

EIN SINGULARITÄTENVERFAHREN ZUR BERECHNUNG DER KONTURGESCHWINDIGKEIT LÄNGS DER EINTRITTSABRUNDUNG VON RADIALVENTILATOREN

Von

F. KONECSNY

Lehrstuhl für Strömungslehre, Technische Universität, Budapest
(Eingegangen am 21. März 1961)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. GRUBER

Zum Entwurf radialer Strömungsmaschinen hohen Wirkungsgrades ist die eingehende Kenntnis ihres inneren strömungsphysikalischen Verhaltens erforderlich. Die Strömungsvorgänge im Inneren des Laufrades lassen sich nach neuerdings entwickelten Rechenverfahren [1], [2] gut erfassen. Damit das Laufrad unter günstigsten Umständen arbeite, hat man die Konturfläche des rotationssymmetrischen Raumes vor dem Laufrad (Saugrohr, Eintrittsabrundung usw.) so auszubilden, daß dort die Gefahr einer Ablösung der Strömung ausgeschlossen sei. Die Voraussetzung dafür bildet die Forderung, daß die Verteilung der Meridiangeschwindigkeiten längs der Kontur bekannt sei. In der vorliegenden Arbeit wird ein Rechenverfahren zur Ermittlung der potentialtheoretischen Konturgeschwindigkeiten vor den radialen Laufrädern mit gerader Rückscheibe dargelegt.

Es ist bekannt, daß man feste Körper, die in Potentialströmungen gelegt sind, zwecks mathematischer Untersuchung durch geeignete Systeme der Singularitäten ersetzen kann. Die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Körpers ergibt sich als die vektorielle Summe der Grundströmungsgeschwindigkeit und der von Singularitäten induzierten Geschwindigkeiten. Das ersetzende Singularitätensystem läßt sich durch die kinematische Bedingung bestimmen, daß der Geschwindigkeitsvektor an jedem Oberflächenpunkt in der Berührungsebene zu liegen hat. Diese Bedingung läßt sich im allgemeinen nur durch ein System kontinuierlich verteilter Singularitäten genau befriedigen.

Ist die Strömung rotationssymmetrisch, so können wir als Ersatzsystem eine mit der Grenzfläche des Rotationskörpers zusammenfallende Wirbelfläche ansehen, die aus elementaren Wirbelringen aufgebaut ist. Die kinematische Bedingung ist ferner zweckmäßig so zu formulieren, daß die STOKESSche Stromfunktion an der Grenzfläche einen konstanten Wert betragen soll. Wegen der Rotationssymmetrie genügt es, die auf ein Zylinderkoordinatensystem (r_0, z_0) gemäß Abb. 1 bezogenen Untersuchungen nur in einem Meridianschnitt durchzuführen.

Abb. 1 zeigt den rotationssymmetrischen Raum eines Ventilatorgehäuses, in dem die Strömung als durch diejenigen Wirbelringssysteme hervorgerufen

betrachtet werden soll, die an der Rückscheibe und an der vorderen Grenzfläche des Gehäuses verteilt sind. Wir wollen die Konturgeschwindigkeitsverteilung längs dieser Grenzfläche bestimmen. Betrachten wir zunächst das letztere Wirbelringsystem. Die Intensität seiner Wirbelringe sei $d\gamma = \gamma(s_0)ds_0$, worin $\gamma(s_0)$ die spezifische Wirbelstärke (bezogen auf die Bogenlängeeneinheit der Meridianlinie), s_0 die laufende Bogenlänge und ds_0 das Bogenlängeenelement der Meridianlinie bedeuten soll. Läuft ein Wirbelring a der Stärke 1 durch einen — mit den Zylinderkoordinaten (r_0, z_0) oder mit der Bogenlänge s_0 gegebenen — Punkt der Meridianlinie,* dann ergibt sich die STOKESSCHE

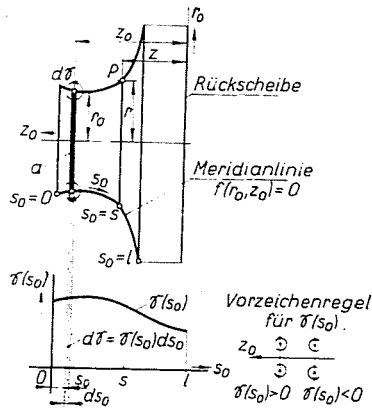


Abb. 1

Stromfunktion der von diesem einzelnen Wirbelring verursachten Strömung im Aufpunkt $P(r, z)$ der Meridianlinie zu

$$\psi_+^*(r, z) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{rr_0} \left[\frac{2}{k} (K - E) - kK \right] \quad (1)$$

