

ITERATIONSVERFAHREN ZUR PROFILBESTIMMUNG VON GERADEN UND RADIALEN SCHAUFELGITTERN MIT HILFE BELIEBIGER TRÄGERKURVEN DER HYDRODYNAMISCHEN SINGULARITÄTEN*

Von

T. CZIBERE

Lehrstuhl für Mathematik der Fakultät für Maschinenwesen, der Technischen Universität
Budapest

(Eingegangen am 21. Oktober 1960)

Vorgelegt von PROF. DR. Ing. S. BORBÉLY.

Im folgenden wird ein Iterationsverfahren zur Berechnung von Schaufelgittern mit großer Ablenkung dargelegt. Es beruht — unter den üblichen Voraussetzungen — auf der Methode der komplexen hydrodynamischen Singularitäten und ist zur direkten Bestimmung sowohl der geraden als auch der radialen Schaufelgitter geeignet. Das Verfahren wurde im Rahmen des Forschungsprogramms für Wasserturbinen und Pumpen der Fabrik GANZ-MÁVAG entwickelt.

Die beiden Aufgaben, deren Lösungen wir angeben werden, sind folgende:

1. das gerade Schaufelgitter mit gegebener Schaufelteilung zu bestimmen, das eine ebene Parallelströmung gegebener Richtung um einen gegebenen Winkel ablenken soll,

2. das radiale Schaufelgitter mit gegebener Schaufelzahl zu bestimmen, das die Zirkulation einer aus gegebener Quelle herrührenden ebenen Zirkulationsströmung um einen gegebenen Wert abändert.

Das Verfahren, welches wir zur Lösung dieser Aufgaben anwenden, ist eine Weiterentwicklung des Verfahrens von SCHOLZ [1].

Die sogenannten linearen Berechnungsverfahren, die auf Singularitätenverteilungen längs der Schaufelsehne — also längs einer Geraden — beruhen, und somit nur für schwach gewölbte Profile der geraden Schaufelgitter angewandt werden können, sind bekannt.

Es ist naheliegend, die Möglichkeit der Anwendung des Singularitätenverfahrens auch auf stark gewölbte Profile zu erweitern, indem man dem Berechnungsverfahren Singularitätenverteilungen längs einer beliebigen Trägerkurve zugrunde legt. Wir ordnen die Singularitätenverteilungen (d. h. die Quellverteilungen und Wirbelverteilungen), die die Schaufelprofile hydrodynamisch ersetzen, längs einer in der Nähe der Skelettlinie gewählten Kurve bzw. längs der aus dieser als Ausgangskurve durch Iteration bestimmten

* Vortrag, gehalten am 2. September 1960 vor dem X. Internationalen Kongreß für Angewandte Mechanik in Stresa, Italien.

Kurven an, und gewinnen durch systematische Iteration die Skelettlinie der Schaufel. Dadurch wird das Iterationsverfahren zur Berechnung sowohl schwach als auch stark gewölbter Schaufeln von geraden und radialen Gittern geeignet.

Bekanntlich wird durch eine Quellverteilung, die längs einer Geraden angeordnet ist, keine Normalgeschwindigkeit zur Geraden induziert. Da beim linearen Verfahren die Geschwindigkeiten längs der Skelettlinie aus den Geschwindigkeiten längs der singularitätentragenden Geraden durch eine Transformation berechnet werden, ergeben sich längs der Skelettlinie keine durch die Quellverteilung induzierten Normalgeschwindigkeiten, obwohl diese Geschwindigkeitskomponenten längs jeder gekrümmten Trägerkurve auftreten. Folglich kann beim linearen Verfahren keine durch die Quellverteilung induzierte Normalgeschwindigkeit in der Stromlinienbedingung bezüglich der Skelettlinie auftreten. Da die Skelettlinie der Schaufel mit Hilfe der so bestimmten Stromlinienbedingung berechnet wird, kann sie im linearen Fall, streng genommen, nur dann eine Stromlinie sein, wenn sie lediglich eine Wirbelverteilung trägt. Das ist der Fall, wenn die Schaufeln »unendlich dünn« sind. Bei linear berechneten Schaufelprofilen wird also — infolge der Quellverteilung — die so ermittelte Skelettlinie keine Stromlinie sein.

