ÜBER DIE NÄHERUNGSWEISE LÖSUNG GEWÖHNLICHER HOMOGENER LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDUNG

Von

K. Jánki

Lehrstuhl für Mathematik (V), Technische Universität, Budapest

Vorgelegt von Prof. Dr. S. Borbély

(Eingegangen am 25. Januar 1961)

Es sei die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' = a(x)\, y + b(x)\, y' \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0\,, \quad y_0' = y'(x_0) = y_0'$$

gegeben. Wir setzen voraus, daß die Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall $|x - x_0| \leqq a$ stetig und daher auch beschränkt seien, und daß sie ebenda konvergente Potenzreihenentwicklungen zulassen.

Nach Einführung der Bezeichnungen

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(x) = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(x_0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(x) & b(x) \end{bmatrix}$$

kann die Gleichung (1) in der Form

$$\frac{d}{dx}\mathbf{z} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{z} \tag{2}$$

und die gegebene Anfangsbedingungen zu

$$\mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_0 \tag{3}$$

geschrieben werden.

Bekanntlich (siehe z. B. [1] S. 141) wird die Lösung der Differentialgleichung (2), die der Bedingung (3) genügt, durch die Gleichung

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{M}\,|_{x_0}^{x}\, \mathbf{z}(x_0) \tag{4}$$

dargestellt, wobei die unendliche Matrizenreihe

$$\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x} = \mathbf{E} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi_1)\, d\xi_1 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2 +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi_3) \int_{x_0}^{\xi_3} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 + \ldots \tag{5}$$

die Resolvente der Differentialgleichung (2) definiert.

Zur praktischen, näherungsweisen Darstellung der durch die Gleichung (5) definierten Resolvente sind mehrere Methoden bekannt. Im folgenden werden wir uns — unter Berücksichtigung der vorausgesetzten Eigenschaften der Koeffizienten $a(x)$ und $b(x)$ — auf die Darstellung der Resolvente in der Form einer Potenzreihe beschränken.

Bekanntlich (siehe [2]) kann die in der Lösung (4) auftretende Resolvente 5) in der Form der Potenzreihe

$$\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \mathbf{B}_\varkappa(x_0) \frac{(x-x_0)^\varkappa}{\varkappa!} \tag{6}$$

dargestellt werden, vorausgesetzt, daß $\mathbf{A}(x)$ im Intervall $|x - x_0| < a$ die konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \mathbf{A}^{(\varkappa)}(x_0) \frac{(x-x_0)^\varkappa}{\varkappa!} \tag{7}$$

zuläßt, wobei die Koeffizienten $B_\varkappa(x_0)$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_0(x_0) = \mathbf{E};\\
&\mathbf{B}_1(x_0) = \mathbf{A}^{(0)}(x_0) = \mathbf{A}(x_0);\\
&\mathbf{B}_2(x_0) = \mathbf{A}^{(1)}(x_0) + \mathbf{A}^{(0)^2}(x_0);\\
&\mathbf{B}_3(x_0) = \mathbf{A}^{(2)}(x_0) + \sum_{j_1=0}^{1} \binom{2}{j_1} \mathbf{A}^{(j_1)}(x_0)\, \mathbf{A}^{(1-j_1)}(x_0) + \mathbf{A}^{(0)^3}(x_0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\mathbf{B}_k(x_0) = \mathbf{A}^{(k-1)}(x_0) + \sum_{j_1=0}^{k-2} \binom{k-1}{j_1} \mathbf{A}^{(j_1)}(x_0)\, \mathbf{A}^{(k-2-j_1)}(x_0) +$$

$$+ \sum_{j_2=0}^{k-3} \sum_{j_1=0}^{k-3-j_2} \binom{k-1}{j_2} \binom{k-2-j_2}{j_1} \mathbf{A}^{(j_2)}(x_0)\, \mathbf{A}^{(j_1)}(x_0)\, \mathbf{A}^{(k-3-j_2-j_1)}(x_0) + \ldots +$$

$$+ \sum_{j_{k-2}=0}^{1} \sum_{j_{k-3}=0}^{1-j_{k-2}} \cdots \sum_{j_1=0}^{1-j_{k-2}-\ldots-j_2} \binom{k-1}{j_{k-2}} \binom{k-2-j_{k-2}}{j_{k-3}} \cdots$$

$$\cdots \binom{2-j_{k-2}-\ldots-j_2}{j_1} \mathbf{A}^{(j_{k-2})}(x_0)\, \mathbf{A}^{(j_{k-3})}(x_0) \ldots \mathbf{A}^{(j_1)}(x_0)\, \mathbf{A}^{(1-j_{k-2}-\ldots-j_1)}(x_0) +$$

$$+ \mathbf{A}^{(0)^k}(x_0)$$

definiert sind.