(Vgl. [3], insbes. Gl. 456b). Hierbei ist K bzw. E das vollständige elliptische Integral erster bzw. zweiter Gattung, definiert durch

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad (2)$$

* Ein Wirbelring ist eindeutig bestimmt durch seine Intensität, seinen Halbmesser r_0 und den Abstand z_0 seiner Ebene von der Ebene $z_0 = 0$, d. h. durch die Wirbelstärke und die Koordinaten r_0, z_0 des Punktes, den er durchläuft. Im folgenden werden wir die Wirbelringe mit diesem Punkt bezeichnen.

bzw.

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \, d\alpha \quad (3)$$

mit dem Modul

$$k = \sqrt{\frac{4rr_0}{(z - z_0)^2 + (r + r_0)^2}} \quad (4)$$

Der Zusammenhang zwischen den Zylinderkoordinaten r_0, z_0 und der Bogenlänge s_0 ergibt sich gegebenenfalls aus der Funktion $f(r_0, z_0) = 0$ der Meridianlinie. Die — im folgenden kurz als Wirkungsfunktion bezeichnete und von der Lage des Wirbelringes und des Aufpunktes abhängige — Größe ψ_+^* läßt sich also als eine Funktion von s_0 und s ausdrücken: $\psi_+^* = \psi_+^*(s_0, s)$. Dann ergibt sich die STOKESSCHE Stromfunktion der vom gesamten Wirbelringssystem hervorgerufenen Strömung in P zu

$$\psi_+(s) = \int_0^l \psi_+^*(s_0, s) \gamma(s_0) \, ds_0, \quad (5)$$

wo l die Länge der Meridianlinie bezeichnet. Die unbekannte Verteilungsfunktion $\gamma(s_0)$ ist dementsprechend nach der kinematischen Bedingung

$$\int_0^l \psi_+^*(s_0, s) \gamma(s_0) \, ds_0 = \text{const} \quad (6)$$

zu bestimmen.

Wir können nunmehr das induzierte Geschwindigkeitsfeld dieses Wirbelringes berechnen. Die radiale bzw. axiale Komponente dieses Feldes ergibt sich an der Konturfläche zu

$$v_{r_+}(s) = \int_0^l v_{r_+}^*(s_0, s) \gamma(s_0) \, ds_0 \quad (7)$$

bzw.

$$v_{z_+}(s) = \int_0^l v_{z_+}^*(s_0, s) \gamma(s_0) \, ds_0, \quad (8)$$

wobei $v_{r_+}^*(s_0, s)$ und $v_{z_+}^*(s_0, s)$ die vom Wirbelring a gemäß Abb. 1 bei einer Stärke l im Punkt $P(r, z; s)$ induzierten radialen bzw. axialen Geschwindigkeitskomponenten bedeuten, die man aus den bekannten Beziehungen

$$v_{r_+}^*(s_0, s) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \psi_+^*(r, z) \quad (9)$$

und

$$v_{z_+}^*(s_0, s) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi_+^*(r, z) \quad (10)$$

[Vgl. [3], insbes. Gl. (256)] herleiten kann. Sie lauten unter Berücksichtigung von (1):

$$v_{r+}^*(s_0, s) = \frac{1}{4\pi r \sqrt{rr_0}} \left\{ E(k)(z - z_0) \left[\frac{k^3}{2(1 - k^2)} - \frac{k}{1 - k^2} \right] + (z - z_0) kK(k) \right\} \quad (11)$$

$$v_{z+}^*(s_0, s) = - \frac{1}{4\pi \sqrt{rr_0}} \left\{ E(k) \left[\frac{k^3}{2(1 - k^2)} \left(1 + \frac{r_0}{r} \right) - \frac{k}{1 - k^2} \right] + kK(k) \right\} \quad (12).$$

Die Komponenten $v_{r+}(s)$ und $v_{z+}(s)$ stellen noch nicht die endgültige Lösung unserer Aufgabe dar, weil sie die Wirkung der Rückscheibe nicht enthalten. Man kann diese Wirkung als Spiegelung des bisher untersuchten Wirbelringsystems bezüglich der Rückscheibe in Betracht ziehen. Halbiert nämlich eine Ebene den Abstand zwischen zwei coaxialen, mit dieser Ebene parallelen

