VERALLGEMEINERUNG DER PERTURBATIONSMETHODE UND IHRE ANWENDUNG AUF QUASISYMMETRISCHE KONSTRUKTIONEN

Von

P. MICHELBERGER

Lehrstuhl für Flugzeugbau, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 22. März 1961)

Vorgelegt von Prof. DR. G. RUDNAI

Bei den Berechnungen von Schalenkonstruktionen kann man bekanntlich die Wirkung von Belastungen, deren Verteilung von der in der elementaren Festigkeitslehre üblichen ungelösten Verteilung abweicht, nach der sogenannten Perturbationsmethode [1, 2] untersuchen. Diese Untersuchungen gliedern sich in zwei Arten, in die der Krafteinleitungs- und die der Kraftumleitungsprobleme. Die Lösung beider Arten von Aufgaben beruht auf dem Grundgedanken, daß man das System der tatsächlichen Belastung in zwei Systeme aufspalten kann — in ein enfaches, der elementaren Festigkeitslehre entsprechendes, und in ein Perturbations-Kräftesystem. Das Perturbationssystem klingt mit zunehmender Entfernung von der Störstelle rasch ab. Aus diesem Abklingen folgt der größte Vorteil der Perturbationsmethode, da sie es ermöglicht, die Wirkung der Perturbation nicht an der ganzen Konstruktion untersuchen zu müssen, sondern sich auf einen kleineren Abschnitt zu beschränken.

Bei Krafteinleitungsaufgaben befriedigt dieses Verfahren restlos, für die Lösung von Kraftumleitungsaufgaben war es jedoch bisher nur in jenen Spezialfällen geeignet, in denen die Steifigkeit der Aussparung, die die Störung verursacht, vernachlässigbar klein war. In der Praxis werden jedoch die Aussparungen an ihrem Umfang mehr oder weniger versteift, ja in gewissen Fällen kann man sich sogar eine negative »Aussparung vorstellen« (wenn nämlich die Störstelle im Verhältnis zu ihrer Umgebung, der regelmäßigen Konstruktion, verstärkt ist), was die elementare Kräfteverteilung ebenfalls stört. Im folgenden wird gezeigt, daß sich auch diese allgemeineren Kraftumleitungsaufgaben lösen, ja sogar in gewissem Sinne einfacher lösen lassen als die bisher behandelten Spezialfälle.

Beim verallgemeinerten Verfahren läßt man das System der Perturbationskräfte stets auf die regelmäßige Konstruktion wirken, und dies im Gegensatz zu der bisher üblichen Art der Kraftumleitungsberechnung, bei der man die Störung auf die unregelmäßige, bereits ausgesparte Konstruktion wirken ließ. Der Vorteil der Perturbationsmethode, der sich aus dem raschen Abklingen ergibt, bleibt aber natürlich auch in diesem allgemeinen Fall erhalten.

Die Anwendung des verallgemeinerten Verfahrens soll an solchen Konstruktionen gezeigt werden, deren Symmetrie durch die Kraftumleitung gestört ist. In der Praxis ist dies z. B. bei Omnibuskarosserien der Fall, bei denen die im übrigen in bezug auf die Längsachse vorhandene Symmetrie des Aufbaus nur durch einseitig angebrachte Türen gestört ist (Bild 1). Ist die Zahl der Störstellen nicht zu groß, ist es — unabhängig von der Größe der Perturbation — die Berechnung der asymmetrischen Konstruktion zweckmäßig auf die Untersuchung einer symmetrischen Konstruktion zurückführen. Auf diese Weise wird die Lösung statisch unbestimmter Aufgaben erheblich

