

ÜBER DIE KONSTRUKTION EINES MECHANISCHEN SCHWINGUNGSSYSTEMS ODER EINER ELEKTRISCHEN LC-SCHALTUNG MIT VORGESCHRIEBENEN EIGENKREISFREQUENZEN (POLEN)

Von

Á. BOSZNYAY

Lehrstuhl für technische Mechanik der Fakultät für Elektroingenieurwesen,
Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 7. März, 1961)

1. Einleitung und Zielsetzung

Der Frage der Bestimmung eines mechanischen Schwingungssystems mit gegebenen Eigenkreisfrequenzen kommt eher theoretische Bedeutung zu. Der Konstruktion einer elektrischen LC-Schaltung mit gegebenen Polen dürfte jedoch auch eine praktische Bedeutung beizumessen sein. Die beiden Probleme führen wir aus dem Grund nebeneinander an, weil sie, formell betrachtet, miteinander übereinstimmen.

Die wichtigeren Schritte, die zur Lösung des fraglichen Problems in der Literatur [1], [2], [3] vorgeschlagen wurden, lassen sich folgendermaßen kennzeichnen:

1. Mit Hilfe der vorgeschriebenen Pole (und Nullstellen) kann die die Impedanz des Zweipoles ausdrückende rationale gebrochene Funktion automatisch aufgeschrieben werden.

2. Anschließend können von dieser Funktion schrittweise Glieder abgespalten werden, zu denen sich die entsprechenden Schaltungselemente unschwer bestimmen lassen.

Die mechanische Seite des Problems wird von FALK mit Hilfe des von ihm konstruierten und als Abbildung bezeichneten endlichen Iterationsverfahrens folgendermaßen gelöst [4]. Zunächst werden auf elementare Weise ausschließlich Schwingungssysteme mit dem Freiheitsgrad $f = 1$ konstruiert, u. zw. derart, daß die Eigenkreisfrequenzen dieser Systeme mit den vorgegebenen Frequenzen übereinstimmen; anschließend werden dann diese Einzelsysteme durch die erwähnte Abbildung zu einem einzigen System gleichsam »verschmolzen«, wobei das resultierende Schwingungssystem über mehrere Freiheitsgrade, jedoch über die vorgegebenen Eigenkreisfrequenzen verfügt.

In einem Aufsatz erwähnt SCHAEFER [5], ohne auf die Lösung ausführlicher einzugehen, daß die Aufgabe auch durch die Umkehrung des sogenannten BARANOWSchen Verfahrens gelöst werden kann. Unser Aufsatz beruht einerseits auf dieser Idee von SCHAEFER, andererseits aber auf einem Gedanken, der in einem in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz [6] die Verfahren von

KOHN und BARANOW vereinigt. Der Vorzug unseres in dieser Weise entwickelten Verfahrens besteht im Vergleich zu den oben angeführten Verfahren darin, daß es *unmittelbar in eine einfache und gut übersichtliche graphische Form gebracht werden kann*. Es scheint uns zweckmäßig, diese graphische Form des Verfahrens als Richtlinie auch dann zu skizzieren, wenn die Methode als Rechenverfahren angewendet werden sollte.

2. Zusammenfassung der einschlägigen Ergebnisse des Aufsatzes [6]

Da unser Verfahren von der im Aufsatz [6] beschriebenen Methode abgeleitet werden kann, wollen wir zunächst das Wesen dieser Methode — ohne Beweisführung — kurz darlegen. Nach dem Aufsatz [6] können die Eigenfrequenzen des in Abb. 1. dargestellten mechanischen Schwingungssystems graphisch auf die im folgenden zu beschreibende Weise bestimmt werden.

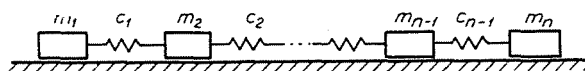


Abb. 1

(Im wesentlichen besteht das Verfahren in einer Kombination der in der Literatur bis zur Zeit noch nicht vereinigten KOHNSchen und BARANOWSchen Verfahren.) Im nachstehenden wollen wir die graphische Ausführungsform des Verfahrens beschreiben. Die Dimension der Federkonstanten c_i ist hierbei: Länge/Kraft.