Unser Iterationsverfahren ist auf die längs einer beliebigen Trägerkurve angeordneten Quell- und Wirbelsingularitätenverteilungen aufgebaut. Dabei werden sämtliche längs der Skelettlinie — als Trägerkurve der Singularitäten — auftretende induzierte Geschwindigkeitskomponenten berücksichtigt und tabellarisch berechnet. Die Skelettlinie kann demnach so bestimmt werden, daß sie eine Stromlinie der Gitterströmung sei, die gleichzeitig die Quell- und Wirbelsingularitätenverteilungen trägt.

1. Das gerade Schaufelgitter*

a) *Die induzierten Geschwindigkeiten.* Im hydrodynamischen Modell des geraden Schaufelgitters ist jede Schaufel durch die längs der Skelettlinie der Schaufel angeordneten Quell- und Wirbelsingularitäten hydrodynamisch ersetzt. Das induzierte Geschwindigkeitsfeld dieser Singularitätenverteilung wird dem Feld einer Parallelströmung mit der Geschwindigkeit W_∞ überlagert (Abb. 1).

Wenn wir mit (s) die singularitätentragende Kurve, mit λ den Winkel zwischen der Gitterrichtung und der y -Achse des Koordinatensystems und mit t die Schaufelteilung bezeichnen, dann erhalten wir als Integral für die induzierte komplexe Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt P der komplexen Ebene (Abb. 2)

* Ausführlicher dargestellt in [2].

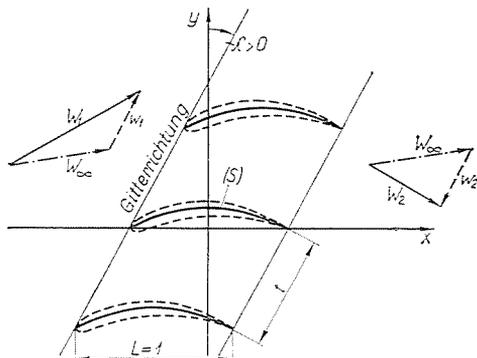


Abb. 1

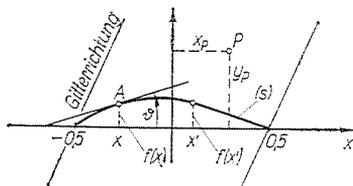


Abb. 2

$$\bar{w}(P) = \frac{e^{i\lambda}}{2t} \int_{(s)} (q + i\gamma) \operatorname{cth} \frac{\pi e^{i\lambda}}{t} [x_p - x' + i\{y_p - f(x')\}] ds,$$

wobei x_p ; y_p die Koordinaten des Punktes P und x' ; $f(x')$ die des Punktes der Trägerkurve (s) — also des Laufpunktes der Integration — bedeuten; ferner sind q bzw. γ die Quell- bzw. Wirbelverteilung längs der Trägerkurve (s). Das Linienintegral der Wirbelverteilung γ längs der Trägerkurve (s) liefert die Gesamtzirkulation Γ der Schaufel und das Linienintegral der Quellverteilung q liefert die gesamte Quellstärke Q , die im Fall verschwindender Hinterkantendicke des Profils Null ist, d. h.

$$\int_{(s)} \gamma ds = \Gamma \quad \int_{(s)} q ds = Q = 0.$$

Bekanntlich ändern sich die induzierten Geschwindigkeiten beim Überschreiten der Trägerkurve sprunghaft. Die Untersuchung dieser Unstetigkeit liefert die induzierten Geschwindigkeiten an beiden Seiten der Trägerkurve in der Form

$$\bar{w}(s) = \pm \frac{\gamma - iq}{2} e^{-i\theta} + \frac{e^{i\lambda}}{2t} \int_{(s)} (q + i\gamma) \operatorname{cth} \frac{\pi e^{i\lambda}}{t} [x - x' + i\{f(x) - f(x')\}] ds,$$

wobei das obere Vorzeichen sich auf die Geschwindigkeit der Saugseite und das untere auf die der Druckseite bezieht. ϑ bedeutet den Neigungswinkel der Tangente der Trägerkurve (s) zur x Achse im Aufpunkt, in welchem wir die induzierte Geschwindigkeit berechnen wollen. Das Integral ist als CAUCHY-scher Hauptwert zu verstehen.