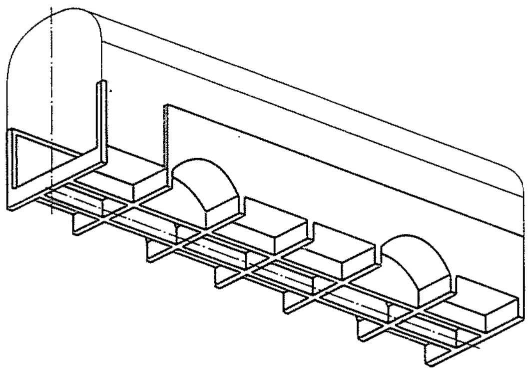


Bild 1

vereinfacht. Der Arbeitsaufwand ist, insbesondere bei vielfach statisch unbestimmten Konstruktionen, sehr viel geringer als bei der direkten Berechnung. Das Verfahren eignet sich aber auch zur rechnerischen Lösung von Kraftumleitungsaufgaben, bei denen die Unregelmäßigkeit nicht durch Störung der Symmetrie, sondern auf beliebige andere Weise verursacht ist.

Das Prinzip des Verfahrens läßt sich am besten an einem einfachen Beispiel veranschaulichen (Bild 2). Die Asymmetrie der Konstruktion wird in diesem Falle durch ein überzähliges elastisches Auflager gestört. Zunächst machen wir unsere Konstruktion durch Weglassen des überzähligen Auflagers symmetrisch und bestimmen die inneren Kräfte des so gewonnenen Trägers (Bild 3). Die Senkung des Trägers beträgt unter dieser Belastung δ_0 in der Wirkungslinie der entfernten elastischen Stützung. Sodann entfernen wir die äußere Belastung und lassen an der Stelle des elastischen Auflagers eine vertikale Einheitslast auf den Träger wirken. Die Senkung des Trägers in der Wirkungslinie der Einheitslast sei δ_1, die Längenänderung der Feder dagegen C_1. Die Verformungen sind in Bild 4 dargestellt.

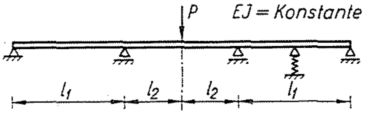


Bild 2

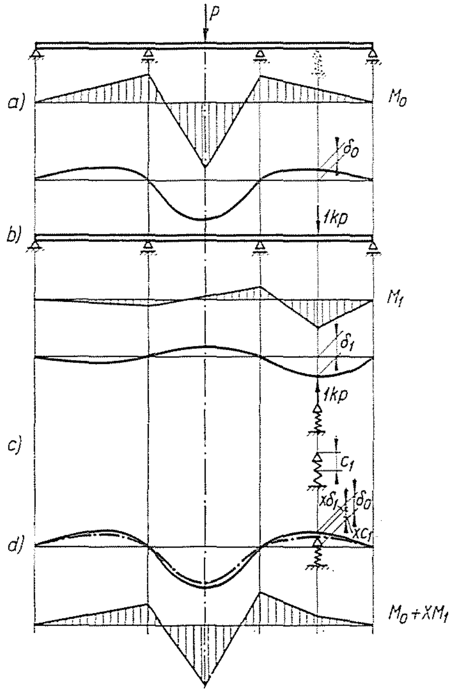


Bild 3

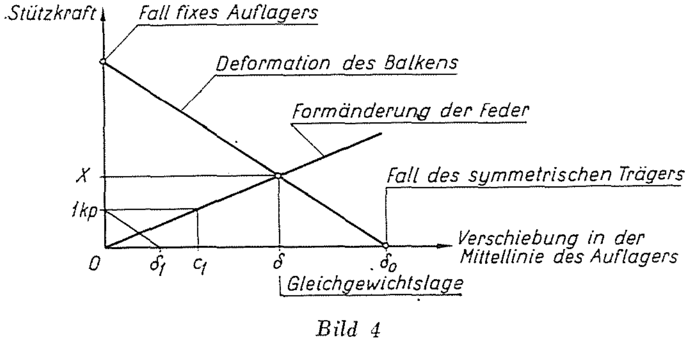


Bild 4

Beim ursprünglichen Träger trennte sich der Balken nicht von der elastischen Auflagerung, vielmehr nimmt er unter der unbekannten Kraft X die in Bild 3 d. dargestellte Lage ein. Anhand von Bild 4 ist offensichtlich

$$X(\delta_1 + C_1) = \delta_0 . \tag{1}$$

Die wirkliche Belastung erhält man sodann in der Form $M = M_0 + XM_1$.