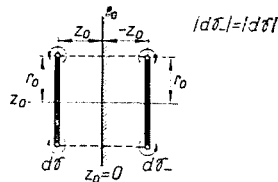


Abb. 2

Wirbelringen gleicher Stärke und gleichen Halbmessers aber entgegengesetzten Drehsinnes, dann kann sie als eine Stromfläche der von beiden Wirbelringen verursachten Strömung betrachtet werden. Man darf deshalb diese Ebene ohne Störung dieser Strömung durch eine (unendlich dünne) Wand ersetzen. Ebenso kann umgekehrt die Rückscheibe — hinsichtlich ihrer Wirkung auf die Strömung mit den Geschwindigkeitskomponenten nach Gln. (7) und (8) — durch ein auf sie (d. h. auf die Ebene $z_0 = 0$) bezogenes Spiegelbild des erwähnten Wirbelringsystems ersetzt werden. Abb. 2 zeigt die Spiegelung eines Wirbelringes mit der Intensität $d\gamma$. $d\gamma_-$ ist hierbei das Spiegelbild des Wirbelringes $d\gamma$, und die beiden Wirbelringe zusammen sollen als gespiegelter Wirbelring $d\gamma$ bezeichnet werden. Man erhält also die Wirkungsfunktion $\psi_-^*(s_0, s)$ bzw. die induzierten Geschwindigkeitskomponenten $v_{r-}^*(s_0, s)$ und $v_{z-}^*(s_0, s)$ des Spiegelbildes des früher schon untersuchten Wirbelringes a der Stärke 1 aus den Gln. (1) bzw. (11) und (12), wenn man statt z_0 (auch in Gl. (4) für k) die Größe $-z_0$ schreibt und das Vorzeichen dieser Gln. umkehrt.

Auf Grund der obigen Ausführungen ergeben sich die Stromfunktion und die Geschwindigkeitskomponenten des gesamten gespiegelten Wirbelringesystems mit der Verteilung $\gamma(s_0)$ in der Form

$$\psi(s) = \int_0^l [\psi_+^*(s_0, s) - \psi_-^*(s_0, s)] \gamma(s_0) ds_0 \quad (13)$$

und

$$v_r(s) = \int_0^l (v_{r+}^*(s_0, s) - v_{r-}^*(s_0, s)) \gamma(s_0) ds_0 \quad (14)$$

$$v_z(s) = \int_0^l [v_{z+}^*(s_0, s) - v_{z-}^*(s_0, s)] \gamma(s_0) ds_0. \quad (15)$$

Zur Ermittlung der Konturgeschwindigkeit haben wir zunächst die Verteilungsfunktion $\gamma(s_0)$ des Ersatzsystems aus der Beziehung

$$\int_0^l [\psi_+^*(s_0, s) - \psi_-^*(s_0, s)] \gamma(s_0) ds_0 = C \quad (C = \text{const}) \quad (16)$$

auszurechnen. Danach ergibt sich die endgültige Geschwindigkeitsverteilung mit den nach Gln. (14) und (15) ermittelten Komponenten $v_r(s)$ und $v_z(s)$ längs der Meridianlinie zu

$$v(s) = [v_r^2(s) + v_z^2(s)]^{1/2}. \quad (17)$$

Es sei hier bemerkt, daß die Ausdrücke (7), (8) und (14), (15) uneigentliche Integrale sind, da die Komponenten v_r^* und v_z^* falls $s_0 \rightarrow s$ (also $r_0 \rightarrow r$, $z_0 \rightarrow 0$ und $k \rightarrow 1$) — wie aus den Gln. (2), (11) und (12) ersichtlich — unendlich groß werden. Man kann jedoch ihre Konvergenz beweisen [4].