Durch den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ erhalten wir daraus die induzierte Geschwindigkeit der betrachteten Einzelschaufel in der Form

$$\bar{w}_E = u_E - iv_E = \pm \frac{\gamma - iq}{2} e^{-i\vartheta} + \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} (q + i\gamma) E(x, x') \frac{ds}{x - x'}$$

$$E(x, x') = R(E) + iI(E) = \frac{1}{1 + i \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}}.$$

$E(x, x')$ bedeutet die im Integrationsbereich beschränkte komplexe Einflußfunktion.

Alle übrigen Schaufeln des Gitters induzieren längs der betrachteten Trägerkurve folgende, als Gitterwirkung bezeichnete, Geschwindigkeit:

$$\bar{w}_G = u_G - iv_G = \frac{1}{2t} \int_{(s)} (q + i\gamma) F(x, x'; \lambda, t) ds$$

$$F(x, x'; \lambda, t) = R(F) + iI(F) = e^{i\lambda} \operatorname{cth} \frac{\pi e^{i\lambda}}{t} [x - x' + i\{f(x) - f(x')\}] -$$

$$- \frac{t}{\pi [x - x' + i\{f(x) - f(x')\}]}.$$

In diesem Falle ist $F(x, x'; \lambda, t)$ die komplexe Einflußfunktion dieser Geschwindigkeit.

Mit Hilfe dieser Ausdrücke kann bereits der Unterschied dargelegt werden, den unser Iterationsverfahren im Vergleich zu den linearen Verfahren darstellt. Nach dem Iterationsverfahren läßt sich das Geschwindigkeitsfeld berechnen, das der tatsächliche Geschwindigkeitssprung längs der Trägerkurve in der komplexen Ebene induziert. Dagegen bedeutet die Anwendung der singularitätenträgenden Schaufelsehne zur Berechnung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes bei den linearen Verfahren stets eine — der örtlichen Lokalisation nach — lineare Näherung. Das lineare Verfahren ergibt sich als ein Spezialfall des Iterationsverfahrens. Ist nämlich die Trägerkurve eine mit der x -Achse zusammenfallende Gerade, dann gelten die Ausdrücke

$$\vartheta \equiv 0 \qquad f(x) \equiv 0$$

$$E(x, x') \equiv 1$$

$$F(x, x'; \lambda, t) = e^{i\lambda} \operatorname{cth} \frac{\pi e^{i\lambda}}{t} (x - x') - \frac{t}{\pi(x - x')},$$

und unsere vorigen Integrale für die Geschwindigkeiten \bar{w}_E und \bar{w}_G gehen in die bekannten Formeln des linearen Verfahrens über.

Bezüglich der induzierten Geschwindigkeit der Einzelschaufel führen wir die Transformation $-2x = \cos \Theta$ ein, und erweitern den Gültigkeitsbereich der Singularitätenverteilungen q , γ bzw. der Einflußfunktionen $R(E)$, $I(E)$ — durch Fortsetzung — auf den Bereich $\Theta = \pi \dots 2\pi$. Dabei müssen die Singularitätenverteilungen hinsichtlich π zentralsymmetrisch und die Einflußfunktionen achsensymmetrisch fortgesetzt werden.

