

DIE BILDFEHLER DES EINFACHEN POLARISKOPS

HERRN PROF. ÁDÁM MUTTNYÁNSZKY ZUM 70. GEBURTSTAG GEWIDMET

Von

F. THAMM

Lehrstuhl für Technische Mechanik der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 28. September 1959)

Seit Einführung der Großflächen-Polarisatoren hat sich ein einfaches spannungsoptisches Gerät (Polariskop) eingebürgert, das man mitunter auch das Föppl—Hiltschersche Gerät bezeichnet (Abb. 1). Dieses ist dadurch gekennzeichnet, daß die Beleuchtung durch das diffuse Licht eines Lampenkastens erfolgt, und daß in den Strahlengang vor und hinter den Polarisatoren keine Linsen eingeschaltet sind. Das spannungsoptische Bild kann, wenn man durch die Polarisatoren hindurchblickt, mit freiem Auge beobachtet, bzw. mit einer

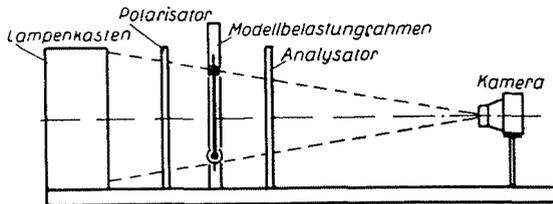


Abb. 1. Das einfache Polariskop

normalen photographischen Kamera aufgenommen werden. Neben der Einfachheit hat die Apparatur noch den Vorzug des großen Bildfeldes, und Dank der diffusen Beleuchtung den weiteren Vorteil, daß auch Modelle mit nicht ganz ebenen Oberflächen im Bild gleichmäßig ausgeleuchtet erscheinen. Diesen Vorzügen gegenüber müssen gewisse Abbildungsfehler in Kauf genommen werden, die die Brauchbarkeit des Gerätes beeinträchtigen können. Sie sind schon seit längerem bekannt und wurden im Schrifttum auch an mehreren Stellen erwähnt, für ihre Größe und für die Faktoren, von denen sie abhängen, waren jedoch keine Anhaltspunkte zu finden. Verfasser hat sich deshalb die Aufgabe gesetzt, zahlenmäßige Unterlagen für die Abbildungsfehler zu finden.

Die Strahlen, die das Auge des Beobachters bzw. das Objektiv der Kamera treffen, sind nicht parallel, sondern konvergent, was soviel bedeutet, daß die am Bildaufbau beteiligten Strahlen höchstens in einem Punkt des Modells senkrecht zur Modellfläche durchtreten. Wird das Bild photogra-

phiert, und wird beim Aufstellen der Kamera einige Sorgfalt angewendet, so fällt dieser Punkt mehr oder weniger genau mit dem Durchstoßpunkt der optischen Achse des Aufnahmeobjektivs durch das Modell zusammen.

Die konvergente Durchleuchtung des Modells hat zweierlei Bildfehler zur Folge. Die eine Art, die eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Astigmatismus bei unkorrigierten Linsen hat, hat ihre Ursache in der schiefen Durchleuchtung des Modells an Stellen außerhalb der optischen Achse. Dies bewirkt, daß der Lichtstrahl besonders an Stellen mit starkem Spannungsgefälle bei seinem Durchgang durch das Modell Stellen berührt, an denen der Spannungszustand verschieden ist. Außerdem ist der Gangunterschied der beiden Komponenten des Lichtvektors bei schiefer Durchleuchtung der Differenz der beiden Hauptspannungen des ebenen Spannungszustandes nicht mehr genau proportional.

Die zweite Art von Bildfehlern, die an die sphärische Aberration der Linsen erinnert, rührt daher, daß die Eintrittspupille des Aufnahmeobjektivs von endlicher Größe ist. Im folgenden sollen beide Fehler getrennt behandelt werden.

Abbildungsfehler infolge der schiefen Durchleuchtung

Ein am Bildaufbau beteiligter Strahl habe vor Eintritt in das Modell eine Richtung, die mit der optischen Achse den Winkel i (Abb. 2) einschließt. Beim Eintritt in das Modell wird der Strahl gebrochen und hat während des Durchganges durch das Modell eine Neigung i' zur optischen Achse. Wenn die durch die Querdehnung des Modells verursachte Dickenänderung vernachlässigt, und das Modell als ideal planparallel betrachtet wird, läuft der Strahl nach dem Austritt aus dem Modell wieder in der durch den Winkel i bestimmten Richtung weiter. Während des Durchganges durch das Modell hat sich der Strahl der optischen Achse um den Betrag $h = v \cdot \operatorname{tg} i'$ genähert ($v =$ Modelldicke). Mit den Bezeichnungen der Abb. 2 ($f =$ Brennweite des Aufnahmeobjektivs und $n =$ Brechungsindex des Modellwerkstoffes) und nach Ein-

