimmt. Man ist dann in der Lage, die Tangentialgeschwindigkeit v_t für jeden Punkt des Kreisumfangs nach Gl. (19) zu bestimmen. Am leichtesten geschieht dies für Punkte, die im elektrolytischen Trog ausgemessen sind, da für sie die Werte von v_q und $|d\varrho/dz|$ bereits vorliegen. Daraus lassen sich die Tangentialgeschwindigkeiten auf der Schaufeloberfläche gemäß Gl. (12) nach der Beziehung

$$c_t = v_t \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \quad (24)$$

bestimmen.

Die bisher behandelten Geschwindigkeiten sind Absolutgeschwindigkeiten. Um die Relativgeschwindigkeiten auf der Schaufeloberfläche des rotierenden Gitters zu bestimmen, geht man von der bekannten Tatsache aus, daß sich die Absolutgeschwindigkeit c als vektorielle Summe der sogenannten Fahrzeuggeschwindigkeit, die hier die Umfangsgeschwindigkeit $u = \omega r$ ist, und aus der Relativgeschwindigkeit w zusammensetzt. Aus Abb. 4 und Gl. (24) folgt für die Relativgeschwindigkeit unschwer

$$w = c_t - u \cos \beta = v_t \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| - \omega r \cos \beta. \quad (25)$$

Berechnet für ausreichend viele Punkte der Schaufeloberfläche, erlaubt die Relativgeschwindigkeit die Bearbeitung der Grenzschicht. Aus der Bernoulli-

sehen Gleichung für die stationäre Relativströmung in einem gleichförmig rotierenden System kann aus ihr und der Umfangsgeschwindigkeit auch die Druckverteilung auf der Schaufeloberfläche berechnet werden.

Aus ω und Γ nach Gl. (22) und (23) lassen sich die Kennzahlen des Schaufelrades für stoßfreien Eintritt berechnen. Für die Lieferzahl ergibt sich

$$\varphi = \frac{c_{ma}}{u_a} = \frac{e}{\omega r_a^2}, \quad (26)$$

worin c_{ma} die Meridiangeschwindigkeit und u_a die Umfangsgeschwindigkeit am Radumfang bedeuten. Für die Druckzahl folgt

$$\psi = \frac{2gH}{u_a^2} = \frac{N\Gamma}{\pi r_a^2 \omega}, \quad (27)$$

da die Zirkulation um den Einheitskreis der Zirkulation um eine Schaufel entspricht; H bedeutet die Förderhöhe.

Das dargelegte Verfahren kann unschwer auch auf ein Turbinenschaufelrad angewandt werden. Es ist dann zu beachten, daß nach Abb. 1 die äußere Elektrode die Quelle und die innere die Senke darstellt, die Punkte mit den extremen Potentialwerten ihre Plätze vertauschen und die positiven Tangentialgeschwindigkeiten zum Mittelpunkt hin gerichtet sind. Unter diesen Voraussetzungen bleibt die konforme Abbildung in der z -Ebene unverändert, nur die Punkte Φ_a und Φ_i vertauschen ihre Plätze. Dann bedeutet Γ_0 die Zirkulation der vom Leitapparat der Turbine verursachten Drallströmung.

Besonders einfach ist die Untersuchung eines ruhenden Leitschaufelgitters, d. h. eines Leitapparates; dann fehlt die Verdrängungsströmung und in den Gleichungen ist $\omega = 0$ zu setzen.

7. Ergebnisse und Schlußfolgerungen

Das Verfahren wurde auf ein von ACOSTA [5] durchgerechnetes Schaufelgitter angewandt, das unendlich dünne Schaufeln nach einer logarithmischen Spirale mit dem Neigungswinkel $\beta = 30^\circ$, dem Radienverhältnis $r_i/r_a = 0,57$ und der Schaufelzahl $N = 6$ hat. Für die Versuche im elektrolytischen Trog bestanden die Schaufeln aus Plexiglas mit einer Dicke von $\delta = 0,004 r_a$, nach einer Schablone warm gebogen und dann maßgetreu auf die ebene Grundplatte des elektrolytischen Trogs aufgeklebt.

Die Meßergebnisse für die Durchflußströmung zeigt Abb. 2. Aus dieser ist zu ersehen, daß die Potentialwerte an den Schaufelspitzen $\Phi_i = 564$ und $\Phi_a = 866$ betragen. Die Bestimmung der extremen Potentiale erwies sich wegen des geringen Potentialgradienten in der Umgebung der Staupunkte als schwieriger. Deshalb wurden sie als Mittelwerte aus den Potentialen der benachbarten,

noch sicher auszumessenden Equipotentiallinien ermittelt und zwar zu $\Phi_{\min} = 506$ und $\Phi_{\max} = 919$. Die Equipotentiallinien $\Phi_1 = 300$ und $\Phi_2 = 400$ (Abb. 2) wurden zur Bestimmung der Durchflußmenge nach Gl. (1) benutzt. Ferner wurden aus Abb. 2 nach Gl. (2) die Geschwindigkeiten in etwa 50 Punkten errechnet. Die dabei erzielte Genauigkeit war aber nicht sehr groß (etwa $\pm 3\%$), was in erster Linie auf die kleinen Abmessungen des elektrolytischen Trogs zurückzuführen ist, der einen Außendurchmesser von nur 600 mm aufwies und dem Schaufelgitter entsprechend kleine Abmessungen aufzwang (Außenhalbmesser $r_a = 125$ mm). Bei der Anwendung der Elektroanalogie auf andere Probleme (11) sind wesentlich größere Genauigkeiten erzielt worden (etwa 0,1–0,2%), die Versuchsapparatur ist also in dieser Hinsicht verbesserungsbedürftig.

