BEITRÄGE ZUR KONFORMEN ABBILDUNG EINES SCHAUFELSTERNES AUF EIN EBENES SCHAUFELGITTER

Von

O. Füzy

Lehrstuhl für Wasserkraftmaschinen, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 11. April 1961)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. Varga

Die Untersuchung der Strömung im Laufrad oder Leitrad einer radial durchströmten Pumpe oder Turbine kann — wie bekannt — mit Hilfe einer logarithmischen Abbildungsfunktion auf die Untersuchung der Strömung eines unendlichen ebenen Schaufelgitters zurückgeführt werden. Es stellt sich dabei die Frage, unter welchen Bedingungen diese beiden Strömungen einander entsprechen. Die vorliegende Arbeit setzt sich das Ziel, die erwähnte Frage zu untersuchen.

Es bestehe zwischen der Ebene z und ζ in Abb. 1 die geometrische Beziehung

$$\zeta = i \frac{nt}{2\pi} \ln z. \tag{1}$$

Hierin bedeutet n die Anzahl der am Umfang eines Kreises mit dem Radius $r = |z_0|$ gleichmäßig verteilten Singularitäten (Q, Γ), t hingegen die Teilung der aus Wirbelquellen bestehenden unendliche Reihe der Ebene ζ.

Das komplexe Potential der Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt der Ebene z, induziert durch die am Kreisumfang untergebrachten n Wirbelquellen, schreibt sich zu

$$W_z = \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln (z^n - z_0^n). \tag{2}$$

Mit $z = e^{-i \frac{2\pi}{nt} \zeta}$ erhält man hieraus

$$W_z = \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln \left(e^{-i \frac{2\pi}{t} \zeta} - e^{-i \frac{2\pi}{t} \zeta_0} \right), \tag{3}$$

worin ζ bzw. ζ_0 das Bild von z bzw. z_0 auf der Ebene ζ darstellt.

Betrachten wir jetzt in der Ebene ζ das komplexe Potential W_ζ^*, das durch die in diskreten Punkten einer Geraden untergebrachten Singularitäten $Q + i\Gamma$ induziert wird. Der Punkt $\zeta_0 + \nu t$ dieser Ebene entspricht dem Punkt $z_0 e^{-i \frac{2\pi}{n} \nu}$ der Ebene z. Für das betrachtete Potential gilt somit

$$W_\zeta^* = \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \ln(\zeta - \zeta_0 - \nu t).$$

Nach Ordnung ergibt sich hieraus

$$W_\zeta^* = \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty} (\zeta - \zeta_0 - \nu t) =$$

$$= \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln \left\{ (\zeta - \zeta_0) \prod_{\nu=1}^{\infty} [(\zeta - \zeta_0)^2 - \nu^2 t^2] \right\} =$$

$$= \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln \left[(\zeta - \zeta_0) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(\zeta - \zeta_0)^2 \pi^2}{t^2 \pi^2 \nu^2}\right) (-\nu^2 t^2) \right].$$

Da aber

$$\sin x = x \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 \lambda^2}\right),$$

wird, von einer Konstante abgesehen [1], die Gleichung in der Form

$$W_\zeta^* = \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln \sin \frac{(\zeta - \zeta_0)\pi}{t} \tag{4}$$

geschrieben werden.

Das Potential W_z — gemäß Gl. (3) — bezeichnet das auf die Ebene ζ transformierte Geschwindigkeitsfeld der auf der Ebene z — gemäß Abb. 1 — verteilten Singularitäten, wogegen das Potential W_ζ^* — gemäß Gl. (4) — das Geschwindigkeitsfeld der auf der Ebene ζ entsprechend untergebrachten Singularitäten bestimmt. Die Singularitäten der Ebene ζ sind von derselben Intensität wie jene der Ebene z. Der Einfachheit halber sei $Q = 0$. Für diesen Fall zeigt Abb. 2 das durch das Potential gemäß Gl. (2) bezeichnete Geschwindigkeitsfeld, Abb. 3 dessen Abbildung W_z auf die Ebene ζ, und schließlich Abb. 4 die Stromlinien der geraden Wirbelreihe (W_ζ^*).

