

NÄHERUNGSVERFAHREN ZUR BESTIMMUNG DER AN DREHSYMMETRISCHEN RANDBELASTETEN KEGELSCHALEN ANGREIFENDEN SCHNITTKRÄFTE UND SCHNITTMOMENTE

Von

L. VARGA

Lehrstuhl für chemisches Maschinenwesen und landwirtschaftliche Industrien der Technischen
Universität, Budapest

(Eingegangen am 13. September 1961)

Vorgelegt von Prof. E. BASS

Die mathematisch genaue Bestimmung der an drehsymmetrischen, randbelasteten Kegelschalen angreifenden Schnittkräfte und Schnittmomente ist selbst bei ganz einfachen Randbelastungen äußerst kompliziert; sie bedarf einer großen mathematischen Rüstung und mühsamer Rechenarbeit und kann deshalb in der Praxis kaum verwendet werden.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Näherungsverfahren mitgeteilt, das das Problem bedeutend vereinfacht und auf verhältnismäßig einfachem rechnerischen Wege Lösungen liefert, die für die gesuchten Schnittkräfte und Schnittmomente — in unmittelbarer Nähe des belasteten Randes — auch praktisch brauchbare Werte ergeben.

Zunächst seien hier die Gleichgewichtsgleichungen der drehsymmetrischen, randbelasteten Kegelschale aufgeschrieben, die mit den Bezeichnungen der *Abb. 1* folgendermaßen lauten:

$$\frac{d}{dx}(N_x x) - N_\varphi = 0$$

$$N_\varphi + \frac{d}{dx}(Q_x x) \cotg \vartheta = 0 \quad (1.a-c)$$

$$\frac{d}{dx}(M_x x) - Q_x x + M_\varphi = 0.$$

Zur Bestimmung der insgesamt fünf unbekanntenen Schnittkräfte und Schnittmomente müssen auch die auf Grund der Elastizitätsgesetze abgeleiteten Beziehungen angewendet werden. Führt man hierzu die Dehnung der Mittelfläche der Kegelschale in Richtung der Erzeugenden (ϵ_x), die Dehnung in Umfangsrichtung (ϵ_φ), ferner die Winkeländerung χ ein, so gelten für die Schnittkräfte und Schnittmomente, für die Dehnungen und die Winkel-

änderung folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E\delta} (N_x - \mu N_\varphi) \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E\delta} (N_\varphi - \mu N_x) \\ \chi &= (\varepsilon_x - \varepsilon_\varphi) \cotg \vartheta - r_\varphi \frac{d\varepsilon_\varphi}{dx} = \\ &= \frac{\cotg \vartheta}{E\delta} \left[(1 + \mu)(N_x - N_\varphi) - x \left(\frac{dN_\varphi}{dx} - \mu \frac{dN_x}{dx} \right) \right]\end{aligned}\quad (2.a-c)$$

wobei

δ die Schalendicke

E den Elastizitätsmodul

μ die *Poissonsche* Konstante

bedeutet.

Drückt man die Schnittkräfte mit den oben angeführten Beziehungen aus und berücksichtigt man auch die Deutung der Schnittmomente, erhält man folgende bekannte Beziehungen:

$$\begin{aligned}N_x &= D (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_\varphi) \\ N_\varphi &= D (\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_x) \\ M_x &= -B \left(\frac{d\chi}{dx} + \mu \frac{\chi}{x} \right) \\ M_\varphi &= B \left(\frac{\chi}{x} + \mu \frac{d\chi}{dx} \right).\end{aligned}\quad (3.a-d)$$

In diesen Gleichungen bedeuten die Größen

$$D = \frac{E\delta}{(1 - \mu^2)} \text{ die Dehnungssteifigkeit und}$$

$$B = \frac{E\delta^3}{12(1 - \mu^2)} \text{ die Biegesteifigkeit der Schale.}$$

Nun können die Schnittkräfte und Schnittmomente bestimmt werden. Zunächst ergibt sich aus der Gleichgewichtsgleichung (1. a) der Wert von N_φ zu

$$N_\varphi = \frac{d}{dx} (N_x x). \quad (4)$$

Mit Gl. (4) hat man aus Gl. (1. b)

$$\frac{d}{dx}(N_x x) = - \frac{d}{dx}(Q_x x) \cotg \vartheta$$

und hieraus

$$N_x = - Q_x \cotg \vartheta = - Q_x \operatorname{tg} \alpha. \tag{5}$$

Aus der Regularität der Kegelspitze folgt, daß die Integrationskonstante gleich Null ist.