Nach diesen Umformungen erhalten wir folgende Integrale zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten der Einzelschaufel:

$$u_{Eq} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* R(E) \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta'$$

$$u_{E\gamma} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* I(E) \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta'$$

$$v_{Eq} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* I(E) \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta',$$

$$v_{E\gamma} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* R(E) \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta',$$

wobei

$$q^* = q \frac{ds}{dx} = q \sqrt{1 + f'(x)^2}; \quad \gamma^* = \gamma \frac{ds}{dx} = \gamma \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Zur Berechnung der Gitterwirkung stehen uns die Integrale

$$u_{Gq} = \frac{1}{2t} \int_{x'=-0.5}^{0.5} q^* R(F) dx'$$

$$u_{G\gamma} = -\frac{1}{2t} \int_{x'=-0.5}^{0.5} \gamma^* I(F) dx'$$

$$v_{Gq} = -\frac{1}{2t} \int_{x'=-0,5}^{0,5} q^* I(F) dx'$$

$$v_{G\gamma} = -\frac{1}{2t} \int_{x'=-0,5}^{0,5} \gamma^* R(F) dx'$$

zur Verfügung.

Da die Einflußfunktionen $R(E)$, $I(E)$ bzw. $R(F)$, $I(F)$ im Integrationsbereich beschränkt sind, können diese Integrale — ähnlich dem linearen Verfahren von SCHOLZ — tabellarisch berechnet werden. Diese Integrale der induzierten Geschwindigkeitskomponenten beziehen sich auf beliebige einwertige Trägerkurven.

Bei der Durchführung unseres Iterationsverfahrens haben wir einen entsprechend ermittelten Kreisbogen als Ausgangsnäherung der Trägerkurve gewählt, es müssen mithin die vorigen allgemeinen Integrale auch für den singularitätentragenden Kreisbogen mit dem Halbmesser R ermittelt werden. Dadurch erhalten wir die folgenden Ausdrücke für die induzierte Tangential- und Normalgeschwindigkeit der Einzelschaufel:

$$w_{Eqt} = -\frac{1}{8\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \Theta}{2R}\right)^2} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' -$$

$$-\frac{1}{8\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^{**} \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta'$$

$$w_{Eqn} = \frac{1}{4\pi R} \int_{(s)} q ds = \frac{1}{4\pi R} Q$$

$$w_{E\gamma t} = \frac{1}{4\pi R} \int_{(s)} \gamma ds = \frac{1}{4\pi R} \Gamma$$

$$w_{E\gamma n} = \frac{1}{8\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \Theta}{2R}\right)^2} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' +$$

$$+\frac{1}{8\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^{**} \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta',$$

wobei

$$q^{**} = q^* \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \Theta'}{2R}\right)^2}; \quad \gamma^{**} = \gamma^* \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \Theta'}{2R}\right)^2}$$

Falls also die Hinterkantendicke des Profils endlich, d. h. Q nicht Null ist, wird — wie aus obigem ersichtlich — von der Quellverteilung q induziert eine konstante Normalgeschwindigkeit längs des singularitätentragenden Kreisbogens auftreten. Ebenso induziert die Wirbelverteilung γ längs dieses Kreisbogens eine konstante Tangentialgeschwindigkeit. Aus diesen Formeln erhalten wir mit Hilfe des Grenzüberganges $R \rightarrow \infty$ die induzierten Geschwindigkeiten längs der singularitätentragenden Geraden. In diesem Fall verschwinden die Komponenten $w_{E\eta n}$ bzw. $w_{E\gamma t}$ und die Formeln von $w_{E\eta t}$ und $w_{E\gamma n}$ gehen in die entsprechenden Formeln des linearen Verfahrens über.

Da die vorliegenden Integrale hinsichtlich ihres formalen Aufbaues mit den entsprechenden Integralen des linearen Verfahrens formal übereinstimmen, können sie mit Hilfe der Tabellen des linearen Verfahrens berechnet werden.

b) *Bestimmung des Schaufelprofils.* Im hydrodynamischen Modell des geraden Schaufelgitters ist die Skelettlinie der Schaufel die Stromlinie, die die Singularitätenverteilungen q und γ trägt. Der Konturlinie des Profils entspricht die Verzweigungsstromlinie, welche die aus dem Unendlichen kommende Parallelströmung von jener Strömung scheidet, die aus der Quell-Senkenverteilung q innerhalb des Profils hervorgerufen wird.