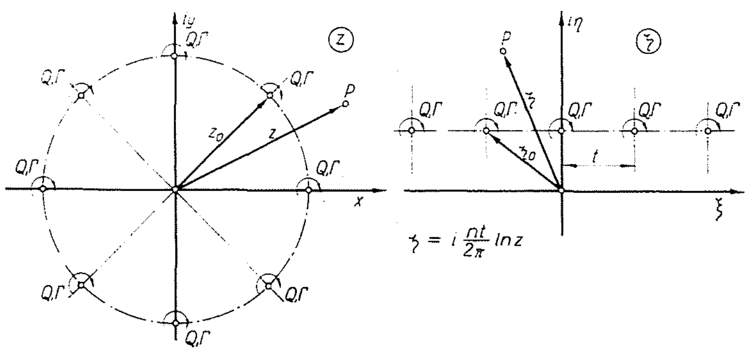

Abb. 1

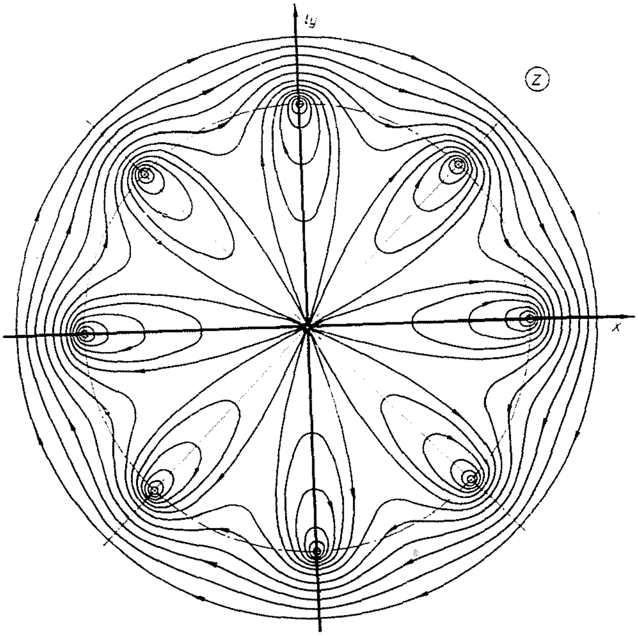

Abb. 2

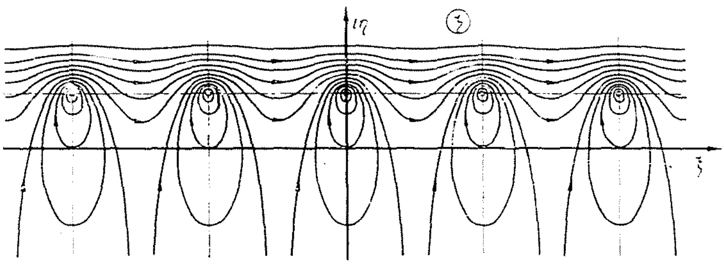

Abb. 3

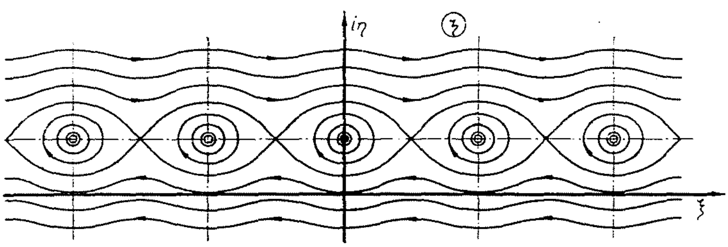

Abb. 4

Vergleicht man die Abbildungen 3 und 4, kann man offenbar ohne besondere Erläuterung feststellen, daß das Geschwindigkeitsfeld von W_z nach Gl. (3) und jenes von W_ζ^* nach Gl. (4) einander nicht gleich sind. Im weiteren wird jedoch gezeigt werden, daß sich diese beiden Felder — in jedem Punkte der Ebene — voneinander nur durch eine konstante Geschwindigkeit unterscheiden. Wenn wir diese Konstante bestimmen können, so ist die Möglichkeit gegeben, das Geschwindigkeitsfeld eines radialen Gitters aus dem Geschwindigkeitsfeld eines ebenen Schaufelgitters zu ermitteln.

