ÜBER DIE KONVERGENZ EINIGER BEI DER UNTERSUCHUNG ROTATIONSSYMMETRISCHER STRÖMUNGEN VORKOMMENDER UNEIGENTLICHER INTEGRALE

Von

F. KONECSNY

Lehrstuhl für Strömungslehre, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 27. Januar 1961)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. GRUBER

Bei der Untersuchung der Strömung in rotationssymmetrischen Räumen ist die Kenntnis der durch ein Wirbelringsystem induzierten Geschwindigkeiten — oft auch in den Punkten der Grenzfläche — erforderlich, wobei das Wirbelringsystem an der Grenzfläche verteilt ist.

Betrachten wir die Rotationsfläche nach Bild 1. Ihre Parallelkreise sind zugleich Wirbelringe mit der Intensität $d\gamma = \gamma(s_0)\, ds_0$, wenn $\gamma(s_0)$ die spezifische Wirbelstärke (bezogen auf die Bogenlängeneinheit der Meridianlinie

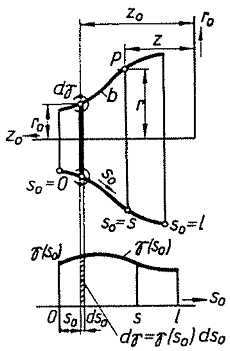

Bild 1

b), s_0 die laufende Bogenlänge und ds_0 das Bogenlängenelement der Meridianlinie bedeuten. Läuft ein Wirbelring der Stärke 1 durch einen durch das Wertpaar (r_0, z_0) oder durch die Bogenlänge s_0 gekennzeichneten Punkt der Meridianlinie, dann beträgt die radiale bzw. axiale induzierte Geschwindigkeitskomponente im Aufpunkt $P(r, z; s)$ der Meridianlinie $v_r^*(s, s_0)$ bzw. $v_z^*(s, s_0)$. Hierbei ergeben sich die von dem gesamten Wirbelringsystem hervorgerufenen Geschwindigkeitskomponenten in P zu

$$v_r(s) = \int_0^l v_r^*(s, s_0)\, \gamma(s_0)\, ds_0 \tag{1}$$

$$v_z(s) = \int_0^l v_z^*(s, s_0)\, \gamma(s_0)\, ds_0, \tag{2}$$

wo l die Länge der Meridianlinie bezeichnet.

Die Komponenten $v_r^*(s, s_0)$ und $v_z^*(s, s_0)$ kann man durch Differenzieren der STOKESschen Stromfunktion der Wirbelringströmung [1; insbes. Gl. (256) und (456b)] ableiten. Sie lauten:

$$v_r^*(s, s_0) = \frac{1}{4\pi r \sqrt{r r_0}} \left\{ E(k)(z - z_0) \left[\frac{k^3}{2(1-k^2)} - \frac{k}{1-k^2} \right] + (z - z_0)\, k\, K(k) \right\} \tag{3}$$

$$v_z^*(s, s_0) = -\frac{1}{4\pi \sqrt{r r_0}} \left\{ E(k) \left[\frac{k^3}{2(1-k^2)} \left(1 + \frac{r_0}{r}\right) - \frac{k}{1-k^2} \right] + k\, K(k) \right\}. \tag{4}$$

Dabei bedeuten $K(k)$ und $E(k)$ das vollständige elliptische Integral erster bzw. zweiter Gattung, definiert durch

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}} \tag{5}$$

bzw.

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}\, d\alpha, \tag{6}$$

mit dem Modul

$$k = \left[\frac{4 r r_0}{(z - z_0)^2 + (r + r_0)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Der Zusammenhang zwischen den Zylinderkoordinaten r_0, z_0 und der Bogenlänge s_0 ergibt sich im gegebenen Fall aus der Funktion $f(r_0, z_0) = 0$ der Meridianlinie.