Die Skelettlinie der Schaufel muß man also auf Grund der Stromlinienbedingung bestimmen. In der Gleichung der Stromlinienbedingung treten aber die induzierten Geschwindigkeiten auf, zu deren Bestimmung wir die Trägerkurve — also die singularitätentragende Skelettlinie, die wir eben bestimmen wollen — kennen müßten. In der Verkettung dieser Voraussetzungen liegt die Schwierigkeit der direkten Lösung der Aufgabe, sie ist aber gleichzeitig die typische Problemstellung eines Iterationsprozesses.

Die Skelettlinie — als singularitätentragende Stromlinie — wird durch Iteration mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\frac{dy_s}{dx} = \frac{V_\infty + v_G - (u_{E\eta} + u_{E\gamma}) \frac{df}{dx} + v_{E\eta} + v_{E\gamma}}{U_\infty + u_G}$$

bestimmt, die sich aus der Stromlinienbedingung für die Skelettlinie ergibt. Längs eines entsprechend ermittelten, singularitätentragenden Kreisbogens (s_1) werden die induzierten Geschwindigkeiten bestimmt und auf Grund der vorigen Differentialgleichung wird die Stromlinie (S_1) als erste Näherung der Skelettlinie berechnet. Im zweiten Iterationsschritt werden die Singularitätenverteilungen q, γ auf die Kurve (s_2) \equiv (S_1) transformiert, die induzierten Geschwindigkeiten sodann längs der Kurve (s_2) bestimmt, und danach wird die neue Stromlinie (S_2) als zweite Näherung der Skelettlinie berechnet. Die Iteration wird soweit fortgesetzt, bis die i -te Trägerkurve (s_i) mit der Strom-

linie (S_i) praktisch zusammenfällt. Die zahlenmäßigen Auswertungen ergeben, daß bei Schaufeln mit Ablenkungen bis einschließlich 50° bereits der erste, bei den ganz stark gewölbten der zweite Iterationsschritt schon praktisch genaue Ergebnisse liefert. Die Auswertung des dritten Iterationsschrittes war bei den Gittern mit Ablenkungen von $120-130^\circ$ nur in einigen Fällen nötig.

Nach der Bestimmung der Skelettlinie können die Tangential- und die Normalgeschwindigkeiten an beiden Seiten der Skelettlinie auf Grund der Gleichungen

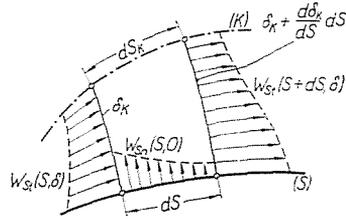


Abb. 3

$$W_{St} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_s'^2}} \left[U_\infty + u_G + (V_\infty + v_G) y_s' + u_{E\gamma} + \right. \\ \left. + u_{E\gamma} + (v_{E\gamma} + v_{E\gamma}') f'(x) \pm \frac{\gamma^*}{2} \right] \\ W_{Sn} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_s'^2}} \left[\pm \frac{q^*}{2} \right]$$

berechnet werden.

Zur Bestimmung der Dickenverteilung δ_K des Profils dient die Gleichung

$$W_{St}(S, \delta_K) \frac{dS_K}{dS} - W_{Sn}(S, \delta_K) = 0,$$

die sich aus der Kontinuitätsbedingung der Strömung innerhalb des Profils ergibt (Abb. 3). Nach der Reihenentwicklung von W_{St} bzw. W_{Sn} und nach Integration erhalten wir die Lösung in Näherung erster bzw. zweiter Ordnung in der Form

$$\delta_K^{(1)} = \frac{1}{2W_{St_0}} \int_0^S q dS \\ \delta_K^{(2)} = \frac{2}{\frac{dq}{dS}} \left\{ -W_{St} \pm \sqrt{W_{St}^2 + \frac{1}{2} \frac{dq}{dS} \int_0^S q dS} \right\}.$$

Da die Werte der Tangentialgeschwindigkeit W_{St} und somit auch die Profildicke δ_K an beiden Seiten der Skelettlinie verschieden sind, ist die Skelettlinie keine Mittellinie des Profils.