Die praktische Anwendung dieses Verfahrens ist oft mit Schwierigkeiten verbunden, da die Auflösung von (16) im allgemeinen analytisch überhaupt nicht, und numerisch genau gleichfalls nur mit hohem Arbeitsaufwand durchführbar ist. Im folgenden soll aus diesem Verfahren eine Näherungsmethode mit kleinerem Arbeitsaufwand entwickelt werden. Es wird hierbei die kinematische Bedingung $\psi(s) = C$ nur für $2n$ -zählige Aufpunkte der Meridianlinie $P_i(r_i, z_i)$ und $P_{i'}(r_{i'}, z_{i'})$ (wo $i = 1, 2, \dots, n$ und $i' = n + 1, n + 2, \dots, 2n$) aufgeschrieben, und dementsprechend die Konturfläche durch $2n$ -zählige gespiegelte Wirbelringe ersetzt, deren Intensität Γ_j und $\Gamma_{j'}$ (wo $j = 1, 2, \dots, n$; $j' = n + 1, n + 2, \dots, 2n$) durch Iteration, durch wiederholte Auflösung zweier (je n Unbekannte enthaltender) linearer Gleichungssysteme bestimmt wird. (Dies ist erfahrungsgemäß weniger umständlich, als die einmalige Auflösung eines linearen Gleichungssystems mit $2n$ Unbekannten.) Die Iteration liefert uns Schritt für Schritt die Stärken $\Delta \Gamma_j$ und $\Delta \Gamma_{j'}$ jener zusätzlichen Wirbelringe, die trotz der gegenseitigen Beeinflussung von den Wirbelringen Γ_j und $\Gamma_{j'}$ die Erfüllung der kinematischen Bedingung verbürgen. Die Lage der (mit der Rotationsfläche coaxialen) Wirbelringe sei durch den Punkte $P_j(r_{0j}, z_{0j})$ bzw. $P_{j'}(r_{0j'}, z_{0j'})$ gegeben. Um Verwicklungen infolge der erwähnten Unstetigkeit des Geschwindigkeitsfeldes zu vermeiden, hat man die Punkte P_j und $P_{j'}$ außerhalb der Grenzfläche zu wählen. Nachfolgend

werden wir die Wirkungsfunktion mit doppeltem Index bezeichnen. Der erste entspricht dem Index des Aufpunktes, für welchen wir die Stromfunktion aufschreiben wollen, der zweite ist gleich dem Index jenes Punktes, durch den der die Strömung hervorrufende Wirbelring verläuft.

Bedeutet dementsprechend ψ_{ij+}^* bzw. ψ_{ij-}^* im Aufpunkt P_i den Wert der Wirkungsfunktion des durch den Punkt P_j verlaufenden Wirbelringes bzw. seines Spiegelbildes, dann trägt der gespiegelte Wirbelring der Intensität Γ_j^0 zur STOKESSchen Stromfunktion in P_i die Größe $(\psi_{ij+}^* - \psi_{ij-}^*)\Gamma_j^0$ bei. Die vollständige Stromfunktion sämtlicher Wirbelringe läßt sich für jeden Aufpunkt als die Summe dieser Beträge ausrechnen. Man kann also die kinematische Bedingung in den ausgewählten Punkten P_i mit jenen Γ_j^0 -Werten befriedigen, die sich aus dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n (\psi_{ij+}^* - \psi_{ij-}^*) \Gamma_j^0 = C \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

ergeben. Diese Γ_j^0 -Werte genügen jedoch den kinematischen Bedingung im Punkt $P_{i'}$ im allgemeinen nicht, weil sie dort für die Stromfunktion statt der Konstante C die Größen

$$\Delta\psi_{i'}^0 = \sum_{j=1}^n (\psi_{i'j+}^* - \psi_{i'j-}^*) \Gamma_j^0 \quad (i' = n+1, n+2, \dots, 2n) \quad (19)$$

ergeben. Zur Kompensation der Abweichungen $C - \Delta\psi_{i'}^0$ vom gegebenen Wert $\psi = C$ sind die Intensitäten $\Gamma_{j'}^0$, der durch die Punkte $P_{j'}$ verlaufenden Wirbelringe aus dem — für die Punkte $P_{i'}$ aufgeschriebenen — linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j'=n+1}^{2n} (\psi_{i'j'+}^* - \psi_{i'j'-}^*) \Gamma_{j'}^0 = C - \Delta\psi_{i'}^0 \quad (i' = n+1, n+2, \dots, 2n) \quad (20)$$

zu bestimmen. Diese Werte von $\Gamma_{j'}^0$ zerstören jedoch die mit den Werten Γ_j^0 schon gesicherte Erfüllung der kinematischen Bedingung in den Punkten P_i durch die additiven Glieder

$$\Delta\psi_i^0 = \sum_{j'=n+1}^{2n} (\psi_{ij'+}^* - \psi_{ij'-}^*) \Gamma_{j'}^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (21)$$