Die Differenz dieser beiden Potentiale schreibt sich zu

$$W_\zeta^* - W_z = \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{i}{2} \frac{e^{i(\zeta - \zeta_0)\frac{\pi}{t}} - e^{-i(\zeta - \zeta_0)\frac{\pi}{t}}}{e^{-i\frac{2\pi}{t}\zeta_0} - e^{-i\frac{2\pi}{t}\zeta}}$$

beziehungsweise zu

$$W_\zeta^* - W_z = \frac{iQ - \Gamma}{2t}\zeta + \text{Const.},$$

das heißt

$$\left(W_\zeta^* + \frac{\Gamma - iQ}{2t}\zeta\right) - W_z = \text{Const.} \tag{5}$$

Mit den Bezeichnungen $c_z = c_x + ic_y$ und $c_\zeta = c_\xi + ic_\eta$ ergibt sich

$$c_x - ic_y = \frac{dW_z}{dz} \text{ und } c_\xi - ic_\eta = \frac{dW_\zeta}{d\zeta};$$

da ferner zwischen den beiden Geschwindigkeitsfeldern eine konforme Beziehung besteht, gilt auch für die komplexen Potentiale

$$dW_z = dW_\zeta,$$

so daß auch die Gleichung

$$(c_x - ic_y)\,dz = (c_\xi - ic_\eta)\,d\zeta$$

Geltung haben muß. Es gilt daher auch

$$W_\zeta - W_z = \text{Const.} \tag{6}$$

Aus der Zusammenfassung der Gleichungen (5) und (6) ergibt sich

$$W_\zeta = W_\zeta^* + \frac{\Gamma - iQ}{2t}\zeta\,, \qquad 7)$$

woraus folgt, daß sich das komplexe Potential des auf die Ebene ζ transformierten Geschwindigkeitsfeldes der Ebene z, als die Summe der Potentiale der entsprechenden geraden Wirbelreihe einerseits und einer parallelen Strömung mit konstanter Geschwindigkeit andererseits ergibt.

Differenziert man Gl. (7), erhält man

$$c_\zeta = c_\zeta^* + \frac{\Gamma - iQ}{2t}, \tag{8}$$

es wird also

$$c_k = \frac{\Gamma + iQ}{2t} \tag{9}$$

jene Geschwindigkeit — man kann sie als »kompensierende Geschwindigkeit« bezeichnen* —, die man auf das induzierte Geschwindigkeitsfeld einer ebenen Wirbelquellenreihe zu überlagern hat, um das induzierte Geschwindigkeitsfeld eines radialen Schaufelgitters auf Grund des Strömungsfeldes eines entsprechenden geraden Gitters berechnen zu können.**

Es entspricht also nach Abb. 5 dem Schaufelstern der Ebene z, durch den das Geschwindigkeitsfeld einer zentralen Wirbelquelle $[Q_m, \Gamma_p]$ beeinflußt wird, auf der Ebene ζ ein unendliches gerades Schaufelgitter. Das Geschwindigkeitsfeld des letzteren ergibt sich durch Überlagerung einer parallelen Grundströmung und des induzierten Geschwindigkeitsfeldes der im Schaufelinneren, den Singularitätenträgern entlang, verteilten Quellen bzw. Wirbeln:

$$c_{\zeta k} = c_{\zeta\infty} + c_\zeta^*. \tag{10}$$

Ist das auf der Ebene ζ liegende Bild jener Geschwindigkeit, die durch die in der Laufradmitte untergebrachte Quelle Q_m induziert wird, $ic_{m\zeta}$, und das Bild jener Geschwindigkeit, die durch den ebendort befindlichen Wirbel Γ_p induziert wird, $c_{p\zeta}$, so schreibt sich das auf der Ebene ζ liegende Bild des Geschwindigkeitsfeldes der zentralen Wirbelquelle zu

$$c_{1\zeta} = ic_{m\zeta} - c_{p\zeta}, \tag{11}$$

d. h. man hat eben die Geschwindigkeit im Unendlichen vor dem geraden Gitter.

* Für den Fall $Q = 0$ bezeichnete Professor GRUBER diese Geschwindigkeit als »kompensierende Geschwindigkeit« [2].