Ferner ist bekannt [2], daß die Potenzreihendarstellung (6) der Resolvente durch die Teilsumme

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{x_0+(k-1)h}^{x_0+kh} = \sum_{\varkappa=0}^{r+1} \mathbf{B}_\varkappa (x_0 + (k-1)h) \frac{h^\varkappa}{\varkappa!}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots, p; \tag{9}$$

ersetzt werden kann, wenn man die Funktionswerte $\mathbf{z}(x_0 + ph)$ (mit $ph < a$) mit einem Fehler $|\varepsilon_p| = O(h^{r+1})$ annähern will.

Im folgenden werden wir zur näherungsweisen Darstellung der die Anfangsbedingung (3) erfüllenden Lösung der Differentialgleichung (2) die Näherung (9) der Resolvente anwenden und die Werte der unbekannten Funktion $\mathbf{z}(x)$ bei einer Schrittweite h ausrechnen. Nach dem Obengesagten gilt

$$\mathbf{z}(x_0 + kh) \approx \sum_{\varkappa=0}^{r+1} \mathbf{B}_\varkappa\big(x_0 + (k-1)h\big) \frac{h^\varkappa}{\varkappa!} \mathbf{z}(x_0 + (k-1)h); \quad k = 1, 2, 3, \ldots, p. \tag{10}$$

Der Einfachheit halber wählen wir den Fall $r = 2$.

Auf Grund der Beziehungen

$$\mathbf{A}^{(0)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(x) & b(x) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a'(x) & b'(x) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a''(x) & b''(x) \end{bmatrix}$$

lauten die in (8) definierten Koeffizienten

$$\mathbf{B}_0(x) = \mathbf{E} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(x) & b(x) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ a(x)\,b(x) + a'(x) & a(x) + b^2(x) + b'(x) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_3(x) = \begin{bmatrix} a'(x) + a(x)\,b(x) & b'(x) + a(x) + b^2(x) \\ a''(x) + a'(x)\,b(x) + 2a(x)\,b'(x) + & b''(x) + 3b(x)\,b'(x) + 2a'(x) + \\ + a^2(x) + a(x)\,b^2(x) & + 2a(x)\,b(x) + b^3(x) \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_x^{x+h} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{h^2}{2} a(x) + \frac{h^3}{6}[a'(x) + a(x)\,b(x)] \\ ha(x) + \frac{h^2}{2}[a'(x) + a(x)\,b(x)] + \\ + \frac{h^3}{6}[a''(x) + a'(x)\,b(x) + 2a(x)\,b'(x) + a^2(x) + a(x)\,b^2(x)] \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{matrix} h + \frac{h^2}{2} b(x) + \frac{h^3}{6}[b'(x) + a(x) + b^2(x)] \\ 1 + hb(x) + \frac{h^2}{2}[b'(x) + a(x) + b^2(x)] + \\ + \frac{h^3}{6}\Big[b''(x) + 3b(x)\, b'(x) + 2a'(x) + 2a(x)\, b(x) + b^3(x)\Big] \end{matrix} \Bigg]$$

Ferner gilt auf Grund der Beziehung (10)

$$\begin{bmatrix} y(x+h) \\ y'(x+h) \end{bmatrix} \approx \mathbf{M}\,\big|_x^{x+h} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

und — zieht man noch (11) in Betracht —, dann hat man:

$$\begin{aligned} y(x+h) \approx & \left\{1 + \frac{h^2}{2} a(x) + \frac{h^3}{6}[a'(x) + a(x)\, b(x)]\right\} y(x) + \\ & + \left\{h + \frac{h^2}{2} b(x) + \frac{h^3}{6}[b'(x) + a(x) + b^2(x)]\right\} y'(x) \end{aligned} \tag{13}$$