Gilt $s_0 \to s$, also $r_0 \to r$ und $z_0 \to z$, dann gilt nach (7) auch $k \to 1$, doch werden in diesem Fall die Komponenten v_r^* und v_z^* — wie aus (3), (4) und (5) ersichtlich — unendlich groß, u. zw. in voller Übereinstimmung mit dem physikalischen Grundsatz, daß die induzierte Geschwindigkeit eines Wirbelfadens gegen das Unendliche strebt, wenn sich die Lage des Aufpunktes dem Wirbelfaden nähert. Infolgedessen sind die Ausdrücke (1) und (2) uneigentliche Integrale, deren Konvergenz wir im folgenden untersuchen wollen.

Führen wir t_0 als neue Integrationsveränderliche ein. Überdies sei der Zusammenhang zwischen t_0 und s_0 durch die Beziehung $t_0 = s - s_0$ gegeben. t_0 ist also die laufende Bogenlänge der Meridianlinie, gemessen vom Aufpunkt P.

Drücken wir nun die Größe k durch t_0 aus, dann kann man unter Berücksichtigung von (7) schreiben:

$$k'^2 \equiv 1 - k^2 = \frac{(z-z_0)^2 + (r-r_0)^2}{(z-z_0)^2 + (r+r_0)^2} = h^2 \frac{1}{(z-z_0)^2 + (r+r_0)^2}. \tag{8}$$

Hierin bedeutet h die Sehnenlänge der Meridianlinie zwischen ihren durch die Wertpaare (r, z) bzw. (r_0, z_0) gegebenen Punkten P und P_0.

Da die Sehnenlänge h und die Länge t_0 des zugehörigen Bogenstückes zwischen P_0 und P im Falle $P_0 \to P$ unendlich klein gleicher Ordnung werden, läßt sich h^2 in der Form $h^2 = t_0^2 - \delta^2(t_0)$ schreiben, wo δ^2 die Relation

$$\lim_{t_0 \to 0} \frac{\delta^2(t_0)}{t_0^2} = \lim_{h \to 0} \frac{\delta^2(t_0)}{h^2} = 0$$

erfüllt. Da ferner der Koeffizient von h^2 in Gleichung (8) für jedes t_0 endlich bleibt (wenn nur $r \neq 0$ und $r_0 \neq 0$), und für $t_0 = 0$ den Wert $\left(\frac{1}{2r}\right)^2$ annimmt, darf seine Reihenentwicklung nach Potenzen von t_0 neben der Konstante $\left(\frac{1}{2r}\right)^2$ nur Glieder mit positivem Exponenten enthalten. Aus dem Gesagten folgt der Ausdruck $k'^2 = \left(\frac{t_0}{2r}\right)^2 + P(t_0)$, wo jedes Glied der Potenzreihe $P(t_0)$ wie t_0^{2+a} (hier ist $a > 0$) gegen Null strebt.

Dies bedeutet, daß die Beziehungen

$$k'^2 \approx \left(\frac{t_0}{2r}\right)^2 \tag{9}$$

$$k' \approx \frac{|t_0|}{2r} \tag{10}$$

und

$$k^2 \approx 1 - \left(\frac{t_0}{2r}\right)^2 \tag{11}$$

bei dem — für die Untersuchung der Konvergenz der uneigentlichen Integrale nötigen — Grenzübergang $t_0 \to 0$ mit unbeschränkter Genauigkeit gelten.

Aus (3) und (4) ist ersichtlich, daß es zur Beurteilung der Frage, ob die uneigentlichen Integrale (1) und (2) konvergent oder divergent sind, genügt, die Existenz von Integralen der Koeffizienten von E und der Funktion K festzustellen, die sich auf den Bereich $-R \leq t_0 \leq R$ erstrecken: je nachdem, ob diese Integrale existieren oder nicht, sind (1) und (2) konvergent oder divergent.

Zur Ermittlung des Integrals von K kann man aus der Reihenentwicklung

$$K = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{m}^2 \left[\ln \frac{4}{k'} - b_m\right] k'^{2m} \qquad (k^2 < 1) \tag{12}$$

$$b_0 = 0; \qquad b_m = 2 \sum_{j=1}^{2m} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \tag{13}$$