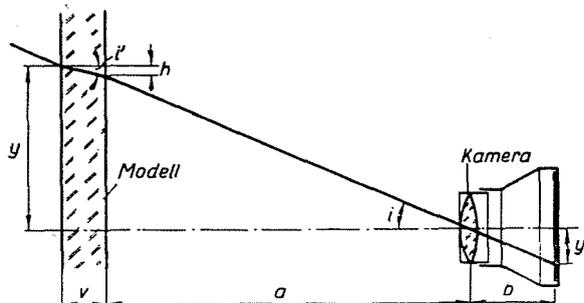


Abb. 2. Strahlengang durch das Modell bei schiefer Durchleuchtung

führung des Abbildungsmaßstabes $\beta = \frac{y_1}{y}$ ergibt sich die Größe h gemäß einer früheren Abhandlung des Verfassers [11] zu

$$h = v \frac{\frac{\sin i}{n}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}} = v \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2 f^2}{y^2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 + n^2 - 1}} \quad * \quad (1)$$

Der Brechungsindex der gebräuchlichen Modellwerkstoffe liegt um einen Wert von $n = 1,5$. Wird mit einer Kleinbildkamera mit Teleobjektiv gearbeitet, so ist $\beta = 0,1-0,2$ und $f = 10-20$ cm. Beträgt der Durchmesser der Polarisatoren 20 cm, so ist für den Rand des Bildfeldes $y = 10$ cm, sofern die optische Achse zentrisch zu den Polarisatoren steht. Mit diesen Werten hat das erste Glied unter der Quadratwurzel von Gleichung (1) eine Größenordnung von 100 gegenüber $n^2 - 1 = 1,25$. Somit kann das zweite und dritte Glied unter der Quadratwurzel vernachlässigt werden, und man erhält in guter Annäherung

$$h = \frac{vy}{n \cdot f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (2)$$

* Nach Abb. 2 ist nämlich, wenn h neben y vernachlässigt werden kann,

$$\beta = \frac{y_1}{y} = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \text{tg } i = \frac{y}{a}.$$

Aus der bekannten Linsengleichung folgt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right),$$

somit wird

$$\text{tg } i = \frac{y}{f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

und

$$\sin i = \frac{\text{tg } i}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 i}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{f^2}{y^2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 + 1}}.$$

Da überdies

$$h = v \text{tg } i' = v \frac{\sin i'}{\sqrt{1 - \sin^2 i'}}$$

und nach dem Brechungsgesetz

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = n,$$

ergibt sich aus obigen die Gleichung (1).

Unter extremen Bedingungen (Polarisator Durchmesser 30 cm, damit $y = 15$ cm, außerdem $f = 5$ cm, $\beta = 0,18$) beträgt der durch die obige Vernachlässigung begangene Fehler 5,6%.

Wegen der schiefen Durchleuchtung stehen die Hauptspannungen im Modell nicht mehr senkrecht zur Strahlenrichtung. Wie bekannt [3], erzeugen in diesem Fall nur die sogenannten »sekundären Hauptspannungen« jene Phasendifferenz des polarisierten Lichtstrahls, die im spannungsoptischen Bild in Form von Isochromaten sichtbar wird. Unter »sekundärer Hauptspannung«

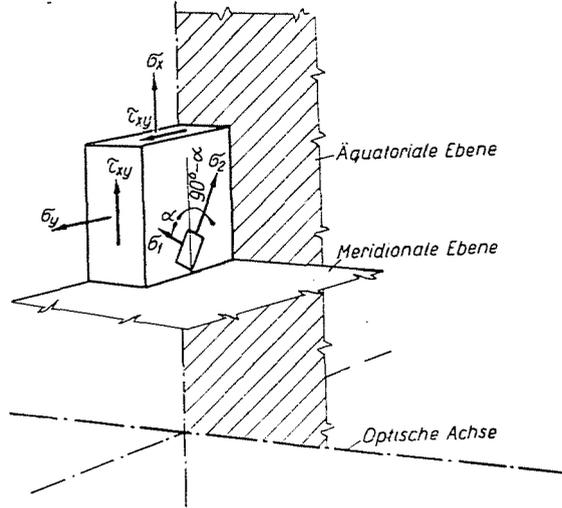


Abb. 3. Die Spannungskomponenten des ebenen Spannungszustandes und ihre Stellung zur optischen Achse

sind die Hauptspannungen σ_1' und σ_2' zu verstehen, die nach Art des ebenen Spannungszustandes aus den Spannungskomponenten σ_x ; σ_y ; τ_{xy} in der Ebene senkrecht zur Strahlrichtung gebildet werden.

Zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen den Hauptspannungen des ebenen Spannungszustandes und den sekundären Hauptspannungen werden zunächst die Spannungen in der zur optischen Achse äquatorialen und meridionalen Ebene berechnet (Abb. 3). Diese betragen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \sigma_x &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

In einer Ebene, die auf die äquatoriale Ebene senkrecht steht und mit der meridionalen Ebene den Winkel $90^\circ - i'$ bildet, herrschen die Spannungskomponenten (Abb. 4)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\eta &= \sigma_y \cos^2 i' \\ \sigma_\xi &= \sigma_x \\ \tau_{\xi\eta} &= \tau_{xy} \cos i' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