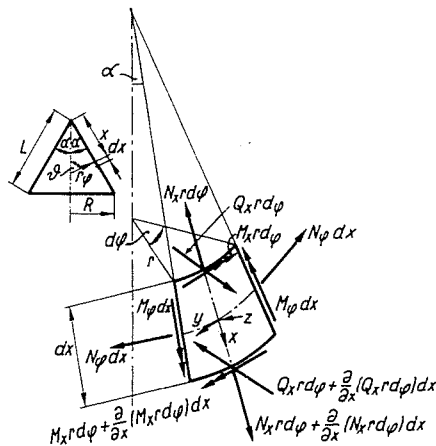


Abb. 1

Mit Gl. (4) wird

$$N_\varphi = \frac{dN_x}{dx} x + N_x = - \left(x \frac{dQ_x}{dx} + Q_x \right) \operatorname{tg} \alpha. \tag{6}$$

Setzt man die Ausdrücke (5) und (6) der Schnittkräfte und deren Ableitungen in die Gl. (2. c) der Winkeländerung ein, so ergeben diese nach Durchführung der nötigen Operationen

$$\chi = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{E \delta} \left(x^2 \frac{d^2 Q_x}{dx^2} + 3x \frac{dQ_x}{dx} \right). \tag{7}$$

Im nächsten Schritt wird nun mit Hilfe der Gln. (3. c) und (3. d) der durch χ ausgedrückte Wert der Schnittmomente und deren Ableitung in die Gleichgewichtsgleichung (1. c) eingesetzt, worauf man mit den nötigen Opera-

tionen die Beziehung

$$x \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{d\zeta}{dx} - \frac{\zeta}{x} + \frac{1}{B} Q_x x = 0 \quad (8)$$

erhält.

Von den in den Ausdrücken (7) und (8) enthaltenen Größen können — mit den bei der Schalentheorie üblichen Vernachlässigungen für dünne Schalen — die Ableitungen niedrigerer Ordnung von Q_x und ζ neben den Ableitungen höherer Ordnung vernachlässigt werden. Auf diese Weise gelangen wir zu folgendem Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{E\delta}{\text{tg}^2 a} \zeta &= x^2 \frac{d^2 Q_x}{dx^2} \\ \frac{d^2 \zeta}{dx^2} &\cong - \frac{1}{B} Q_x. \end{aligned} \quad (9.a-b)$$

Schließlich soll mit Hilfe von Gl. (9. b) die zweite Ableitung von Q_x in Gl. (9. a) eingesetzt werden. Nach entsprechenden Substitutionen und Umwandlungen erhält man als Endergebnis die Differentialgleichung

$$x^2 = \frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \frac{12(1 - \mu^2)}{\delta^2 \text{tg}^2 a} \zeta = 0. \quad (10)$$

Da

$$x^2 = \frac{r_\varphi^2}{\text{tg}^2 a},$$

kann obige Differentialgleichung in der Form

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} + \frac{12(1 - \mu^2)}{\delta^2 r_\varphi^2} \zeta = 0 \quad (10')$$

geschrieben werden.

Zur Vereinfachung der Lösung der Differentialgleichung (10) wird man zweckmäßig von folgendem Gedankengang ausgehen:

Unsere Aufgabe besteht in jedem Fall in der Untersuchung der Wirkung der vom Rand $x = L$ ausgehenden Störungen. Diese Wirkungen werden bekanntlich außerordentlich schnell gedämpft und klingen schon in verhältnismäßig kurzer Entfernung vom belasteten Rand ab. Bis zu der der Abklüngenlänge entsprechenden Entfernung vom Rand $x_n \cong 0.91 L$ läßt sich nur eine geringe Werteänderung r_φ feststellen (vorausgesetzt, daß $a \leq 30^\circ$ ist). Bei praktischen Berechnungen kann also mit dem konstanten Wert