ausgehen. (Siehe z. B. in [2; insbes. Gl. 900.05].) Die Reihe in (13) ist alternierend, der Absolutwert ihrer Glieder nimmt monoton ab, b_m ist also nicht größer als das Doppelte der ersten Teilsumme der Reihe. Die erste Teilsumme beträgt $^1/_2$, die zweite $^7/_{12}$, die übrigen sind — für jedes beliebige ganzzahlige m — größer als $^7/_{12}$. Von den Koeffizienten b_m ist also der erste am kleinsten: $b_1 = 1$. Aus diesem Grunde erhalten wir offenbar die Majorante der Reihe (12), wenn wir statt der Koeffizienten in der eckigen Klammer — beginnend von dem Glied mit dem Index 2 — die Größe $\ln \frac{4}{k'} - 1$ schreiben:

$$K < \ln \frac{4}{k'} + \left(\ln \frac{4}{k'} - 1\right) \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{m}^2 k'^{2m}. \tag{14}$$

Mit den numerischen Werten der Größen $\binom{-\frac{1}{2}}{m}$ ergibt sich die Beziehung

$$K < \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - 1\right) \left[k'^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 k'^4 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 k'^6 + \dots\right].$$

Im Falle $k' \neq 0$ ist $\ln \frac{4}{k'}$ beschränkt. Man erkennt ferner, daß die im Falle $k' < 1$ konvergente geometrische Reihe die Reihe in der eckigen Klammer majorisiert. Die Reihe (12) ist also für die Werte $0 < k' < 1$ absolut konvergent, woraus nach dem Satz von WEIERSTRASS folgt, daß die Funktionenreihe (12) für $K(k')$ im Bereich $0 < k' < 1$ gleichmäßig konvergent, also gliedweise integrierbar ist. Durch ihre Integration ergibt sich wieder eine gleichmäßig konvergente Funktionenreihe, in der sich der Grenzübergang — wie bei den endlichen Summen — gliedweise durchführen läßt. Hat das allgemeine Glied der integrierten Reihe im Falle $k' \to 0$ einen endlichen Wert, d. h. bleibt das Integral

$$\binom{-\frac{1}{2}}{m}^2 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{R} [\ln 4 - b_m - \ln k'(t_0)] k'^{2m}(t_0)\, dt_0 \tag{15}$$

des allgemeinen Gliedes der Reihe (12) endlich, so gilt die Aussage, daß das Integral von K im Bereich $-R \leqq t_0 \leqq R$ existiert.

Das erste und zweite Glied des Ausdruckes (15) läßt sich gewöhnlich integrieren und führt zu einem beschränkten Wert. Der übrige Teil des Integrandes von (15) ergibt ebenfalls eine endliche Größe. Setzt man nämlich die Beziehungen (9) und (10) in (15) ein, dann ergibt sich das Integral des Ausdrückes $\ln k' . k'^{2m}$ im Integrand von (15) durch partielle Integration zu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{R} k'^{2m}(t_0)\ln k'(t_0)\,dt_0 = 2r\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{R}\left(\frac{t_0}{2r}\right)^{2m}\ln\frac{|t_0|}{2r}\,d\left(\frac{t_0}{2r}\right) =$$

$$= 2r\frac{1}{2m+1}\left(\frac{R}{2r}\right)^{2m+1}\left[\ln\frac{R}{2r}-\frac{1}{2m+1}\right].$$

(Bei der Auswertung dieses Integrals haben wir die

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2m+1}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^{2m+1} = 0$$

und die nach der L'HOSPITALschen Regel sich ergebende

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^{2m+1}\ln\frac{\varepsilon}{2r} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\frac{\varepsilon}{2r}}{\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^{-2m-1}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^{-1}}{(-2m-1)\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^{-2m-2}} = -\frac{1}{2m+1}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^{2m+1} = 0$$

Beziehungen benutzt.)

Auf Grund der obigen Ausführungen kann man die Aussage machen: Im Bereich $-R \leq t_0 \leq R$ existiert das Integral der Funktion K.