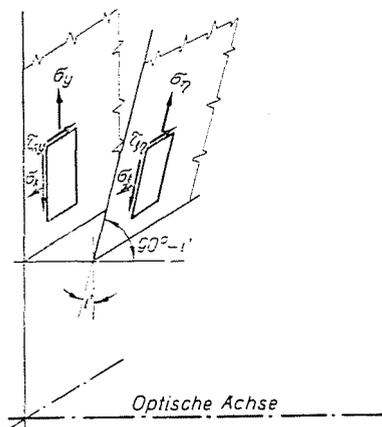


Abb. 4. Die Spannungskomponenten in der Ebene senkrecht zur Durchleuchtungsrichtung (»Sekundäre Hauptspannungen«)

Die Differenz der sekundären Hauptspannungen ergibt sich zu

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = \sqrt{(\sigma_\xi - \sigma_\eta)^2 + 4 \tau_{\xi\eta}^2} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y \cos^2 i')^2 + 4 \tau_{xy}^2 \cos^2 i'}. \quad (5)$$

Setzt man in (5) noch die Hauptspannungen gemäß (3) ein, so erhält man

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = \sqrt{\left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} (1 - \cos^2 i') + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} (1 + \cos^2 i') \cos 2\alpha \right]^2 + 4 \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \cos i' \right]^2}. \quad (6)$$

oder nach einigen Umwandlungen

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = \sqrt{\left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \right]^2 \sin^4 i' + 4 \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \cos^2 i' + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \sin^2 i' \cos 2\alpha \right]}. \quad (7)$$

Ist $\alpha = 0^\circ$, d. h. stehen die beiden Hauptspannungen in meridionaler bzw. äquatorialer Ebene zur optischen Achse, so vereinfachen sich die Gleichungen (6) und (7) auf

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = \sigma_1 - \sigma_2 \cos^2 i'. \quad (8)$$

Bei homogenem Spannungszustand beträgt die als die Isochromatenordnung in Erscheinung tretende Phasenverschiebung, die bei Durchleuchtung in der Normalenrichtung zur Modellfläche

$$m = \frac{c}{\lambda} v (\sigma_1 - \sigma_2)$$

beträgt, in diesem Falle

$$m^+ = \frac{c}{\lambda} v \frac{\sigma_1 - \sigma_2 \cos^2 i'}{\cos i'}. \quad (9)$$

Diese Formel hat schon DRUCKER [4] als Ausgangspunkt für die Trennung der Hauptspannungen durch schiefe Durchleuchtung benutzt. Hierin sind

- c = spannungsoptische Konstante,
- λ = Wellenlänge des Lichtes,
- v = Modelldicke.

In der Nähe der Spannungsspitzen kann der Spannungszustand selbst annähernd nicht als homogen betrachtet werden. Die resultierende Phasen-

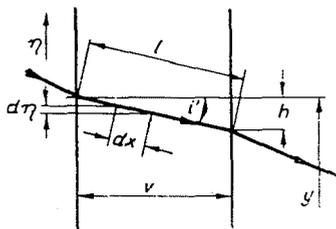


Abb. 5. Durchgang des schiefen Strahles durch das Modell

verschiebung kann in diesem Falle durch Integration der Phasenverschiebungswerte längs der Bahn eines Strahles durch das Modell ermittelt werden. Im allgemeinen Fall, in dem sich auch die Richtungen der Hauptspannungen längs des Durchgangsweges eines Strahles ändern, würden sich schwer zu behandelnde verwickelte Zusammenhänge ergeben. Da sich aber Spannungsspitzen oft auf Asymmetrieachsen des Modells und des Spannungszustandes befinden, kann angenommen werden, daß längs des Weges eines Strahles sich zwar die Größen der Hauptspannungen, nicht aber deren Richtungen ändern. Diese Annahme wird für Spannungsspitzen auf Symmetrieachsen genau, für Spannungsspitzen,

die nicht auf Symmetrieachsen liegen, wegen der relativen Kleinheit von h gegenüber den Modellabmessungen annähernd erfüllt. Unter obiger Voraussetzung ergibt sich mit den Bezeichnungen der Abb 5.

$$m^\circ = \frac{c}{\lambda} \int_0^l (\sigma'_1 - \sigma'_2) dx \quad (10)$$

oder wenn man $d\eta$ statt dx einführt, mit $d\eta = dx \sin i'$ oder $dx = \frac{d\eta}{\sin i'}$

$$m^\circ = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sin i'} \int_{y-h}^y (\sigma'_1 - \sigma'_2) d\eta \quad (11)$$

und da

$$\sin i' = \frac{h}{\sqrt{h^2 + v^2}} = \frac{\frac{h}{v}}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{v}\right)^2}},$$

(wie aus Abb. 5 ersichtlich), wird

$$m^\circ = \frac{c}{\lambda} v \sqrt{1 + \left(\frac{h}{v}\right)^2} \frac{1}{h} \int_{y-h}^y (\sigma'_1 - \sigma'_2) d\eta \quad (11a)$$