und

$$\begin{aligned} y'(x+h) \approx & \left\{ha(x) + \frac{h^2}{2}\Big[a'(x) + a(x)\, b(x)\Big] + \frac{h^3}{6}[a''(x) + a'(x)\, b(x) + \right. \\ & \left. + 2a(x)\, b'(x) + a^2(x) + a(x)\, b^2(x)]\right\} y(x) + \\ & + \left\{1 + hb(x) + \frac{h^2}{2}[b'(x) + a(x) + b^2(x)] + \frac{h^3}{6}[b''(x) + \right. \\ & \left. + 3b(x)\, b'(x) + 2a'(x) + 2a(x)\,(b(x) + b^3(x)]\right\} y'(x). \end{aligned} \tag{14}$$

Zur Abschätzung des Fehlers kann man folgendermaßen verfahren. Es sollen die Näherungsformeln (13) und (14) mit dem Anfangswert $x = x_0$ angewandt werden. p bedeute die Anzahl der Schritte.

Wir setzen voraus, daß

$$\beta \leqq \sqrt{y^2(x_0) + y'^2(x_0)}\,;$$

$$\max_{|x-x_0| \leqq a} |a^{(\varkappa)}(x)| \leqq A, \quad \max_{|x-x_0| \leqq a} |b^{(\varkappa)}| \leqq B,$$

wobei

$$\varkappa = 0, 1, 2, 3;$$

damit ergibt sich

$$\Gamma \leqq \sqrt{1 + A^2 + B^2}\,;$$

ferner

$$G(\mathbf{B}_4) \leqq \Gamma + 7\Gamma^2 + 6\Gamma^3 + \Gamma^4 = C;$$
$$G(\mathbf{A}) \leqq \Gamma,$$

d. h.

$$e^{hG(\mathbf{A})} \leqq e^{h\Gamma} = D.$$

Wenn überdies

$$M_1 \geqq 1 + \frac{h^2}{2} A + \frac{h^3}{6}(A + AB),$$

$$M_2 \geqq h + \frac{h^2}{2} B + \frac{h^3}{6}(A + B + B^2),$$

$$M_3 \geqq h\,A + \frac{h^2}{2}(A + AB) + \frac{h_3}{6}(A + 3AB + A^2 + AB^2),$$

$$M_4 \geqq 1 + h\,B + \frac{h^2}{2}(A + B + B^2) + \frac{h^3}{6}(2A + B + 5AB + B^3),$$

dann gilt

$$G\left(\widetilde{\mathbf{M}}\big|_x^{x+h}\right) \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{4} M_k^2} = \omega.$$

Damit erhält man schließlich

$$|\varepsilon_p| \leqq \beta C \frac{h^4}{4!} \frac{D^p - \omega^p}{D - \omega}. \tag{15}$$

Wollen wir unsere Ergebnisse beispielsweise zur Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$y'' = -y - \frac{1}{x} y' \tag{16}$$

anwenden, dann suchen wir die Lösung

$$z(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0(x) \\ -J_1(x) \end{bmatrix} \tag{17}$$

dieser Differentialgleichung im Intervall $1 \leqq x \leqq 1{,}10$, nach Wahl einer Schrittweite $h = 0{,}01$ $(p = 10)$.

Die Anfangswerte sollen einer siebenstelligen Tafel [3] entnommen werden, d. h.

$$z_0 = \begin{bmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7651977 \\ -0{,}4400506 \end{bmatrix} .$$

In unserem Falle sind

$$a(x) = -1 \,; \quad b(x) = -\frac{1}{x},$$

und somit

$$A = 1\,, \; B = 1\,.$$

Vor der Durchrechnung wollen wir den Fehler abschätzen.

Da

$$\Gamma = \sqrt{3}\;,$$

wird

$$C = 62{,}9099\,.$$

Ferner sind

$$D = 1{,}0175$$

und

$$M_1 = 1{,}0001\,,$$

$$M_2 = 0{,}0101\,,$$

$$M_3 = 0{,}0099\,,$$

$$M_4 = 1{,}0100\,,$$

woraus

$$\omega = 1{,}4217\,.$$

Es gilt weiters

$$\beta = 0{,}8826\,,$$

und man hat schließlich:

$$|\varepsilon_{10}| \leqq 2 \cdot 10^{-6}.$$

Zieht man in Betracht, daß

$$a'(x) = a''(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad b'(x) = \frac{1}{x^2}\,,\; b''(x) = -\frac{2}{x^3}\,,$$

ergeben sich aus den Formeln (13) und (14)

$$y(x+h) \approx \left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6x}\right) y(x) + \left(h - \frac{h^2}{2x} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^3}{3x^2}\right) y'(x); \tag{18}$$

$$y'(x+h) \approx \left(-h + \frac{h^2}{2x} + \frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{2x^2}\right) y(x) + \\ + \left(1 - \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{x^2} + \frac{h^3}{3x} - \frac{h^3}{x^3}\right) y'(x). \tag{19}$$