Das Poissonsche Integral Gl. (15) wurde nach dem Verfahren von SIMONOW [9] berechnet, das nur 32 Punkte (gegenüber 80 Punkten bei ACOSTA), keine Ableitung der Funktion und keine Umformung durch eine zusätzliche Funktion erforderte. Die Ausrechnung ergab für die stoßfreie Umströmung die Lieferzahl $\varphi = 0,234$ gegenüber $\varphi = 0,24$ bei ACOSTA und für die Druckzahl $\psi = 0,722$ gegenüber 0,72. In Anbetracht der Unvollkommenheit der Versuchseinrichtung kann die Übereinstimmung als gut bezeichnet werden.

Die Untersuchung eines zweiten Schaufelgitters mit 8 dünnen Schaufeln ergab bei Auswertung des letztgenannten Integrals nach SIMONOW eine etwas weniger gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen nach dem Singularitätenverfahren von HOFFMEISTER [12], da der Integrand in der Umgebung von $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ höhere und schärfere Spitzen zeigte als beim ersten Beispiel. In solchen Fällen müßte man ein genaueres Berechnungsverfahren als das Simonowsche anwenden. Die Ergebnisse zeigen, daß die Auswertungsmöglichkeiten des vorgeschlagenen Verfahrens zwar beschränkt, aber größer sind als bei der konformen Abbildung nach ACOSTA und daß sie für viele praktische Fälle, insbesondere für Pumpen und Ventilatoren, ausreichende Genauigkeit erzielen lassen.

Genauer genommen, wachsen die Schwierigkeiten bei der Auswertung des Poissonschen Integrals mit der Verkleinerung des Abstandes k der äußeren Singularitäten nach Abb. 3. Wie aus Gl. (7) erhellt, hängt diese nicht allein von N ab, sondern auch von e und $\Phi_{\max} - \Phi_{\min}$, die ihrerseits von N , vom Radienverhältnis r_i/r_a und von der Schaufelform abhängig sind. Dadurch wird die Vorbestimmung der Anwendbarkeit des Verfahrens in konkreten Fällen schwieriger. Die Klärung dieser Frage soll aber weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Verfahren der Elektroanalogie auf radiale, ebene Schaufelgitter ausgedehnt. Die Ergebnisse sind auf ein Schaufelrad oder einen Leitapparat anwendbar.

Die Strömung kann das Gitter beliebig radial nach außen oder radial nach innen durchtreten. Die Gesamtströmung setzt sich aus den Teilen Durchflußströmung, Verdrängungsströmung und Zirkulationsströmung zusammen. Die dazu notwendigen Potentiallinien und konformen Abbildungen werden experimentell mit dem elektrolytischen Trog ermittelt. Die Ergebnisse sind nach exakten Methoden geprüft. Die erreichte Genauigkeit ist befriedigend.

Literatur

1. Симонов Л. А.: Применение метода ЭГДА к расчету гидротурбин. Научные записки Харьковского механико-машиностроительного Института, 1940.
2. Матвеев Г. А.: Метод электрогидродинамической аналогии в применении к исследованию облопатывания турбомеханизмов. Диссертация ЦНИИ им. акад. Крылова, 1948.
3. НАКЕШМИДТ, М.: Zur Berechnung der Potentialströmung um beliebige, ebene gerade Profilgitter unter Verwendung des elektrolytischen Troges, Maschinenbautechnik, 1959.
4. BUSEMANN, A.: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln, ZAMM, 1928.
5. ACOSTA, A. J.: An Experimental and Theoretical Investigation of Two-Dimensional Centrifugal-Pump Impellers, Transaction of the ASME, 1954.
6. WEINIG, F.: Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen, Leipzig, 1935.
7. THEODORSEN, B. T.—GARRICK, I. B.: Central Potential Theory of Arbitrary Wing Sections, NACA Rep. Nr. 452, 1933.
8. PEEBLES, G. H.: A Method for Calculating Airfoil Sections from Specifications on the Pressure Distribution, Journ. of the Aeronautical Sciences, 1947.
9. SIMONOW, L. A.: Calculation of an Aerofoil in a Flow and Plotting of an Aerofoil according to a Distribution of Velocities over its Surface, Applied Mathematics and Mechanics, Moscow, 1947.
10. WITTICH, H.: Bemerkungen zur Druckverteilungsrechnung nach Theodorsen-Garrick, Jahrbuch 1941 der deutschen Luftfahrtforschung
11. EINSTEIN, P. A.: Factors limiting the accuracy of the electrolytic plotting tanks, British Journal of Appl. Physics, 1951.
12. HOFFMEISTER, M.: Entwicklung von radialen Laufschaufeln unter Benutzung des Singularitätenverfahrens, Maschinenbautechnik, 1959.

Prof. M. POPOV, Sofia. Rakowski Str. 157.