Nach Bestimmung der Störglieder anhand der Gl. (21) kann man das Iterationsverfahren mit den beiden linearen Gleichungssystemen

$$\sum_{j=1}^n (\psi_{ij+}^* - \psi_{ij-}^*) \Delta\Gamma_j^{(p)} = - \sum_{j'=n+1}^{2n} (\psi_{ij'+}^* - \psi_{ij'-}^*) \Delta\Gamma_{j'}^{(p-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

und

$$\sum_{j'=n+1}^{2n} (\psi_{i'j'+}^* - \psi_{i'j'-}^*) \Delta \Gamma_j^{(p)} = - \sum_{j=1}^n (\psi_{i'j+}^* - \psi_{i'j-}^*) \Delta \Gamma_j^{(p)}$$

$$(i' = n + 1, n + 2, \dots, 2n) \quad (23)$$

durchführen. Die Bezeichnungen (p) und $(p - 1)$ neben den zusätzlichen Wirbelstärken $\Delta \Gamma$ sind keine Exponenten, sondern laufende Nummern jenes Schrittes, aus dem sich diese Wirbelstärke ergibt. Auf der rechten Seite der Gleichungssysteme (22) bzw. (23) stehen (mit entgegengesetzten Vorzeichen) die Werte $\Delta \psi_i^{(p-1)}$ bzw. $\Delta \psi_i^{(p)}$ der Stromfunktionen in den Aufpunkten P_i bzw. $P_{i'}$ jener Strömung, die von den durch die Punkte P_j bzw. P_j verlaufenden zusätzlichen Wirbelringen hervorgerufen wird. [Diese Wirbelringe werden aus dem vorangegangenen $(p - 1)$ -ten Schritt durch Auflösung des Systems (23) bzw. aus dem (p) -ten Schritt durch Auflösung von (22) ermittelt. Für den ersten Schritt, d. h. für $(p) = 1$, ist die rechte Seite von (22) mit den Werten $-\Delta \psi_i^0$ nach Gl. (21) identisch.] Diese Größen werden mit der Wirkung der (p) -ten zusätzlichen Wirbelringe kompensiert, deren Intensitäten $\Delta \Gamma_j^{(p)}$ bzw. $\Delta \Gamma_{j'}^{(p)}$ sich aus den Systemen (22) bzw. (23) ergeben.

Ist die Lage der Punkte $P_i, P_{i'}, P_j$ und $P_{j'}$ zweckmäßig gewählt, so kann man eine schnelle Konvergenz der Iteration erreichen, da die Abweichungen $\Delta \psi_i^{(p-1)}$ und $\Delta \psi_i^{(p)}$ von dem für die Grenzfläche vorgeschriebenen konstanten Wert der Stromfunktion — und infolgedessen auch die diese Abweichungen kompensierenden zusätzlichen Wirbelstärken $\Delta \Gamma_j^{(p)}$ und $\Delta \Gamma_{j'}^{(p)}$ — rasch abklingen. Man wird sich die Fertigkeit, die für die Ausführung solcher Rechnungen nötig ist, schnell aneignen. Fügt man die aus den einzelnen Schritten sich ergebenden zusätzlichen Wirbelstärken Schritt für Schritt zur Summe der aus den vorangegangenen Schritten erhaltenen zusätzlichen Wirbelstärken hin, so erhält man die beiden Zahlenfolgen

$$\Gamma_j^0, \Gamma_j^{(1)} = \Gamma_j^0 + \Delta \Gamma_j^{(1)}, \Gamma_j^{(2)} = \Gamma_j^{(1)} + \Delta \Gamma_j^{(2)}, \dots \text{ und } \Gamma_{j'}^0, \Gamma_{j'}^{(1)} = \Gamma_{j'}^0 + \Delta \Gamma_{j'}^{(1)},$$

$$\Gamma_{j'}^{(2)} = \Gamma_{j'}^{(1)} + \Delta \Gamma_{j'}^{(2)}, \dots$$

Die Größen $\Gamma_j^{(m)}$ bzw. $\Gamma_{j'}^{(m)}$ bedeuten also die (m) -ten Näherungswerte der Stärken Γ_j bzw. $\Gamma_{j'}$ jener Wirbelringe, die durch den Punkt P_j bzw. $P_{j'}$ verlaufen und die den kinematischen Bedingung in den Aufpunkten erfüllen. Die Wirbelstärken Γ_j bzw. $\Gamma_{j'}$ ergeben sich dann als Grenzwert dieser Zahlenfolgen für den Fall, daß die Zahl (m) der Iterationsschritte unbegrenzt zunimmt:

$$\Gamma_j = \lim_{(m) \rightarrow \infty} \Gamma_j^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\Gamma_j^0 + \sum_{(p)=1}^m \Delta \Gamma_j^{(p)} \right] \quad (24)$$

$$\Gamma_{j'} = \lim_{(m) \rightarrow \infty} \Gamma_{j'}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\Gamma_{j'}^0 + \sum_{(p)=1}^m \Delta \Gamma_{j'}^{(p)} \right]. \quad (25)$$

Konvergiert die Iteration ziemlich schnell, so kann man diese Grenzwerte nach einigen Schritten durch graphische oder analytische Extrapolation bestimmen. Es sei hier bemerkt, daß die Koeffizienten der Unbekannten in beiden Gleichungssystemen (22) und (23) als Wirkungsfunktionen der gespiegelten Wirbelringe nur von den Koordinaten der Punkte P_i, P_i', P_j und P_j' abhängen. Deshalb verändert sich im Laufe der Iteration lediglich der inhomogene Teil der Systeme (22) und (23), was den Arbeitsaufwand der Iteration wesentlich vermindert.

Beim Ausrechnen der Komponenten der Konturgeschwindigkeit werden wir bezüglich der Indizes der Aufpunkte P_i und P_i' bzw. der die Lage der Wirbelringe kennzeichnenden Punkte P_j und P_j' im Gegensatz zum bisherigen von nun an keinen Unterschied machen, d. h. es werden lediglich die Indizes $i = 1, 2, \dots, 2n$ bzw. $j = 1, 2, \dots, 2n$ benutzt werden. Dementsprechend ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten im Punkt P_i der Meridianlinie mit den nach den Gln. (24) und (25) bestimmten Werten von Γ_j zu

$$v_r(P_i) = \sum_{j=1}^{2n} [v_{r+}^*(P_i, P_j) - v_{r-}^*(P_i, P_j)] \Gamma_j \quad (26)$$

$$v_z(P_i) = \sum_{j=1}^{2n} [v_{z+}^*(P_i, P_j) - v_{z-}^*(P_i, P_j)] \Gamma_j. \quad (27)$$

Hierbei bedeuten $v_{r+}^*(P_i, P_j)$ und $v_{z+}^*(P_i, P_j)$ bzw. $v_{r-}^*(P_i, P_j)$ und $v_{z-}^*(P_i, P_j)$ die radialen und axialen Geschwindigkeitskomponenten im Punkt $P_i(r_i, z_i)$ der Meridianlinie, induziert durch den durch den Punkt $P_j(r_j, z_j)$ gegebenen Wirbelring bzw. durch sein Spiegelbild. Wir erhalten diese Komponenten aus den Beziehungen (11) und (12), wenn wir statt r, z und r_0, z_0 die Zylinderkoordinaten r_i, z_i und r_j, z_j bzw. $r_j, -z_j$ schreiben. Schließlich sind die Werte der Konturgeschwindigkeit in den Aufpunkten nach der Gl.

$$v(P_i) = [v_r^2(P_i) + v_z^2(P_i)]^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

auszurechnen.

Die systematische Arbeit wird wesentlich erleichtert, wenn man die Wirkungsfunktion (1) und die Geschwindigkeitskomponenten nach den Gln. (11) und (12) in dimensionsloser Form als Funktionen der dimensionslosen Zylinderkoordinaten $\varrho = r/r_0$ und $\zeta = \frac{z - z_0}{r_0}$ gebrauchen werden. Diese sogenannte reduzierte Wirkungsfunktion und die reduzierten Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich mit den Abkürzungen

$$A(k^2) = \frac{2}{k} (K - E) - kK \quad (29)$$

und

$$P(k^2) = k \left(\frac{2 - k^2}{1 - k^2} E - 2K \right) \quad (30)$$

(wo

$$k^2 = \frac{4\varrho}{(1 + \varrho)^2 + \zeta^2} \quad (31)$$

ist) zu

$$\bar{\psi}^*(\varrho, \zeta) \equiv \frac{\psi^*(r, z)}{r_0} = - \frac{\sqrt{\varrho}}{2\pi} A(k^2) \quad (32)$$