Die Konturgeschwindigkeit wird unter den üblichen Voraussetzungen berechnet. Wenn auf der Skelettlinie nur die Wirbelverteilung γ angeordnet ist, kann die Geschwindigkeit in der Entfernung δ_K von der Skelettlinie mit guter Annäherung durch W_{Syt} dargestellt werden, die längs der Skelettlinie wirkt. Die Konturgeschwindigkeit wird nun durch Überlagerung der Tangentialkomponenten dieser und der aus q herrührenden Geschwindigkeit berechnet, die längs der Konturlinie auftritt

$$W_K = \frac{W_{Syt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\delta_K}{dS}\right)^2}} \left[1 + \frac{2}{q} \frac{d\delta_K}{dS} w_{Eqt} \frac{ds}{dS} \right].$$

Mit Hilfe der BERNOULLISCHEN Gleichung ergibt sich daraus die Druckverteilung um das Profil.

2. Das radiale Schaufelgitter

a) *Die induzierten Geschwindigkeiten.* Das oben dargelegte Iterationsverfahren bezüglich des geraden Schaufelgitters ist mit Hilfe der bekannten KÖNIGSchen Abbildungsfunktion

$$\zeta = \frac{Nt}{2\pi} \ln z$$

auch zur Berechnung rotierender radialer Schaufelgitter mit großer Ablenkung geeignet. Nachdem man die Momentaufnahme der Absolutströmung des radialen Gitters anhand der erwähnten Abbildungsfunktion auf gerade Gitterströmung zurückgeführt hat, kann man die induzierten Absolutgeschwindigkeiten mit Hilfe der Integralausdrücke des geraden Gitters ohne weiteres berechnen. Auf Grund der längs gekrümmter Trägerkurven angeordneten Singularitäten kann aber die Lösung dieses Problemerkrees auch direkt im radialen Schaufelgitter — ohne Abbildung — angegeben werden.

Im hydrodynamischen Modell des radialen Schaufelgitters ist jede Schaufel hydrodynamisch durch die komplexe Singularitätenverteilung $q + i\gamma$ ersetzt, die auf die Skelettlinie der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Schaufel lokalisiert wird. Das induzierte Geschwindigkeitsfeld wird dem Feld einer Zirkulationsströmung überlagert, die aus der in den Mittelpunkt des radialen Gitters angeordneten Singularität $Q_1 + i\Gamma_1$ herrührt.

Unsere weiteren Untersuchungen bzw. Folgerungen beziehen sich auf die Momentaufnahme der so entstandenen instationären Potentialströmung (Abb. 4).

Wenn (s) die Trägerkurve, N die Anzahl der Schaufeln bedeuten, dann ist die induzierte Absolutgeschwindigkeit, die in einem beliebigen Punkt P der komplexen Ebene auftritt (Abb. 5),

$$\bar{c}(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} (q + i\gamma) \frac{N (r_p e^{i\varphi_p})^{N-1}}{(r_p e^{i\varphi_p})^N - (r' e^{i\varphi'})^N} ds,$$

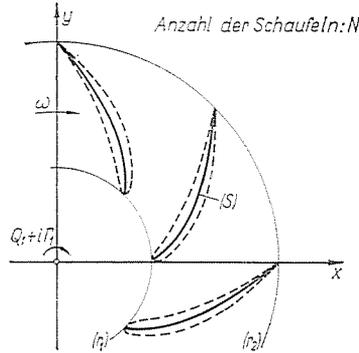


Abb. 4

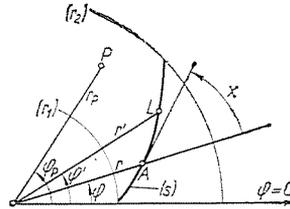


Abb. 5

wobei $r_p; \varphi_p$ die Polarkoordinaten des Punktes P und r', φ' die des Punktes der Trägerkurve (s) — also des Laufpunktes der Integration — bedeuten. Nach der Untersuchung der Unstetigkeit, die beim Überschreiten der Trägerkurve (s) bezüglich der induzierten Geschwindigkeit auftritt, erhalten wir die induzierte komplexe Geschwindigkeit an beiden Seiten der Trägerkurve, u. zw.