Falls die Hauptachsen des Spannungszustandes im Verhältnis zur optischen Achse in der meridionalen bzw. äquatorialen Ebene stehen, kann nach Gl. (8) $\sigma'_1 - \sigma'_2 = \sigma_1 - \sigma_2 \cos^2 i'$ gesetzt werden. Im allgemeinen Fall müssen zur Berechnung der sekundären Hauptspannungen die Gleichungen (6) oder (7) herangezogen werden. Nun ist aber der Winkel i im Interesse einer getreuen Abbildung nicht allzu groß, liegt vielmehr bei Benützung von Teleobjektiven zur Aufnahme auch an den Rändern des Bildfeldes praktisch nur um 10° herum. Damit ergibt sich bei einem Brechungsindex des Modellwerkstoffes von 1,5 der $\sin i'$ zu 0,1–0,12. Das hat zur Folge, daß alle Glieder in Gl. (7), die höhere Potenzen von $\sin i'$ enthalten, neben den Gliedern mit $\cos i'$ vernachlässigt werden können. Da für derart kleine Winkel mit guter Annäherung $\cos i' = 1$ gesetzt werden kann, erhält man aus Gl. (11a), wenn noch die Bezeichnung $\sigma_1 - \sigma_2 = S(\eta)$ eingeführt wird,

$$m^\circ = \frac{c}{\lambda} v \sqrt{1 + \left(\frac{h}{v}\right)^2} \frac{1}{h} \int_{y-h}^y S(\eta) d\eta \quad (11b)$$

Das Integral in Gl. (11b) kann in seine Taylorsche Reihe entwickelt werden. Diese lautet

$$\int_{y-h}^y S(\eta) d\eta = S(y) \frac{h}{1!} - S'(y) \frac{h^2}{2!} + S''(y) \frac{h^3}{3!} - \dots$$

Damit schreibt sich Gl. (11b) zu

$$m^{\circ} = \frac{c}{\lambda} v \sqrt{1 + \left(\frac{h}{v}\right)^2} \left[S(y) - S'(y) \frac{h}{2!} + S''(y) \frac{h^2}{3!} - \dots \right] \quad (11c)$$

Die Bedeutung der Gleichungen (11)–(11c) liegt darin, daß sie die höchste sichtbare Isochromatenordnung einer am (freien) Rande des Modells befind-

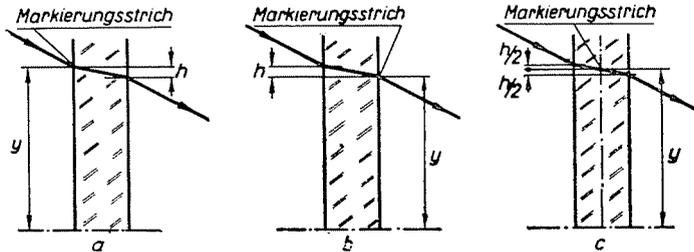


Abb. 6. Der Strahlengang durch das Modell, wenn sich der Markierungsstrich a) auf der Rückseite, b) auf der Vorderseite, c) auf der Mittelfläche des Modells befindet

lichen Spannungsspitze angeben. Der behandelte Fehler äußert sich nämlich darin, daß die Isochromaten gegenüber einem Isochromatenbild, das bei streng paralleler Durchleuchtung aufgenommen wurde, verschoben erscheinen.

An Punkten innerhalb der Modellfläche herrscht eine gewisse Unsicherheit hinsichtlich der Grenzen, zwischen denen die Integration [Gl. (11b)] auszuführen ist. Diese Unsicherheit hängt mit der Unsicherheit beim Scharfeinstellen des Modellbildes auf der Mattscheibe der Kamera zusammen. Da die außerhalb der optischen Achse der Kamera liegenden Konturen des Modells auf der Mattscheibe als Streifen von endlicher Breite erscheinen, die zudem nie gänzlich scharf eingestellt werden können, kann die Scharfeinstellung und das genaue Ausmessen der Modellfläche vom Lichtbild nur durch auf die Modelloberfläche aufgezeichnete Striche erfolgen. Sind diese Striche auf die der Kamera abgewandte Seite des Modells aufgetragen (Abb. 6a), so gelten als Grenzen der Integration y und $y-h$ gemäß Gl. (11). Sind die Striche auf der der Kamera zugekehrten Seite, dann gelten als Integrationsgrenzen $y+h$ und y . Da in diesem Fall (Abb. 6b)

$$\int_y^{y+h} S(\eta) d\eta = S(y) \frac{h}{1!} + S'(y) \frac{h^2}{2!} + S''(y) \frac{h^3}{3!} + \dots, \quad (12)$$

müßte Gl. (11c) entsprechend geändert werden.

Theoretisch am günstigsten wäre es, wenn sich die Striche auf der Mittelfläche des Modells anbringen ließen. In diesem Falle müßte man nämlich von $y - \frac{h}{2}$ bis $y + \frac{h}{2}$ integrieren (Abb. 6c), woraus sich

$$\int_{y - \frac{h}{2}}^{y + \frac{h}{2}} S(\eta) d\eta = S(y) \frac{h}{1! 2^0} + S''(y) \frac{h^3}{3! 2^2} + S^{IV}(y) \frac{h^5}{5! 2^4} + \dots \quad (13)$$