$$\bar{v}_r^*(\varrho, \zeta) \equiv r_0 v_r^*(r, z) = - \frac{1}{4\pi\varrho^{3/2}} P(k^2) \frac{\zeta}{2} \quad (33)$$

$$\bar{v}_z^*(\varrho, \zeta) \equiv r_0 v_z^*(r, z) = - \frac{1}{4\pi\varrho^{3/2}} \left[A(k^2) - P(k^2) \frac{1 + \varrho}{2} + \frac{1}{k^2} P(k) \right], \quad (34)$$

und sind ein für allemal berechenbar. Stehen die Zahlenwerte dieser Funktionen tabellarisch oder graphisch zur Verfügung, so hat man gegebenenfalls lediglich die dimensionslosen Koordinaten ϱ und ζ zu bestimmen und die zugehörigen Werte der reduzierten Wirkungsfunktion und der reduzierten Geschwindigkeitskomponenten aus der Tabelle oder aus den Diagrammen zu entnehmen.

Die Funktionen $\bar{\psi}^*$ bzw. \bar{v}_r^* und \bar{v}_z^* haben die Symmetrie-Eigenschaften $\bar{\psi}^*(\varrho, -\zeta) = \bar{\psi}^*(\varrho, \zeta)$ bzw. $\bar{v}_r^*(\varrho, -\zeta) = -\bar{v}_r^*(\varrho, \zeta)$, $\bar{v}_z^*(\varrho, -\zeta) = \bar{v}_z^*(\varrho, \zeta)$. Dementsprechend genügt es, die Zahlenwerte aller drei Funktionen nur für positive ζ -Werte auszurechnen. Es sei hier bemerkt, daß alle drei Funktionen ihr Vorzeichen dem Drehsinn des Wirbelringes gemäß wechseln. In [5] ist die reduzierte Wirkungsfunktion graphisch, die reduzierte Geschwindigkeitskomponente außerdem auch in Tabellenform für den Bereich $0 \leq \varrho \leq 2$, $0 \leq \zeta \leq 2,5$ gegeben, wo die Vorzeichen dem positiven Drehsinn gemäß der Abb. 1 entsprechen. ([5] enthält auch eine Tabelle der Hilfsfunktionen $A(k^2)$ und $P(k^2)$ für den Bereich $0 \leq k^2 \leq 0,9995$.)

Die Brauchbarkeit des geschilderten Verfahrens wurde durch Messungen im elektrolytischen Trog nachgeprüft. Der Vergleich der berechneten Geschwindigkeitsverteilung längs der Meridianlinie zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Messungen, was die Anwendbarkeit der Methode zu bestätigen scheint.

Zusammenfassung

Für die reibungsfreie inkompressible Strömung durch den rotationssymmetrischen Raum vor radialen Laufrädern wurde mit Hilfe einzelner Wirbelringe ein einfaches Näherungsverfahren entwickelt. Die Stärke der Wirbelringe ergibt sich durch wiederholte Auflösung jener zwei linearen Gleichungssysteme, durch die die Erfüllung der kinematischen Bedingung ausgedrückt ist, daß die STOKESsche Stromfunktion an der Grenzfläche einen konstanten Wert aufzuweisen hat. Die Konturgeschwindigkeit wird als die von diesem Wirbelringssystem induzierte Geschwindigkeit ermittelt.

Literatur

1. GRUBER, J.: Die Konstruktion von Schaufelsternen mit rückwärts gekrümmter Beschau-
felung. *Periodica Polytechnica*. **1**, 43/49 (1960).
2. HOFFMEISTER, M.: Entwicklung von radialen Laufschaufeln unter Benutzung des Singulari-
tätenverfahrens. *Maschinenbau Technik*. **8**, 77—83 (1959).
3. SASVÁRY, G.: *Hidrodinamika*. Athenaeum, Budapest, 1925.
4. KONECSNY, F.: Über die Konvergenz einiger bei der Untersuchung rotations-symmetrischer
Strömungen vorkommender uneigentlicher Integrale. *Periodica Polytechnica*. **3**,
223/229(1961)
5. KONECSNY, F.: Eljárás egyenes hátlapú radiális ventilátor-járókerekék belépési lekerekítése
mentén kialakuló sebességmegoszlás számítására. Dissertation bei der Abt. VI. der
Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Budapest, 1960.

F. KONECSNY, Budapest, XI., Bertalan Lajos utca 4—6., Ungarn.