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \mu^2)}{\delta^2 R_\varphi^2}}$$

gerechnet werden, wobei der Wert von r_q an der Stelle $x = L$ mit R_q bezeichnet wurde. Auf diese Weise gelingt es also, die homogene lineare Differentialgleichung (10) mit ihren veränderlichen Koeffizienten durch folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu ersetzen:

$$-\frac{d^4 \chi}{dx^4} + 4\beta^4 \chi = 0. \quad (11)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (11) — die nur für den Wert $x = L$ bzw. in unmittelbarer Nähe des belasteten Randes gültig ist — wird nach den üblichen Umgestaltungen folgendermaßen lauten:

$$\chi = e^{-\beta \bar{x}} (C_1 \cos \beta \bar{x} + C_2 \sin \beta \bar{x}), \quad (12)$$

wobei

$$\bar{x} = L - x.$$

Mit Hilfe von Gl. (12) lassen sich die Schnittkräfte und Schnittmomente wie folgt bestimmen:

Mit (9. b) hat man

$$Q_x = 2B \beta^2 e^{-\beta \bar{x}} (C_2 \cos \beta \bar{x} - C_1 \sin \beta \bar{x}). \quad (13)$$

Aus (5) folgt

$$N_x = 2B \beta^2 \operatorname{tga} e^{-\beta \bar{x}} (C_1 \sin \beta \bar{x} - C_2 \cos \beta \bar{x}). \quad (14)$$

Auf Grund von Gl. (6) ist

$$N_q = 2B \beta^2 \operatorname{tga} e^{-\beta \bar{x}} \{ [x\beta(C_1 - C_2) + C_1] \sin \beta \bar{x} - [x\beta(C_1 + C_2) + C_2] \cos \beta \bar{x} \} \quad (15)$$

Gemäß Gl. (3. d) gilt

$$M_q = B e^{-\beta \bar{x}} \left\{ \left[\frac{1}{x} C_1 + \mu \beta (C_1 - C_2) \right] \cos \beta \bar{x} + \left[\frac{1}{x} C_2 + \mu \beta (C_1 + C_2) \right] \sin \beta \bar{x} \right\}. \quad (16)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (3. c) schließlich erhält man

$$\begin{aligned} \dot{M}_x = B e^{-\beta \bar{x}} \left\{ \left[\beta (C_2 - C_1) - \frac{\mu}{x} C_1 \right] \cos \beta \bar{x} - \right. \\ \left. - \left[\beta (C_1 + C_2) + \frac{\mu}{x} C_2 \right] \sin \beta \bar{x} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Die in den Ausdrücken der Schnittkräfte und Schnittmomente enthaltenen Integrationskonstanten C_1 und C_2 können anhand der bekannten Randbedingungen folgendermaßen ermittelt werden:

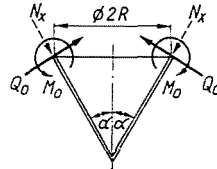


Abb. 2

Im allgemeinen Fall wird der Schalenrand von einer Schnittkraft und einem Schnittmoment gemäß Abb. 2 belastet, die Randbedingungen werden also lauten:

$$Q_x = Q_{x0} \quad \text{an den Stellen } x = L \text{ bzw. } \bar{x} = 0.$$

$$M_x = M_0$$

Setzt man die bekannte Randbelastung in Gln. (13) und (17) ein und löst man die auf diese Weise gewonnenen zwei Gleichungen nach C_1 und C_2 auf, so gelangt man zu den Ausdrücken

$$C_1 = \frac{Q_{x0} - 2\beta M_0}{2B\beta^2 \left(1 + \frac{\mu}{L\beta}\right)} \quad (18)$$

und

$$C_2 = \frac{Q_{x0}}{2B\beta^2}. \quad (19)$$

Für die Praxis ist auch jener Randbelastungsfall von Bedeutung, in welchem der Schalenrand nur von der Schnittkraft Q_{x0} belastet ist. In diesem Fall gelten für die Randbedingungen

$$Q_x = Q_{x0} \quad \text{an den Stellen } x = L \text{ bzw. } \bar{x} = 0.$$

$$M_x = 0$$

Gemäß den Beziehungen (18) und (19) schreiben sich die Integrationskonstanten zu

$$C_2 = \frac{Q_{x0}}{2B\beta^2}$$

und

$$C_1 = \frac{Q_{x0}}{2B\beta^2 \left(1 + \frac{\mu}{L\beta}\right)} = C_2 \frac{1}{1 + \frac{\mu}{L\beta}}.$$