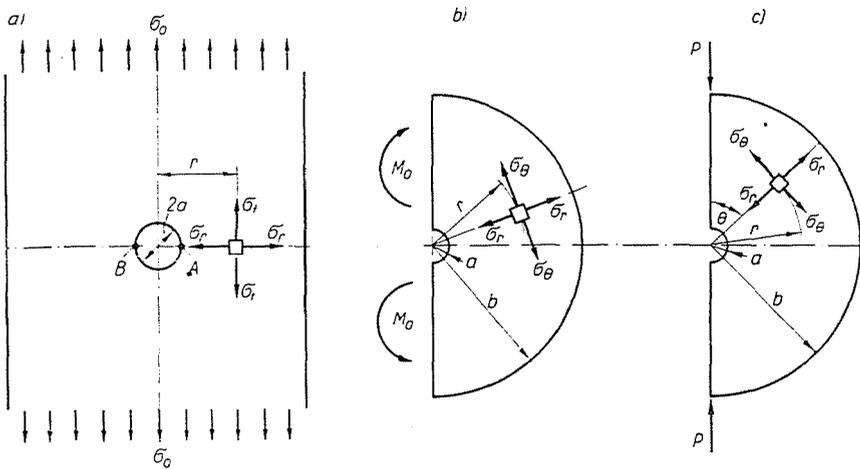


Abb. 7. Die untersuchten Spannungszustände

ergäbe. Hier sind die ungeraden Ableitungen von S herausgefallen. Wegen dieser Unbestimmtheit bleiben die folgenden Betrachtungen auf die Berechnung von Fehlern im Falle von Spannungsspitzen am freien Rand von Modellen beschränkt.

Um über die ziffernmäßige Größe der auftretenden Fehler Aufschluß zu erhalten, wurden einige Spannungszustände, deren analytische Lösung bekannt ist, mit Hilfe der Gl. (11)–(11c) ausgewertet. Die untersuchten Spannungszustände waren:

- a) Breiter flacher Zugstab mit zentraler Bohrung (Abb. 7a).
- b) Stark gekrümmter Biegestab konstanter Dicke mit reiner Momentbelastung (Abb. 7b).
- c) Stark gekrümmter Biegestab konstanter Dicke, der durch zwei auf einem Krümmungsdurchmesser liegende Kräfte belastet ist (Abb. 7c).

Im Fall a) dienen als Grundlage der Berechnung die bekannten Formeln von KIRSCH [12]. Nach diesen betragen die Spannungen für einen Punkt der senkrecht zur Zugrichtung liegenden Symmetrieebene

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t = \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[2 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] \sigma_0 \\ \sigma_r = \sigma_2 &= \frac{3}{2} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 - \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

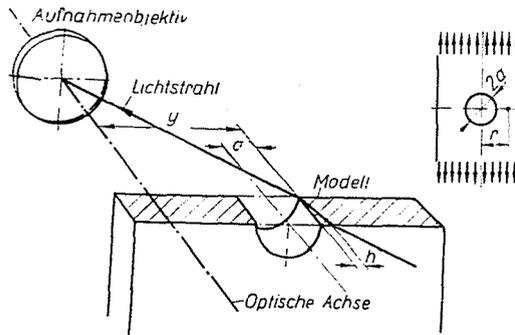


Abb. 8. Der Strahlengang durch ein Zugstabmodell mit Bohrung

wo σ_0 die reine Zugspannung im ungestörten Zugstab bedeutet. Da in dieser Ebene keine Schubspannungen auftreten, sind σ_t und σ_s Hauptspannungen. Die Differenz der Hauptspannungen beträgt demnach

$$S = (\sigma_t - \sigma_r) = \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]. \quad (15)$$

Die Stellung des Modells zur optischen Achse und die Strahlenrichtung zeigt Abb. 8. Die Spannungsspitze tritt in den Punkten B und A (Abb. 7a) auf. Da es sich hier um einen »inneren Rand« des Modells handelt, und die laufende Koordinate r , die hier an die Stelle von η tritt, vom Bohrungsmittelpunkt aus gerechnet wird, muß die Integration zwischen den Grenzen a und $a + h$ ausgeführt werden (Abb. 8). Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+h} \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right] dr = \\ & = \sigma_0 h \left[1 + \left(1 + \frac{a}{h} \right) \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a} \right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a} \right)^4} \right\} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

und

$$m^{\circ} = \frac{c}{\lambda} v \sqrt{1 + \left(\frac{h}{v}\right)^2} \sigma_0 \left[1 + \left(1 + \frac{a}{h}\right) \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^4} \right\} \right]. \quad (17)$$

Um nicht mit dimensionsbehafteten Gliedern arbeiten zu müssen, wird nicht die Phasenverschiebung, sondern der »scheinbare Kerbfaktor« d. h. das Verhältnis zwischen der höchsten sichtbaren und jener Isochromatenordnung, die unter sonst gleichen Umständen in einem ungestörten Zugstab auftreten würde, berechnet. Für die Isochromatenordnung in einem ungestörten Zugstab gilt

$$m_f = \frac{c}{\lambda} v \sigma_0,$$

woraus der scheinbare Kerbfaktor

$$\alpha_{ks} = \frac{m^{\circ}}{m_f} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{v}\right)^2} \left[1 + \left(1 + \frac{a}{h}\right) \left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^4} \right\} \right]. \quad (18)$$

Mit Hilfe dieser Formel wurde α_{ks} für verschiedene Werte von y (d. h. verschiedene Entfernung der untersuchten Spannungsspitze von der optischen Achse)