Um die Integrale der Koeffizienten von E über den Bereich $-R \leq t_0 \leq R$ in den Ausdrücken (3) und (4) zu untersuchen, hat man die Größen $k = \left[1-\left(\frac{t_0}{2r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ und $k^3 = \left[1-\left(\frac{t_0}{2r}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ in binomiale Reihen zu entwickeln und dann durch den Ausdruck für $1-k^2 = k'^2$ nach (9) zu dividieren:

$$\frac{k}{1-k^2} = \frac{1}{\left(\frac{t_0}{2r}\right)^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{t_0}{2r}\right)^2 - \frac{3}{48}\left(\frac{t_0}{2r}\right)^4 - \ldots \qquad (16)$$

$$\frac{k^3}{1-k^2} = \frac{1}{\left(\frac{t_0}{2r}\right)^2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{8}\left(\frac{t_0}{2r}\right)^2 + \frac{3}{48}\left(\frac{t_0}{2r}\right)^4 + \ldots . \tag{17}$$

Schreiben wir noch die in (3) bzw. (4) vorkommenden Funktionen $(z - z_0)$ bzw. $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)$ als Potenzreihen nach $\frac{t_0}{2r}$ auf. Da diese Funktionen (die zweite allerdings für $r \neq 0$) beschränkt sind und für $t_0 \to 0$ (also für $r_0 \to r$, $z_0 \to z$) den Zahlenwert 0 bzw. 1 ergeben, haben ihre Reihen die Form

$$z - z_0 = A_1 \frac{t_0}{2r} + A_2\left(\frac{t_0}{2r}\right)^2 + A_3\left(\frac{t_0}{2r}\right)^3 + \ldots \tag{18}$$

bzw.

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r_0}{r}\right) = 1 + B_1 \frac{t_0}{2r} + B_2\left(\frac{t_0}{2r}\right)^2 + B_3\left(\frac{t_0}{2r}\right)^3 + \cdots \tag{19}$$

mit den konstanten Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$ bzw. $B_1, B_2, \ldots$.

Die Gleichungen (16) bis (18) bzw. (16), (17), (19) ergeben die Koeffizienten von E in (3) bzw. (4) als Potenzreihe nach $\frac{t_0}{2r}$; bezeichnet man sie durch $f_1\left(\frac{t_0}{2r}\right)$ bzw. $f_2\left(\frac{t_0}{2r}\right)$, dann hat man

$$f_1\left(\frac{t_0}{2r}\right) \equiv (z - z_0)\left[\frac{k^3}{2(1-k^2)} - \frac{k}{1-k^2}\right] = -\frac{A_1}{2}\frac{1}{\frac{t_0}{2r}} - \frac{A_2}{2} - \left(\frac{A_1}{4} + \frac{A_3}{2}\right)\frac{t_0}{2r} - \ldots$$

$$f_2\left(\frac{t_0}{2r}\right) \equiv \frac{k^3}{2(1-k^2)}\left(1 + \frac{r_0}{r}\right) - \frac{k}{1-k^2} = \frac{B_1}{\frac{t_0}{2r}} + (B_2 - 1) + \left(B_3 - \frac{3}{2}B_1\right)\frac{t_0}{2r} + \ldots$$

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die über den Bereich $-\frac{R}{2r} \leq \frac{t_0}{2r} \leq \frac{R}{2r}$ (entsprechend dem $-R \leq t_0 \leq R$) sich erstreckenden Integrale dieser Ausdrücke existieren, da das Integral des ersten Gliedes der Reihe für f_1 und ebenso für f_2 als CAUCHY-Hauptwert existiert, und die übrigen Glieder endliche Integrale ergeben.

Auf Grund dieser sowie der bezüglich der Existenz des Integrals für K ausgesprochenen Feststellung gilt die Aussage: Die uneigentlichen Integrale (1) und (2) für die induzierten Geschwindigkeitskomponenten sind konvergent.

Zusammenfassung

Es wurde festgestellt, daß die bei der Untersuchung der Strömung in rotationssymmetrischen Räumen vorkommenden uneigentlichen Integrale konvergent sind. Diese Aussage gründet sich darauf, daß die Integrale einiger im Aufpunkt einen unendlichen Sprung aufweisender Funktionen in dem den Aufpunkt enthaltenden Bereich existieren.

Literatur

1. SASVÁRI, G.: Hidrodinamika. Athenaeum, Budapest, 1925.
2. BYRD, P. F.—FRIEDMAN, M. D.: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954.

F. KONECSNY, Budapest XI., Bertalan Lajos utca 4—6, Ungarn