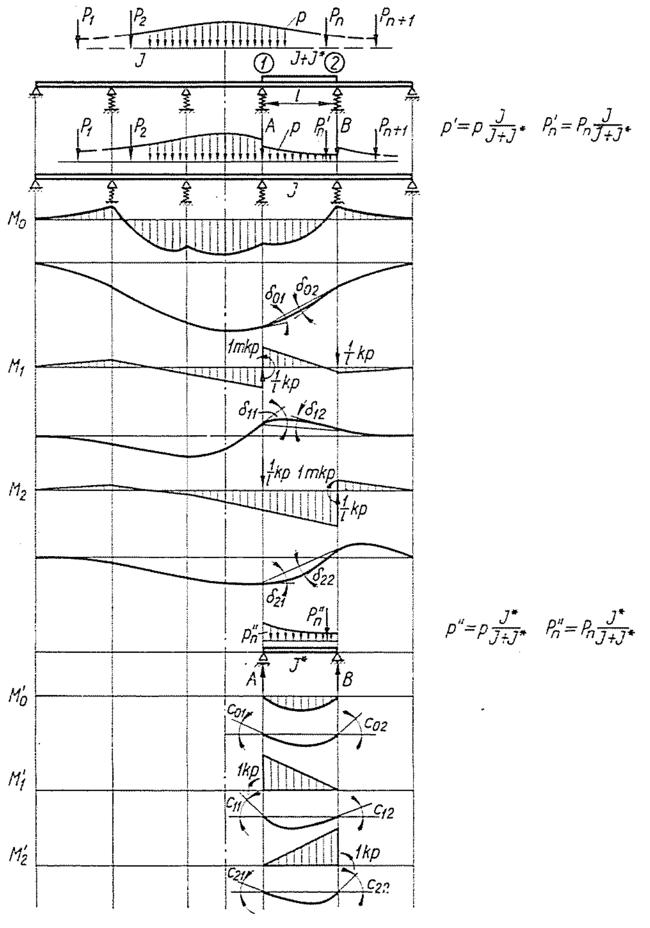


Bild 5

Zur Lösung von statisch unbestimmten Aufgaben nach dem Kräfteverfahren bediente man sich in gewissen Fällen auch bisher schon eines statisch unbestimmten Grundsystems. Die Anwendung dieses Grundgedankens kann man auch auf jene Fälle erweitern, in denen durch abweichende Steifigkeit (Trägheitsmoment-, Elastizitätsmodul bzw. Stablänge) irgendeines Trägerabschnittes (eines Stabes bei einem Fachwerk) eine Asymmetrie verursacht wird.

In solchen Fällen trennt man die Konstruktion in zwei Teile, von denen der eine symmetrisch ist, der andere das Element bildet, das die Asymmetrie verursacht. Die Aufgabe besteht ähnlich dem vorigen Grundfall — darin, die Deformationen der in Gedanken getrennten beiden Teile aufeinander völlig abzustimmen. Dies stellt eine besondere Aufgabe dar, wenn auf den fraglichen Abschnitt eine äußere Belastung wirkt (Bild 5).

Die einzelnen Schritte sind in Prinzip dieselben wie im obigen einfachen Falle. Zunächst machen wir den Träger symmetrisch, lassen also den Trägerabschnitt mit dem Trägheitsmoment I^*, der die Asymmetrie verursacht, fort (I^* kann jeden Wert von $-I^*$ bis $+\infty$ annehmen). Die auf diesen Trägerabschnitt wirkende Belastung reduzieren wir im Verhältnis $\dfrac{I}{I+I^*}$. Die Notwendigkeit dieses Schrittes ist leicht einzusehen, da sich ja die beiden Teile des Trägers an der Gesamtbelastung auf dem vorliegenden Abschnitt im Verhältnis von $\dfrac{I}{I+I^*}$ zu $\dfrac{I^*}{I+I^*}$ teilen.