Bei den in der Praxis vorkommenden Schalen gilt meistens $\frac{\mu}{L\beta} \ll 1$,

d. h. der Wert von $\frac{\mu}{L\beta}$ kann neben 1 vernachlässigt werden, man hat also

$$C_1 \cong C_2 = \frac{Q_{x0}}{2B\beta^2}.$$

Mit dieser Beziehung erhält man für die Schnittkräfte und Schnittmomente folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} N_x &= -Q_{x0} \operatorname{tg} a e^{-\beta \bar{x}} (\cos \beta \bar{x} - \sin \beta \bar{x}) \\ N_\varphi &= Q_{x0} \operatorname{tg} a e^{-\beta \bar{x}} [\sin \beta \bar{x} - (2x\beta + 1) \cos \beta \bar{x}] \\ Q_x &= Q_{x0} e^{-\beta \bar{x}} (\cos \beta \bar{x} - \sin \beta \bar{x}) \\ M_x &= -\frac{Q_{x0}}{2\beta^2} e^{-\beta \bar{x}} \left[\frac{\mu}{x} \cos \beta \bar{x} + \left(2\beta + \frac{\mu}{x}\right) \sin \beta \bar{x} \right] \\ M_\varphi &= \frac{Q_{x0}}{2\beta^2} e^{-\beta \bar{x}} \left[\frac{1}{x} \cos \beta \bar{x} + \left(\frac{1}{x} + 2\mu\beta\right) \sin \beta \bar{x} \right]. \end{aligned}$$

Ist der Schalenrand nur vom Schnittmoment M_{x0} belastet, d. h. gelten die Randbedingungen

$$Q_x = 0$$

für $x = L$ bzw. $\bar{x} = 0$,

$$M_x = M_0$$

erhält man für die Integrationskonstanten die Werte

$$C_1 = -\frac{M_0}{B \left(\beta + \frac{\mu}{L}\right)}$$

und

$$C_2 = 0.$$

Die Schnittkräfte und Schnittmomente lassen sich dann durch die Beziehungen

$$N_x = - \frac{2M_0 \beta \operatorname{tg} a}{1 + \frac{\mu}{\beta L}} e^{-\beta \bar{x}} \sin \beta \bar{x}$$

$$N_\varphi = \frac{2M_0 \beta \operatorname{tg} a}{1 + \frac{\mu}{\beta L}} e^{-\beta \bar{x}} [x\beta \cos \beta \bar{x} - (x\beta + 1) \sin \beta \bar{x}]$$

$$Q_x = \frac{2M_0 \beta}{1 + \frac{\mu}{L\beta}} e^{-\beta \bar{x}} \sin \beta \bar{x}$$

$$M_x = \frac{M_0}{\beta + \frac{\mu}{L}} e^{-\beta \bar{x}} \left[\left(\beta + \frac{\mu}{x} \right) \cos \beta \bar{x} + \beta \sin \beta \bar{x} \right]$$

$$M_\varphi = - \frac{M_0}{\beta + \frac{\mu}{L}} e^{-\beta \bar{x}} \left[\left(\frac{1}{x} + \mu\beta \right) \cos \beta \bar{x} + \mu\beta \sin \beta \bar{x} \right]$$

ausdrücken.

Abschließend soll nochmals betont werden, daß die zur Bestimmung der Schnittkräfte und Schnittmomente gewonnenen einfachen Beziehungen nur in dem dem Wert $x = L$ zugehörigen engen Bereich verhältnismäßig genaue Ergebnisse liefern. Die beste Annäherung erhält man an der Stelle $x = L$, was um so erfreulicher ist, als die Randbelastungen hier die größten Spannungen wecken bzw. als sich der aus Festigkeitsgründen erforderliche Schalenquerschnitt aus diesen Spannungen errechnen läßt.

Zahlenbeispiel

Zur Illustration der obigen Ausführungen und zur Bestimmung des Ausmaßes der Annäherung soll folgendes Zahlenbeispiel dienen.