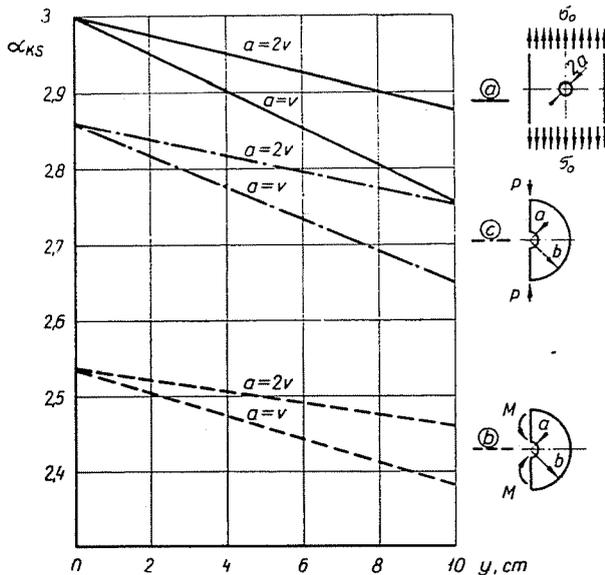


Abb. 9. Der scheinbare Kerbfaktor in Abhängigkeit vom Abstand der Spannungsspitze von der optischen Achse

für $f = 13,5$ cm, $n = 1,5$, $\beta = 0,12$ und für den Bohrungshalbmesser gleich der Modelldicke ($a = v$) bzw. gleich der doppelten Modelldicke ($a = 2v$) berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 9 in Abhängigkeit von y aufgetragen. Es wurde außerdem der relative Fehler gegenüber der parallelen Durchleuchtung

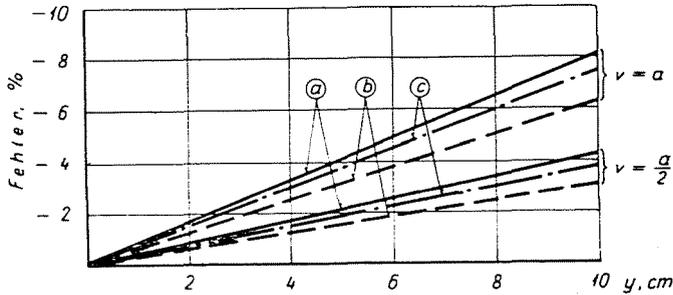


Abb. 10. Der prozentuale Fehler in Abhängigkeit vom Abstand der Spannungsspitze von der optischen Achse

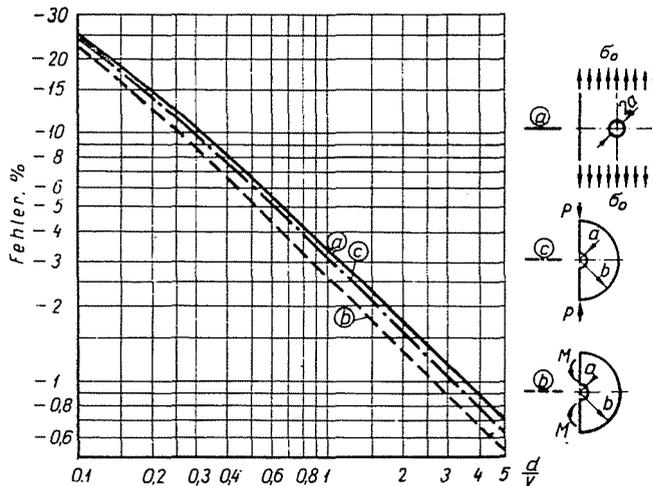


Abb. 11. Der prozentuale Fehler für $y = 4$ cm in Abhängigkeit vom Krümmungsradius des Modellkonturs an der Stelle der Spannungsspitze

ung berechnet und ebenfalls in Abhängigkeit von y für $a = v$ und $a = 2v$ in Abb. 10 aufgetragen. Da die Unterschiede zwischen den Kurven für $a = v$ und $a = 2v$ eine starke Abhängigkeit von dem Verhältnis zwischen der Modelldicke und dem Bohrungshalbmesser $\left(\frac{a}{v}\right)$ erwarten ließen, wurde in Abb. 11 für $y = 4$ cm der relative Fehler als Funktion von $\frac{a}{v}$ aufgetragen.

Im Fall b) (Abb. 7 b) ist die Lösung des Problems z. B. in [6] zu finden. Danach betragen die Hauptspannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 = \sigma_0 &= -\frac{4M}{N} \left[-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right] \\ \sigma_1 = \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left[\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

mit

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Die Bedeutung der Größen a , b und r ist aus Abb. 7b zu ersehen, M ist das auf 1 cm Modelldicke entfallende Biegemoment, und hat demnach die Dimension [cmkg/cm].

Die Hauptspannungsdifferenz ergibt sich zu

$$S = \sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{4M}{N} \left[2 \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2 \right]. \quad (20)$$

Die Spannungsspitze tritt am inneren Rand ($r = a$) auf. Da die laufende Koordinate r auch hier vom Krümmungsmittelpunkt ausgeht, muß wieder von a bis $a + h$ integriert werden.