** Diese Feststellungen sind nicht nur im Falle von konzentrierten Singularitäten Q bzw. Γ richtig, sondern auch dann, wenn es sich um die Teile dQ, $d\Gamma$ der entlang von Singularitätenträgern verteilten Singularitäten bzw. — sinngemäß — um Schaufelgitter handelt, die aus diesen Teilen aufgebaut sind.

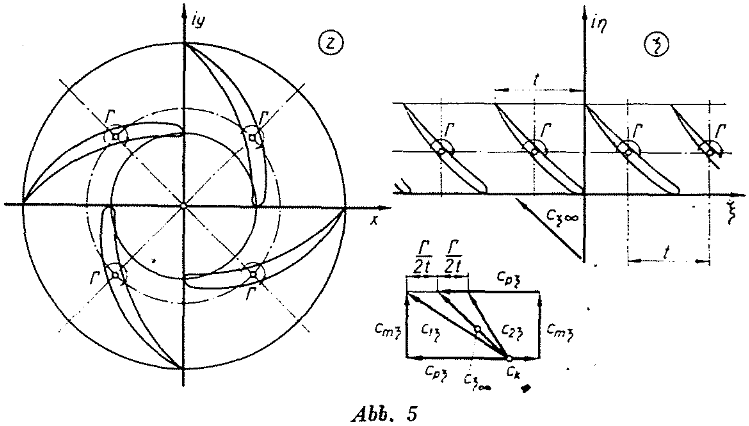

Abb. 5

Das Strömungsbild des radialen Schaufelgitters besteht aus der Grundströmung von $Q_m + i\,\Gamma_p$ und aus der durch die Beschaufelung induzierte Strömung. Wird dieses Geschwindigkeitsfeld mit der Hilfe der Abbildungsfunktion (1) auf ein gerades Gitter abgebildet, so ergibt sich die Geschwindigkeit in diesem den vorangehenden Ausführungen gemäß (Abb. 5) zu

$$c_{\zeta k} = c_k - c_{p\zeta} + ic_{m\zeta} + c_\zeta^* . \tag{12}$$

Mit Gl. (10) ergibt sich aus (12) die Geschwindigkeit der parallelen Grundströmung zu

$$c_{\zeta\infty} = c_k - c_{p\zeta} + ic_{m\zeta} .$$

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß ein Schaufelstern durch die logarithmische Abbildungsfunktion — bei gleichen Singularitäten — auf ein ebenes unendliches Gitter übertragen werden kann. Das Strömungsbild des geraden Schaufelgitters läßt sich in üblicher Weise, durch Überlagerung einer parallelen Grundströmung mit der Geschwindigkeit $c_{\zeta\infty}$ und des induzierten Geschwindigkeitsfeldes der an den Singularitätenträgern verteilten Singularitäten erzeugt werden. Die Kompensiergeschwindigkeit c_k erscheint hierbei als ein Glied der Grundströmung $c_{\zeta\infty}$.

Zusammenfassung

Ein Schaufelstern kann bekanntlich durch eine logarithmische Abbildungsfunktion auf ein ebenes Schaufelgitter übertragen werden, doch stimmt das Geschwindigkeitsfeld des abgebildeten Schaufelstern nicht mit jenem überein, das die im geraden ebenen Gitter untergebrachten Singularitäten induzieren. Der Unterschied kann aber durch Überlagerung einer parallelen

Strömung über die Strömung des geraden Schaufelgitters behoben werden. Es besteht also die Möglichkeit, die Strömung des Schaufelsterns in der Ebene des geraden Gitters in üblicher Weise, das heißt, durch Überlagerung einer parallelen Strömung über jenes Geschwindigkeitsfeld zu berechnen, das die auf den Singularitätenträgern verteilten Singularitäten induzieren.

Literatur

1. MÜLLER: Mathematische Strömungslehre. Springer-Verlag, Berlin, 1928.
2. GRUBER: Die Konstruktion von Schaufelsternen mit rückwärts gekrümmter Beschaufelung. Periodica Polytechnica **1**, 43 (1957).

O. FÜZY, Budapest, XI., Stoczek u. 2., Ungarn.