Nun bestimmt man die inneren Kräfte des symmetrischen Trägers M_0 unter der reduzierten Belastung und die relativen Drehwinkel δ_{01} und δ_{02} an den Endpunkten 1 und 2 des die Asymmetrie verursachenden Abschnittes. Ferner bestimmen wir an den Punkten 1 bzw. 2 die inneren Kräfte M_1 und M_2 die von dem auf den symmetrischen Träger wirkenden Einheitsmoment verursacht werden, sowie die relativen Verdrehungen δ_{11}, δ_{12}, bzw. δ_{21} und δ_{22}, die an den Punkten 1 und 2 infolge dieser Kräfte entstehen.

Sodann berechnet man die inneren Kräfte M_0' des vorhin abgetrennten Trägers auf zwei Stützen, dessen Trägheit I^* ist, und die infolgedessen entstehenden Verdrehungen C_{01} und C_{02} sowie die Deformationen C_{11} und C_{12} bzw. C_{21} und C_{22}, die von den an dessen Endpunkten wirkenden Einheitsmomenten M_1' und M_2' hervorgerufen werden.

Die Reaktionskräfte der auf den abgetrennten Träger (mit der Trägheit I^*) wirkenden Belastungen und Einheitslasten werden selbstverständlich vom symmetrischen Träger aufgenommen.

Da wir die äußere Last bereits auf den symmetrischen und den abgetrennten Träger verteilt haben, und unter dessen Wirkung alle zusammenfallenden Punkte der beiden Träger die gleiche Deformation erleiden, ist im folgenden nur noch die Belastung zu verteilen, die durch die statisch unbestimmten Perturbationskräfte verursacht wurde.

Da sich diese Belastung auf der untersuchten Trägerstrecke am symmetrischen und am abgetrennten Träger nach der gleichen Gesetzmäßigkeit ändert, genügt es, die Verformung auf den Endpunkten der Strecke aufeinander abzustimmen; die zwischenliegenden Punkte decken sich in diesem Falle zwangsläufig.

Diese Deckung wird auch jetzt, ähnlich dem früher angeführten Zusammenhang (1), durch eine lineare Gleichung, bzw. genauer gesagt, durch ein Gleichungssystem ausgedrückt, da man ja die Bewegung zweier Punkte (1 und 2) aufeinander abstimmen muß

$$\begin{aligned} X_1(\delta_{11}+C_{11})+X_2(\delta_{12}+C_{12})+C_{01}&=\delta_{01}\\ X_1(\delta_{21}+C_{21})+X_2(\delta_{22}+C_{22})+C_{02}&=\delta_{02}\end{aligned} \tag{2}$$

Selbstverständlich gilt der Maxwellsche Vertauschungssatz auch im vorliegenden Fall, man hat somit

$$\delta_{12}=\delta_{21} \text{ und } C_{12}=C_{21}\,.$$

Die wirkliche Beanspruchung des Trägers beträgt

$$M=M_0+X_1 M_1+X_2 M_2+M_0'+X_1 M_1'+X_2 M_2'\,. \tag{3}$$

Auf den Strecken, auf denen kein abgetrennter Träger (mit I^*) vorhanden ist, wird offensichtlich $M_0'=0$.