Die geometrischen Abmessungen der Schale und ihre Elastizitätskennzahlen betragen:

$$L = 100 \text{ cm}$$

$$\delta = 1 \text{ cm}$$

$$a = 45^\circ$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mu = 0,3$$

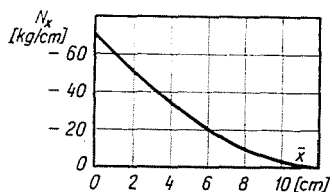


Abb. 3

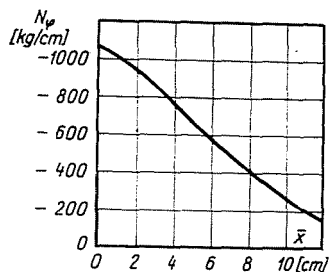


Abb. 4

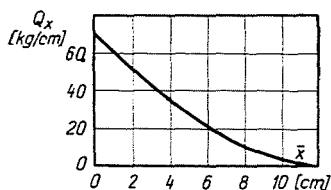


Abb. 5

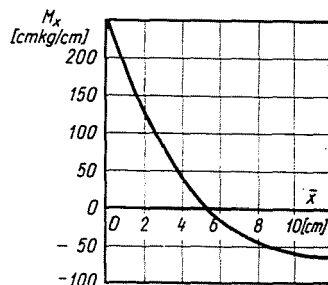


Abb. 6

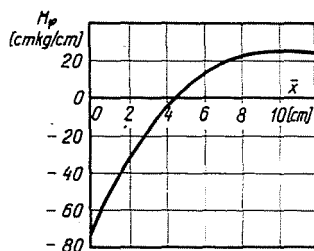


Abb. 7

Die Randbelastungen lauten:

$$Q_{x0} = 70,7 \text{ kg/cm}$$

$$M_0 = 250 \text{ cmkg/cm}$$

Die auf Grund der abgeleiteten Beziehungen ermittelten Schnittkräfte und Schnittmomente sowie ihre Änderungen in Richtung der Erzeugenden sind in den Abb. 3—7 aufgetragen.

Nach den Abbildungen ergeben sich für die am Rand $x = L$ angreifenden Schnittkräfte und Schnittmomente folgende Werte:

$$\begin{array}{ll}
 N_x = -70,7 \text{ kg/cm} & (-70,7) \\
 N_\varphi = 1\,060 \text{ kg/cm} & (-934) \\
 Q_x = 70,7 \text{ kg/cm} & (70,7) \\
 M_x = 250 \text{ cmkg/cm} & (250) \\
 M_\varphi = -73,1 \text{ cmkg/cm} & (-77).
 \end{array}$$

Die in Klammern neben unseren Ergebnissen stehenden Ausdrücke stellen die von KANTOROWITSCH [3] errechneten Werte dar, die als mathematisch genau angesehen werden können. Aus dem Vergleich der beiden Ergebnisse geht hervor, daß der Unterschied zwischen ihnen bezüglich der Spannungen noch innerhalb der Grenzen der bei theoretischen Berechnungen ohnehin bestehenden Unsicherheiten liegt. Demzufolge erweist sich die hier mitgeteilte einfache Berechnungsmethode auch für verhältnismäßig große Konuswinkel ($\alpha = 45^\circ$) als brauchbar. Die Annäherungsgenauigkeit nimmt bei $\alpha < 45^\circ$ selbstverständlich zu.

Zusammenfassung

In dieser Abhandlung wird ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der in dreh-symmetrischen, randbelasteten Kegelschalen auftretenden Schnittkräfte und Schnittmomente mitgeteilt. Die Genauigkeit der auf Grund der abgeleiteten einfachen Beziehungen gewonnenen Ergebnisse — die für Kegelschalen mit verhältnismäßig kleinem Konuswinkel ($\alpha \leq 45^\circ$) gültig sind — hängt von der Entfernung der untersuchten Stelle vom belasteten Rand ab. Hinsichtlich der Größe der am belasteten Rand auftretenden Schnittkräfte und Schnittmomente liefert das Näherungsverfahren — wie mit Hilfe des angeführten Zahlenbeispiels bewiesen wurde — Werte, die als praktisch genau angesehen werden können.

Schrifttum

1. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Wien, 1959.
2. TIMOSHENKO, St.: Theory of Plates and Shells. New York, 1940.
3. KANTOROWITSCH, S.: Die Festigkeit der Apparate und Maschinen für die chemische Industrie. Berlin, 1955.
4. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin, 1957.

L. VARGA, Budapest XI. Stoczek u. 2. Ungarn.