$$\bar{c}(s) = c_r - ic_\varphi = \pm \frac{\gamma - iq}{2} e^{-i\chi} + \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} (q + i\gamma) H(r, r'; N) \frac{ds}{r - r'}.$$

χ bedeutet hier den Neigungswinkel der Tangente der Trägerkurve zum Radiusvektor im Aufpunkt, in welchem wir die induzierte Geschwindigkeit

bestimmen wollen. Ferner ist $H(r, r'; N)$ die im Integrationsbereich beschränkte komplexe Einflußfunktion

$$H(r, r'; N) = R(H) + iI(H) = \frac{N(re^{i\varphi})^N}{(re^{i\varphi})^N - (r'e^{i\varphi'})^N} \cdot \frac{r - r'}{r}.$$

Auch unter dem hier auftretenden Integral ist sein CAUCHYSCHER Hauptwert zu verstehen.

Ähnlich wie beim geraden Gitter führen wir die Transformation $2r = (r_1 + r_2) - (r_2 - r_1) \cos \theta$ durch und erweitern hinsichtlich θ den Gültigkeitsbereich der Singularitätenverteilungen q, γ bzw. der Einflußfunktionen $R(H), I(H)$.

Nach diesen Umformungen ergeben sich die Integrale zur Berechnung der Polarkomponenten der induzierten Geschwindigkeit in der Form

$$c_{Rqr} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} q^* R(H) \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta'$$

$$c_{R\gamma r} = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} \gamma^* I(H) \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta'$$

$$c_{Rq\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} q^* I(H) \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta'$$

$$c_{R\gamma\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} \gamma^* R(H) \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta'$$

worin

$$q^* = q \frac{ds}{dr}; \quad \gamma^* = \gamma \frac{ds}{dr}.$$

Diese Integrale sind in ihrem formalen Aufbau den Integralen der induzierten Geschwindigkeitskomponenten der Einzelschaufel beim geraden Gitter ähnlich, sie können also gleichfalls mit Hilfe gleichartiger Tabellen berechnet werden.

b) *Bestimmung des Schaufelprofils.* Entsprechend dem beim geraden Gitter angewandten Grundgedanken wird das Schaufelprofil auch beim radialen Gitter bestimmt. Die Skelettlinie der Schaufel wird in einem von der Schaufel mitgeführten (relativen) Koordinatensystem berechnet. Das Koordinatensystem ist ein krummliniges rechtwinkliges System. Die Koordinaten-

linien sind einerseits eine Schar logarithmischer Spiralen, die zu der — von beiden Endpunkten der Ausgangsträgerkurve bestimmten — logarithmischen Spirale kongruent sind, andererseits eine Schar orthogonaler Trajektorien zu den erwähnten logarithmischen Spiralen. In diesem System befinden sich die entsprechenden Punkte der Trägerkurve (s) und der von ihr induzierten Stromlinie (S) auf derselben Trajektorie. Die Skelettlinie wird auf Grund der aus der Stromlinienbedingung gewonnenen Differentialgleichungen

$$\frac{1}{r_s} \cdot \frac{dr_s}{dr} + \operatorname{tg} \chi_0 \frac{d\varphi_s}{dr} = \frac{1}{r} [1 + \operatorname{tg} \chi_0 \operatorname{tg} \chi]$$

$$\left[\omega r_s - \frac{\Gamma_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_s} \right] \frac{dr_s}{dr} - \frac{Q_1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi_s}{dr} = c_{Rr} \operatorname{tg} \chi - c_{R\varphi}$$

durch systematische Iteration, wie sie oben schon dargelegt wurde, berechnet. In den Differentialgleichungen sind r_s , φ_s bzw. r , φ und χ die Werte bezüglich der Stromlinie (S) bzw. der Trägerkurve (s); ferner bezieht sich χ_0 auf die von beiden Endpunkten der Ausgangsträgerkurve bestimmte logarithmische Spirale. ω ist die Winkelgeschwindigkeit des radialen Gitters, u. zw. positiv bei Drehung im Uhrzeigersinn.