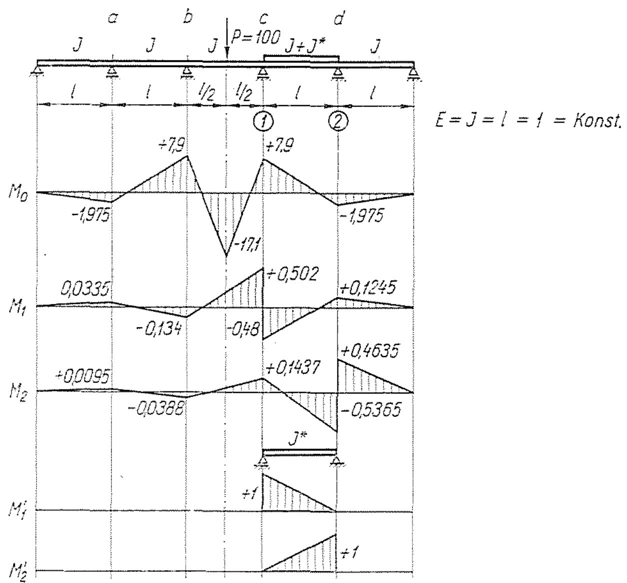
Hat I^* im Abschnitt 1—2 keinen konstanten Wert, wird man zweckmäßig ein gleichwertiges konstantes Trägheitsmoment (I^{**}) einführen. Es wird für die beiden Endpunkte verschieden groß sein. Seine Werte können auf Grund der Bedingung bestimmt werden, daß die mit dem gleichwertigen Trägheitsmoment (I^{**}) berechneten Deformationen an den Endpunkten mit den Deformationen übereinstimmen müssen, die unter Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes I^* berechnet wurden.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß mit der Vermehrung der Störstellen auch die Anzahl der Glieder und Unbekannten des linearen Gleichungssystems zunimmt, das zur Lösung dieser Aufgabe dient. Die Anwendung dieses Verfahrens lohnt sich deshalb nur bei Konstruktionen mit hohem Unbestimmtheitsgrad, bei denen die Zahl der den regelmäßigen Aufbau störenden Perturbationen — Störstellen — nicht zu groß ist.

Es muß noch erwähnt werden, daß die Einheitsfaktoren nur einmal, die Belastunsfaktoren dagegen — außer für die äußere Belastung — auch für jedes Perturbations-Kräftesystem getrennt bestimmt werden müssen. Die Berechnung der letzteren läßt sich aber sehr wesentlich vereinfachen, wenn man sich mit Näherungslösungen begnügt, da man den Umstand ausnützen kann, daß die zusätzliche Belastung in hinreichender Entfernung von der Störstelle rasch abklingt und so die Endbelastung nur unerheblich beeinflußt. Auf diese Weise hat man die Möglichkeit, die gegenseitige Beeinflussung der Störstellen außer acht zu lassen, wenn diese weit genug voneinander liegen.

Das beschriebene Verfahren hat den großen Vorteil, daß bei einer Steifigkeitsänderung (I^*) des zusätzlichen Konstruktionselementes die Umrechnung auf den neuen Wert einen nur unwesentlichen Arbeitsaufwand erfordert.

Dieser Vorteil kann auch bei der Bemessung anderer statisch unbestimmter unsymmetrischer Konstruktionen benützt werden. Erweist sich eine statisch unbestimmte Konstruktion an der einen oder anderen Stelle als zu schwach oder zu stark, so ist es nicht nötig, neue Einheits- und Belastungsfaktoren zu berechnen und das ganze Gleichungssystem von neuem zu lösen, vielmehr genügt die Berücksichtigung der örtlichen Abweichung. Dies aber erfordert besonders bei genügend raschem Abklingen der Störung verhältnismäßig wenig Arbeit.



Zahlenbeispiel (Bild 6)

M_0—Biegemoment des symmetrischen Trägers
M_1—Innere Kräfte am symmetrischen Träger infolge des Einheitsmomentes im Punkt 1.
M_2—Innere Kräfte am symmetrischen Träger infolge des Einheitsmomentes im Punkt 2.
M_1'—Innere Kräfte am abgetrennten Träger (I^*) infolge des Einheitsmomentes im Punkt 1.
M_2'—Innere Kräfte am abgetrennten Träger (I^*) infolge des Einheitsmomentes im Punkt 2.