Nach geeigneter Wahl der Maßeinheiten m_x ($\text{cm/kp sec}^2 \text{ cm}^{-1}$) für die Masse- und c_x (cm/cm kp^{-1}) für die Federkonstante konstruieren wir das sogenannte Skelette des Schwingungssystems (Abb. 2) und suchen durch Probieren denjenigen Wert a_j des Abstandes a auf, mit dem die in der Abbildung dargestellte und vom einen Endpunkt der Skelettgeraden ausgehende gebrochene Linie in den anderen Endpunkt der Skelettgeraden einläuft. Aus dem derart bestimmten Wert von a_j kann die *größte* Eigenkreisfrequenz anhand der Beziehung

$$a_j = \frac{\sqrt{m_x c_x}}{a_j}$$

berechnet werden.

Zur Ermittlung der größten Eigenkreisfrequenz, die jedoch kleiner ist als a_j , stellen wir uns die Skelettstrecke in den Berührungspunkten der Massen und Federn symbolisierenden Strecken als zerschnitten vor, führen mit Hilfe der aus der vorangegangenen Konstruktion bekannten Punkte C_i und

M_i die in Abb. 2b veranschaulichten Umdrehungen aus und lassen schließlich die nach der Umdrehung erhaltenen zwei äußersten Skelettstücke fort. Das derart erhaltene Gebilde läßt sich als das Skelett eines neuen Schwingungssystems mit den Kennzahlen m_1^*, \dots, c_1^* deuten, dessen Masse um eine kleiner ist als die des ursprünglichen Systems. Hierauf konstruieren wir wieder durch Probieren eine der in Abb. 2a dargestellten gebrochenen Linie ähnliche Linie (siehe Abb. 2c). Auf diese Weise erhalten wir den Abstand a_{j-1} , und aus diesem

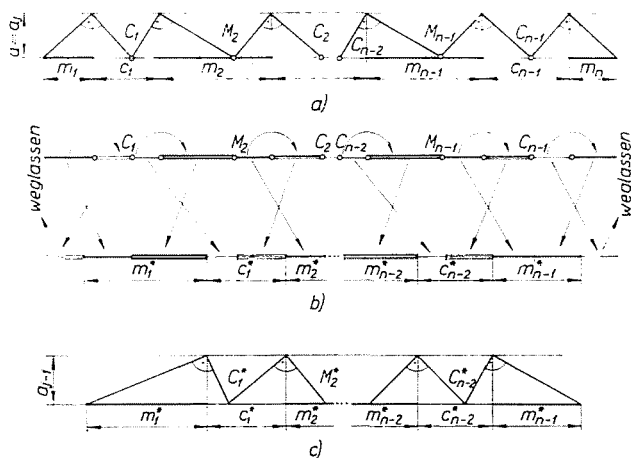


Abb. 2

die höchste Eigenkreisfrequenz a_{j-1} , die niedriger ist als a_j , anhand der Formel

$$a_{j-1} = \frac{\sqrt{m_x c_x}}{a_{j-1}}$$

Zur Bestimmung der höchsten Eigenkreisfrequenz, die niedriger ist als a_{j-1} , führen wir in Kenntnis der Punkte C_i^* und M_i^* wieder Umdrehungen aus und konstruieren durch Probieren eine gebrochene Linie.

Auf diese Weise weiter fortschreitend, lassen sich durch abwechselnde Vornahme der Umdrehungen und der Konstruktion der gebrochenen Linien sämtliche Eigenkreisfrequenzen ermitteln.

Die beschriebene Methode führt zu einem Ergebnis auch für den Fall, daß die Masse m_1 oder m_n oder die Massen m_1 und m_n durch Federn an einem fixen Punkt befestigt sind.

3. Konstruktion eines mechanischen Schwingungssystems mit vorgeschriebenen Eigenkreisfrequenzen

Im nachstehenden soll gezeigt werden, daß durch die Umkehrung des Verfahrens unter 2. auch diese Aufgabe gelöst werden kann.

Soll ein Schwingungssystem mit einer Anordnung nach Abb. 1 konstruiert werden, hat man von einem Schwingungssystem mit zwei Freiheitsgraden auszugehen, wobei man wie folgt verfährt. Es seien

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$$

die vorgeschriebenen Eigenkreisfrequenzen.