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h} S dr &= \int_a^{a+h} -\frac{4M}{N} \left[2 \frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2 \right] dr = \\ &= -\frac{4M}{N} \left[-2 \frac{a^2 b^2}{r} \ln \frac{b}{a} - r(b^2 - a^2) \right]_a^{a+h} = \\ &= -\frac{4M}{N} \left[-2 a^2 b^2 \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right) \ln \frac{b}{a} - h(b^2 - a^2) \right] = \\ &= -\frac{4M}{N} b^2 h \left[\frac{2}{1 + \frac{h}{a}} \ln \frac{b}{a} - \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

womit man für die Phasenverschiebung

$$m^\circ = \frac{c}{\lambda} v \left[1 + \left(\frac{h}{v} \right)^2 \right] \left\{ \frac{-4M}{N} b^2 \left[\frac{2}{1 + \frac{h}{a}} \ln \frac{b}{a} - \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right] \right\} \quad (22)$$

erhält.

Auch hier wurde statt der Phasenverschiebung der scheinbare Kerbfaktor berechnet. Als Nennspannung wurde die Spannung an den Rändern eines geraden, im Querschnitt $b-a$ hohen und 1 cm breiten, rechteckigen Biegestabes angenommen, auf den das reine Biegemoment M wirkt. Die Phasenverschiebung beträgt in diesem Fall für den Rand des Biegestabes

$$m_v = \frac{c}{\lambda} v \sigma_r = \frac{c}{\lambda} v \frac{6 M}{a^2 \left(\frac{b}{a} - 1 \right)^2}.$$

Mit Hilfe dieser Größe wurde der scheinbare Kerbfaktor $a_{ks} = \frac{m^0}{m_v}$ für $\frac{b}{a} = 10$ in Abhängigkeit von γ für $a = v$ und $a = 2v$ berechnet und in Abb. 9 aufgetragen, während der relative Fehler ähnlich den vorigen in Abb. 10 bzw. Abb. 11 erscheint.

Im Fall c) des stark gekrümmten und längs eines Durchmessers mit zwei Einzelkräften P belasteten Balkens (Abb. 7c) betragen die Spannungskomponenten nach [6] (Seite 131)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{k} \left(r - \frac{a^2 + b^2}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^3} \right) \sin \Theta \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{k} \left(3r - \frac{a^2 + b^2}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^3} \right) \sin \Theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{k} \left(r - \frac{a^2 + b^2}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^3} \right) \cos \Theta \\ \text{mit } k &= a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

wobei als P die auf 1 cm Modelldicke entfallende Kraft (kg/cm) bezeichnet wird.

Für $\Theta = \frac{\pi}{2}$, d. h. für die Ebene senkrecht zur Krafrichtung verschwindet $\tau_{r\theta}$, so daß dort σ_r und σ_θ Hauptspannungen sind. Die Stelle der größten Spannung tritt in dieser Ebene am inneren Rand des Stabes auf. Für diese Ebene ergibt sich die Hauptspannungsdifferenz (da $\sin \Theta = 1$) zu

$$S = \sigma_r - \sigma_\theta = \frac{P}{k} \left(-2r + 2 \frac{a^2 b^2}{r^3} \right) = \frac{2P}{k} \left[\frac{a^2 b^2}{r^3} - r \right]. \quad (24)$$

Die Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h} S dr &= \int_a^{a+h} \frac{2P}{k} \left[\frac{a^2 b^2}{r^3} - r \right] dr = \frac{2P}{k} \left[-\frac{a^2 b^2}{2r^2} - \frac{r^2}{2} \right]_a^{a+h} = \\ &= \frac{2P}{k} \left[-\frac{a^2 b^2}{2} \left(\frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{1}{2} \langle (a+h)^2 - a^2 \rangle \right] = \quad (25) \\ &= \frac{2P}{k} \cdot h \cdot a \left(1 + \frac{h}{2a} \right) \left[\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a} \right)^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

während für die Phasenverschiebung

$$m^\circ = \frac{c}{\lambda} v \sqrt{1 + \left(\frac{h}{v} \right)^2} \frac{2Pa}{k} \left(1 + \frac{h}{2a} \right) \left[\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a} \right)^2} - 1 \right] \quad (26)$$

geschrieben werden kann. Um auch hier wieder den scheinbaren Kerbfaktor berechnen zu können, wurde als Nennspannung die größte Spannung in einem $b-a$ hohen und 1 cm dicken Biegestab eingeführt, der mit einem Biegemoment $M = P \frac{b+a}{2}$ gebogen und von der Längskraft P gedrückt wird. Sie beträgt

$$\sigma_v = \frac{P \frac{b+a}{2}}{\frac{(b-a)^2}{6}} + \frac{P}{b-a} = 2P \frac{2b+a}{(b-a)^2},$$

womit sich die höchste Isochromatenordnung zu

$$m_v = \frac{c}{\lambda} v \sigma_v = \frac{c}{\lambda} v \frac{2P(2b+a)}{(b-a)^2}$$

ergibt. Auch diesmal wurde der scheinbare Kerbfaktor $\alpha_{ks} = \frac{m^\circ}{m_v}$ für $\frac{b}{a} = 10$ berechnet. Die erhaltenen Werte sind in den Abb. 9–11 aufgetragen.

An Hand der Abbildungen 9–11 lassen sich nun einige Regeln aufstellen, bei deren Befolgung die Bildfehler klein gehalten werden können, u. zw.