Mit obigen Werten erhalten wir:

$$\delta_{01} = 2{,}305 \qquad \delta_{02} = 0{,}659$$

$$\delta_{11} = 0{,}14525 \qquad \delta_{12} = 0{,}0415$$

$$\delta_{22} = 0{,}15488 \qquad \delta_{21} = 0{,}0415$$

$$C_{11} = \frac{1}{3\,I^*} \qquad C_{12} = \frac{1}{6\,I^*}$$

$$C_{22} = \frac{1}{3\,I^*} \qquad C_{21} = \frac{1}{6\,I^*}$$

und mit deren Hilfe

$$X_1\left(0{,}14525 + \frac{1}{3\,I^*}\right) + X_2\left(0{,}0415 + \frac{1}{6\,I^*}\right) = 2{,}305$$

$$X_1\left(0{,}0415 + \frac{1}{6\,I^*}\right) + X_2\left(0{,}15488 + \frac{1}{3\,I^*}\right) = 0{,}659$$

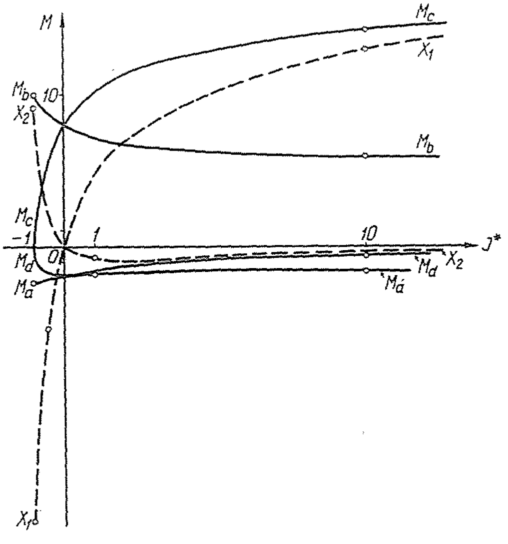


Bild 7

Die den verschiedenen Werten von I^* zugehörigen Lösungen, sind der Tafel und dem Bild 7 zu entnehmen.

I^*	X_1	X_2	Biegemomente über den einzelnen Auflagern			
			a	*b*	*c*	*d*
—1	—18,3	9,2	—2,51	+10	0	0
0	0	0	—1,975	+7,9	+7,9	—1,975
+1	5,1922	—0,86428	—1,81	+7,24	+10,38	—1,73
+10	13,1	—0,538	—1,542	+6,16	+14,43	—0,595
+∞	15,9	0	—1,45	+5,77	+15,85	0

Zusammenfassung

Die Berechnung von Kraftumleitungen läßt sich auf Aussparungen beliebiger Steifigkeit verallgemeinern. Diese allgemeine Methode eignet sich gut auch zur Berechnung der inneren Kräfte in nahezu symmetrischen Konstruktionen mit vielfacher statischer Unbestimmtheit. Durch Abtrennung des die regelmäßige Konstruktion strörenden Trägerelements kann man dessen Wirkung auf ein störendes Kräftesystem zurückführen. Die Größe der Perturbationskräfte wird durch gegenseitiges Abstimmen der Deformationen der entsprechenden Trägerelemente mit einem einfachen — im allgemeinen wenige Unbekannte enthaltenden — linearen Gleichungssystem bestimmt. Die Änderung der Steifigkeit des Konstruktionselementes, das die Störung verursacht, beeinflußt nur die Größe der Perturbationskräfte, daher kann die Wirkung einer lokalen Änderung der Steifigkeit der Konstruktion mit einer einfachen Rechnung ermittelt werden.

Schrifttum

1. WAGNER, H. — SIMON, H.: Über die Krafteinleitung in dünnwandige Zylinderschalen. Luftfahrtforschung, **13**, 293 (1936).
2. EBNER, H. — KÖLLER, H.: Über die Krafteinleitung in dünnwandige Zylinderschalen. Luftfahrtforschung, **14**, 607 (1937).

DR. P. MICHELBERGER, Budapest, XI. Egry József-u. 18, Ungarn.