Nach der Bestimmung der Skelettlinie werden die relativen Tangential- und Normalgeschwindigkeiten an beiden Seiten der Skelettlinie anhand der Gleichungen

$$W_{St} = r_s \omega \sin \chi_s + \frac{Q_1}{2\pi} \cdot \frac{\cos \chi_s}{r_s} - \frac{\Gamma_1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \chi_s}{r_s} +$$

$$+ \left[c_{Rr} \cos \chi + c_{R\varphi} \sin \chi \pm \frac{\gamma}{2} \right] \frac{ds}{dS}$$

$$W_{Sn} = \pm \frac{q}{2} \cdot \frac{ds}{dS}$$

berechnet.

Bei der Bestimmung der Dickenverteilung des Profils muß die Verwirbelung des relativen Geschwindigkeitsfeldes berücksichtigt werden. Auf Grund der Kontinuitätsbedingung für die relative Strömung innerhalb des Profils erhalten wir für die Dickenverteilung in Näherung zweiter Ordnung die Beziehung

$$\delta_K = \frac{2}{\frac{dq}{dS} - 4\omega} \left\{ -W_{St} \pm \sqrt{W_{St}^2 + \left[\frac{1}{2} \frac{dq}{dS} - 2\omega \right] \int_0^S q dS} \right\}.$$

Die Konturgeschwindigkeit wird unter denselben Voraussetzungen und nach dem Grundgedanken wie beim geraden Gitter berechnet, d. h. man hat

$$W_K = \frac{W_{Syt}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\delta_K}{dS}\right)^2}} \left[1 + \frac{2}{q} \frac{d\delta_K}{dS} c_{Rqt} \frac{ds}{dS} \right].$$

Die Druckverteilung um das Schaufelprofil des rotierenden radialen Gitters bestimmt man aus den Konturgeschwindigkeiten — in üblicher Weise — anhand der allgemeinen BERNOULLISCHEN Gleichung.

Zusammenfassung

Das dargelegte Iterationsverfahren dient — unter Voraussetzung einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit — zur Ermittlung des Profils gerader und radialer Schaufelgitter mit großer Ablenkung. Mit Hilfe des Verfahrens kann die Form des Schaufelprofils, sowie die Druckverteilung um das Profil berechnet werden.

Das Iterationsverfahren ist durch folgendes gekennzeichnet:

1. Jedes Schaufelprofil wird durch die hydrodynamischen Singularitätenverteilung längs einer beliebigen, einwertigen Trägerkurve ersetzt.

2. Durch systematische Iteration der Trägerkurve ergibt sich die singularitätentragende Skelettlinie der Schaufel. Die Anzahl der Iterationsschritte ist nicht nur theoretisch, sondern auch hinsichtlich ihrer praktischen Durchführbarkeit unbeschränkt.

3. Nachdem die Skelettlinie entsprechend dem vorigen bestimmt ist, kann die Dickenverteilung des Profils sowie die Geschwindigkeits- und Druckverteilung entlang der Kontur berechnet werden.

Auch im Falle von Gittern mit sehr großen Ablenkungen ($100-120^\circ$) ist die Konvergenz der Iteration so gut, daß im allgemeinen die ersten zwei Iterationsschritte für die technischen Anforderungen hinreichen. Dies wird auch praktisch durch die gute Übereinstimmung der Versuche mit den Ergebnissen der Berechnung bestätigt. Bei geraden Gittern mit Ablenkungen bis zu 50° genügt die Durchführung des ersten Iterationsschrittes, wenn als Ausgangsträgerkurve ein spezieller — durch die gegebene Ablenkung bestimmter — Kreisbogen gewählt wird. In diesem Fall ist der Arbeitsaufwand der Durchführung kaum größer, als bei den linearen Verfahren, doch erhält man zumindest eine Näherung zweiter Ordnung.

Literatur

1. SCHOLZ, N.: VDI-Forsch.-Heft 442, 1954.
2. CZIBERE, T.: Acta Technica XXVIII, 43 (1960), XXVIII, 241 (1960).

T. CZIBERE, Ganz-Mávag Központi Vízgéptervező Iroda, Budapest, VIII. Könyves Kálmán krt. 76.