Auf Grund Gleichung (11) erhält man die Matrizen

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1}^{1,01} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099501 \\ -0{,}0099503 & 0{,}9900493 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1,01}^{1,02} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099506 \\ -0{,}0099508 & 0{,}9901463 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1,02}^{1,03} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099511 \\ -0{,}0099513 & 0{,}9902416 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1,03}^{1,04} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099516 \\ -0{,}0099518 & 0{,}9903350 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1,04}^{1,05} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099520 \\ -0{,}0099522 & 0{,}9904265 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1,05}^{1,06} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099525 \\ -0{,}0099527 & 0{,}9905163 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1,06}^{1,07} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099529 \\ -0{,}0099530 & 0{,}9906045 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1,07}^{1,08} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099534 \\ -0{,}0099535 & 0{,}9906910 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1,08}^{1,09} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099538 \\ -0{,}0099539 & 0{,}9907759 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{1,09}^{1,10} = \begin{bmatrix} 0{,}9999502 & 0{,}0099542 \\ -0{,}0099543 & 0{,}9908594 \end{bmatrix},$$

und aus diesen die gesuchten angenäherten Funktionswerte

$$\begin{bmatrix} J_0(1{,}01) \\ -J_1(1{,}01) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7607810 \\ -0{,}4432857 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} J_0(1{,}02) \\ -J_1(1{,}02) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7563321 \\ -0{,}4464881 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} J_0(1{,}03) \\ -J_1(1{,}03) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7518513 \\ -0{,}4496576 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} J_0(1{,}04) \\ -J_1(1{,}04) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7473390 \\ -0{,}4527939 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} J_0(1{,}05) \\ -J_1(1{,}05) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7427956 \\ -0{,}4558967 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} J_0(1{,}06) \\ -J_1(1{,}06) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7382212 \\ -0{,}4589659 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} J_0(1{,}07) \\ -J_1(1{,}07) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7336164 \\ -0{,}4620012 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} J_0(1{,}08) \\ -J_1(1{,}08) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7289813 \\ -0{,}4650025 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} J_0(1{,}09) \\ -J_1(1{,}09) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7243164 \\ -0{,}4679695 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} J_0(1{,}10) \\ -J_1(1{,}10) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7196220 \\ -0{,}4709020 \end{bmatrix}.$$

Vergleicht man diese Zahlenwerte mit denjenigen einer auf sieben Stellen genauen Tafel [3], dann erkennt man, daß die größte Abweichung kleiner ist als $4 \cdot 10^{-7}$.

Der große Vorteil des beschriebenen Verfahrens besteht darin, daß es sehr schnell ist und leicht zu Endresultaten führt.

Anmerkung

Für seine wertvollen Hinweise und Anregungen bin ich meinem Kollegen Herrn P. BAJCSAY zu besonderem Dank verpflichtet.

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz wird ein von P. BAJCSAY veröffentlichtes Verfahren [2] zur näherungsweisen Lösung gewöhnlicher homogener linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung angewandt. Als Beispiel wird die Lösung einer Besselschen Differentialgleichung beschrieben.

Literatur

1. SCHMEIDLER, W.: Vorträge über Determinanten und Matrizen. Akademie-Verlag, Berlin 1949.
2. BAJCSAY, P.: Anwendung der Matrizenrechnung zur Untersuchung von Systemen allgemeiner, expliziter, gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Periodica Polytechnica, 4, Nr. 1. Budapest 1960.
3. Люстерник Л. А., Акушский, И. Я., Диткин, В. А.: Таблицы бесселевых функций. Гостехиздат. Москва, 1949.

K. JÁNKI, Budapest XI. Stoczek u. 2. Ungarn