Der Anschaulichkeit halber soll zunächst die graphische Ausführung der Lösung beschrieben werden. Nach Festlegung der Maßeinheiten m_x und c_x wählen wir einen beliebigen Wert für $m_1^{(1)}$ und konstruieren gemäß Abb. 3a ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Höhe

$$a_1 = \frac{\sqrt{m_x c_x}}{a_1}$$

beträgt. Hierauf nehmen wir $c_1^{(1)}$ derart an, daß $c_1^{(1)} > c_{11}^{(1)}$ sei. Hierauf wird ein neues rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe a_1 konstruiert, wodurch wir $m_2^{(1)}$ erhalten. Das derart erhaltene Gebilde stellt das Skelett eines Schwingungssystems mit zwei Freiheitsgraden und einer Eigenkreisfrequenz a_1 dar.

Als nächster Schritt folgt die Auftragung einer dem Skelett parallelen Linie in einem Abstand von

$$a_2 = \frac{\sqrt{m_x c_x}}{a_2} < a_1.$$

Nun schreiten wir, von dem rechtsstehenden Endpunkt des Skeletts ausgehend, nach links voran, wobei wir die gebrochene Linie, bestehend aus dem rechtwinkligen Dreieck mit der Höhe a_2 , konstruieren. Auf diese Weise erhalten wir den Punkt $A_2^{(1)}$ (siehe Abb. 3b). Dieser Punkt liegt nach [6] unbedingt innerhalb der $m_1^{(1)}$ langen Strecke. Hierauf wählen wir innerhalb der Strecke $A_1^{(1)}A_2^{(1)}$ einen beliebigen Punkt ($M_1^{(1)}$) und konstruieren nun die aus Abb. 3c ersichtlichen rechtwinkligen Dreiecke mit der Höhe a_2 . Die derart verlängerte Skelettgerade stellen wir uns als in den Punkten $M_1^{(1)}$, $C_1^{(1)}$, $M_2^{(1)}$ zerschnitten vor und nehmen die eingezeichneten Umdrehungen um 180° vor. Die derart erhaltene Skelettstrecke ist in Abb. 3d dargestellt.

Diese Skelettstrecke stellt das Skelett des Schwingungssystems mit den Kennzahlen $m_1^{(2)}$, $c_1^{(2)}$, $m_2^{(2)}$, $c_2^{(2)}$, $m_3^{(2)}$ dar. Aus einem Vergleich der Abbildungen 2a

und 3d geht hervor, daß die größte Eigenkreisfrequenz dieses Schwingungssystems a_2 beträgt. Aus der Tatsache, daß die Abb. 3c aus Abb. 3d auf die gleiche Art wie die untere Zeichnung der Abb. 2b aus deren oberer Zeichnung abgeleitet werden kann, geht klar hervor, daß das dem Skelett der Abb. 3d entsprechende Schwingungssystem ebenfalls die Eigenkreisfrequenz a_1 besitzt.

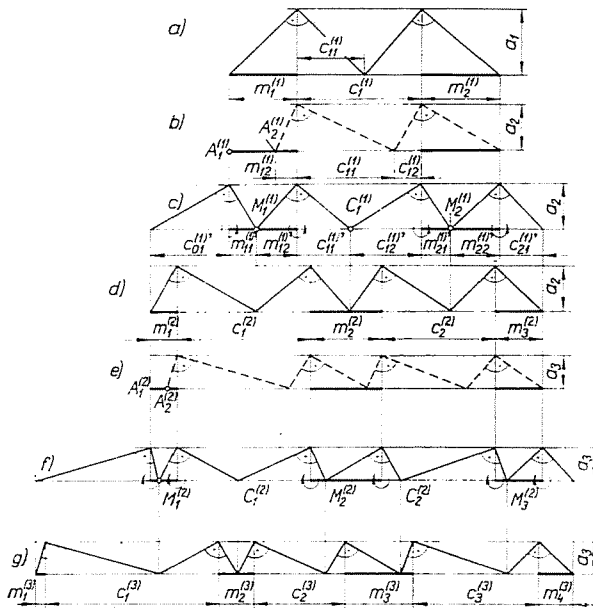


Abb. 3

Die Berücksichtigung der nächstfolgenden Eigenkreisfrequenz a_3 erfolgt wie folgt:

Von dem rechtsstehenden Endpunkt der zuletzt erhaltenen Skelettstrecke ausgehend, konstruieren wir eine gebrochene Linie nach links, die aus dem rechtwinkligen Dreieck mit der Höhe

$$a_3 = \frac{\sqrt{m_x c_x}}{a_3} < a_2$$

besteht. Hierdurch erhalten wir den Punkt $A_3^{(2)}$ (siehe Abb. 3e). Dieser Punkt liegt unbedingt innerhalb der $m_1^{(2)}$ langen Strecke. Zwischen $A_1^{(2)}$ und $A_2^{(2)}$ wählen wir an einer beliebigen Stelle einen Punkt $M_1^{(2)}$ und konstruieren, von diesem Punkt ausgehend, rechtwinklige Dreiecke mit der Höhe a_3 , ähnlich wie in Abb. 3c dargestellt (siehe Abb. 3f). Die derart erhaltene Skelettstrecke stellen wir uns als in den Punkten $M_1^{(2)}$, $C_1^{(2)}$, ... zerschnitten vor und führen die

bereits bekannten Umdrehungen aus (siehe Abb. 3g). In voller Übereinstimmung mit den Ausführungen des vorangehenden Abschnitts läßt sich nachweisen, daß das derart erhaltene Schwingungssystem mit den Kennzahlen $m_1^{(3)}, c_1^{(3)}, \dots$ außer a_1 und a_2 auch die Eigenkreisfrequenz a_3 hat.

In der gleichen Weise fortfahrend, können die Daten des gesuchten Schwingungssystems ermittelt werden.

Soll ein Schwingungssystem konstruiert werden, das an dem einen oder an den beiden Enden durch Federn an fixe Punkte befestigt ist, hat man im Grunde genommen ebenfalls nach dem soeben beschriebenen Verfahren vorzugehen. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß man in diesem Fall von einem Schwingungssystem mit nur einem Freiheitsgrad ausgehen muß.

Die rechnerische Form unseres Verfahrens läßt sich aus den Abbildungen 3a—d unschwer ablesen. Es dürfte die Beschreibung der den Abbildungen 3a—d entsprechenden Berechnung genügen.

Die der Abb. 3a entsprechende Berechnung gestaltet sich folgendermaßen:

$m_1^{(1)}$ wird nach Belieben angenommen und anschließend $c_{11}^{(1)}$ auf Grund des Satzes für das geometrische Mittel in bezug auf das aus der Abbildung ersichtliche rechtwinklige Dreieck berechnet. Aus

$$m_1^{(1)} c_{11}^{(1)} = \frac{1}{a_1^2}$$

erhalten wir

$$c_{11}^{(1)} = \frac{1}{m_1^{(1)} a_1^2}$$

Anschließend wird $c_1^{(1)} > c_{11}^{(1)}$ gewählt, und $m_2^{(1)}$ wie folgt berechnet:

$$m_2^{(1)} = \frac{1}{c_1^{(1)} a_1^2}$$

Der in Abb. 3b dargestellten Konstruktion entspricht folgende Berechnung:

$$c_{12}^{(1)} = \frac{1}{m_2^{(1)} a_1^2}; \quad c_{11}^{(1)} = c_1^{(1)} - c_{12}^{(1)}; \quad m_{12}^{(1)} = \frac{1}{c_{11}^{(1)} a_1^2}$$

Durch $m_{12}^{(1)}$ ist die Lage von $A_2^{(1)}$ bestimmt.

Der Konstruktion gemäß Abb. 3c entspricht folgende Berechnung: Zunächst wird $m_{12}^{(1)'}$ in der Weise gewählt, daß die Ungleichung

$$m_1^{(1)} > m_{12}^{(1)'} > m_{12}^{(1)}$$

erfüllt wird. Der weitere Gang der Berechnung gestaltet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 m_{11}^{(1)'} &= m_1^{(1)} - m_{12}^{(1)'}; & c_{01}^{(1)'} &= \frac{1}{m_{11}^{(1)'} \alpha_1^2}; \\
 c_{11}^{(1)'} &= \frac{1}{m_{12}^{(1)'} \alpha_1^2}; & c_{12}^{(1)'} &= c_1^{(1)} - c_{11}^{(1)'}; & m_{21}^{(1)'} &= \frac{1}{c_{12}^{(1)'} \alpha_1^2}; \\
 m_{22}^{(1)'} &= m_2^{(1)} - m_{21}^{(1)'}; \\
 c_{21}^{(1)'} &= \frac{1}{m_{22}^{(1)'} \alpha_1^2}.
 \end{aligned}$$

Die Daten des aus Abb. 3d ersichtlichen, durch Umdrehungen hergestellten Skeletts ergeben sich hierbei zu

$$m_1^{(2)} = m_{11}^{(1)'}; \quad c_1^{(2)} = c_{01}^{(1)'} + c_{11}^{(1)'}; \quad m_2^{(2)} = m_{12}^{(1)'} + m_{21}^{(1)'}; \quad c_2^{(2)} = c_{12}^{(1)'} + c_{21}^{(1)'}.$$

4. Konstruktion einer elektrischen LC-Schaltung mit vorgeschriebenen Polen

Auf Grund irgendeiner der Analogien, die zwischen den mechanischen und elektrischen Systemen bestehen, läßt sich unschwer eine elektrische Schaltung angeben, deren KIRCHHOFFSches Gleichungssystem mit dem Differentialgleichungssystem des bisher untersuchten mechanischen Schwingungssystems formell übereinstimmt. Eine solche Schaltung ist z. B. in Abb. 4 dargestellt.

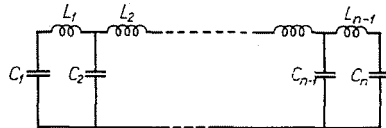


Abb. 4

In der gezeichneten Form kann diese Schaltung mit dem Schaltungssystem nach Abb. 1 (ohne Befestigung durch Federn an einen fixen Punkt) in Analogie gebracht werden. Aus einem Vergleich der Differentialgleichungssysteme, die das Verhalten der beiden Systeme beschreiben, geht deutlich hervor, daß die Maßzahlen C_i der Kapazitäten den Maßzahlen m_i der Massen und die Maßzahlen L_i der Induktivitäten den Maßzahlen c_i der Federkonstanten entsprechen.

Eine elektrische Schaltung gemäß Abb. 4 mit vorgeschriebenen Polen kann somit auf die unter 3. erörterte Weise konstruiert werden. Nur müssen an Stelle der in den dortigen Ausführungen vorkommenden, mit m_i bezeichneten Größen die C_i und an Stelle der mit c_i bezeichneten Größen die L_i eingesetzt werden.

Zusammenfassung

Die Arbeit schlägt ein Verfahren für die Konstruktion eines mechanischen Schwingungssystems mit vorgeschriebenen Eigenfrequenzen oder einer elektrischen LC-Schaltung mit vorgeschriebenen Polen vor. Das Verfahren beruht auf der älteren Idee [6] des Verfassers, daß sich die Vereinigung des P. KOHNSchen und des BARANOWSchen Verfahrens für die Lösung von Eigenwertproblemen als erfolgreich zeigen muß. Das Wesen der vorliegenden Methode ist die Umkehrung des obigen Verfahrens, dessen Vorzug im Vergleich zu den in der Literatur für ähnliche Zwecke vorgeführten Verfahren darin besteht, daß es unmittelbar in eine einfache und gut übersichtliche graphische Form umgewandelt werden kann.

Literatur

1. CAUER, W.: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 2. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin, 1954.
2. FELDTKELLER, R.: Einführung in die Siebschaltungstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik, 3. Auflage, S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1950.
3. GUILLEMIN, E. A.: Synthesis of passive networks, John Wiley & Sons, New York, 1957.
4. FALK, S.: Die Abbildung eines allgemeinen Schwingungssystems auf eine einfache Schwingerkette, Ingenieur Archiv, **23**, 314 (1955).
5. SCHAEFER, H.: Über das Verfahren von Baranow und seine Erweiterung auf die Ermittlung der Eigenschwingungsformen von Schwingerketten, Ingenieur Archiv, **23**, 307 (1955).
6. Á. BOSZNAY: Eine Methode zur zahlenmäßigen Bestimmung der Eigenwerte (z. B. Eigenfrequenzen) und der Eigenvektoren (z. B. Schwingungsformen) mit besonderer Rücksicht auf die technischen Eigenwertaufgaben, Periodica Polytechnica Engineering, **3**, 205 (1959).

DR. Á. BOSZNAY, Budapest, V., Szerb u. 23., Ungarn.