1. Jene Partien des Modells, die ein starkes Spannungsgefälle zeigen, sollen möglichst in die Nähe der optischen Achse eingestellt werden. Für das

spannungsoptische Gerät bedeutet diese Forderung, daß entweder der Belastungsrahmen oder die Kamera in beiden Koordinatenrichtungen beweglich sein soll.

2. Die Modelldicke soll bei gegebenen Modellabmessungen möglichst klein gehalten werden; insbesondere soll die Modelldicke nicht größer als der kleinste Krümmungsradius des Modellumfanges sein, der sich an der Stelle der starken Spannungshäufung befindet. Um auch bei dünneren Modellen zur Erzielung einer genügenden Genauigkeit hohe Isochromatenordnungen erreichen zu können, müssen höhere Spannungen im Modell zugelassen werden. Damit die dabei auftretenden größeren Dehnungen das Modell nicht übermäßig verzerren, müssen Modellwerkstoffe angewendet werden, die eine hohe dehungsbezogene Isochromatenzahl [8] besitzen.

3. Die Größe der Abbildungsfehler hängt von der Größe h (Abb. 2) ab, die ihrerseits eine Funktion der Brennweite f des Aufnahmeobjektivs ist. Bei konstantem Abbildungsmaßstab β und bei konstanter Entfernung von der optischen Achse ist h laut Gl. (1) in dem für uns in Frage kommenden Bereich praktisch umgekehrt proportional der Brennweite f . Dieser Unterschied weist darauf hin, daß es im Interesse einer möglichst fehlerfreien Abbildung ratsam ist, mit Objektiven längerer Brennweite (Teleobjektiven) zu arbeiten, wie das bereits FÖPPL [2] empfohlen hat. Da außerdem in Gl. (1) der Fehler bei konstanter Modelldicke v und konstantem Abbildungsmaßstab β mit gleichfalls konstantem Quotienten $\frac{f}{y}$ konstant bleibt, andererseits aber der Größtwert von y um so größer sein kann, je größer der Polarisatordurchmesser ist, so folgt daraus, daß für größere Polarisatordurchmesser bei sonst gleichen Verhältnissen Objektive von längerer Brennweite benötigt werden, wenn die Abbildung über dem ganzen Bildfeld ausreichend getreu bleiben soll.

Abbildungsfehler infolge der endlichen Eintrittspupille des Aufnahmeobjektivs

Es soll im folgenden untersucht werden, welche Bildfehler auftreten, wenn Strahlen, die von einem Modellpunkt in verschiedene Richtungen ausgehen, in das Objektiv eintreten und auf der Platte bzw. Mattscheibe wieder in einem Punkt vereinigt werden. Als untersuchter Modellpunkt sei ein Punkt auf der optischen Achse gewählt. Abb. 12 zeigt die Verhältnisse der besseren Verständlichkeit halber stark verzerrt. Die Kamera sei auf die ihr zugekehrte Seite des Modells scharf eingestellt. Ein Lichtstrahl, der die vordere Hauptebene des Objektivs in einer Entfernung x von der optischen Achse trifft, tritt in einer Entfernung b von der optischen Achse in das Modell ein. Ganz analog zu der Größe h in Gl. (1) ergibt sich, wenn dort statt y (Entfernung von

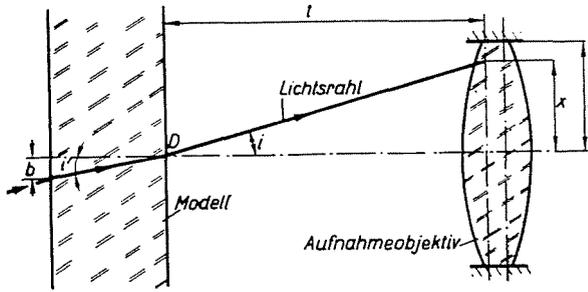


Abb. 12. Strahlengang durch das Modell bei einem Aufnahmeobjektiv endlicher Lichtstärke

der optischen Achse) die Größe x (Entfernung der optischen Achse vom Auftreffpunkt des Lichtstrahles auf die erste Hauptebene des Objektivs) gesetzt wird,

$$\frac{b}{v} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2 f^2}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 + n^2 - 1}}. \quad (27)$$

Setzt man ferner hier noch $x = \xi r_l$, und führt man die Lichtstärke des Objektivs $L = \frac{f}{2r_l}$ ein, erhält Gl. (27) die Form

$$b = \frac{v}{\sqrt{\frac{4 n^2 L^2}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 + n^2 - 1}} \approx \frac{\xi v}{2 n L \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}. \quad (27a)$$

Die Phasenverschiebung m° ergibt sich analog zur Gl. (11b) zu

$$m^\circ = \frac{c}{\lambda} v \sqrt{1 + \left(\frac{b}{v}\right)^2} \frac{1}{b} \int_0^b S(\eta) d\eta. \quad (28)$$

Wie aus Abb. 12 ersichtlich, können innerhalb bestimmter Grenzen Lichtstrahlen, die aus verschiedenen Richtungen kommen und durch den Punkt D des Modells hindurchgehen, das Objektiv erreichen. Da diese das Objektiv in verschiedenen Punkten treffen, ergeben sich für sie verschiedene Werte b . Dies führt dazu, daß Gl. (28) für die verschiedenen Strahlen verschiedene Werte von m° ergibt. Daß in einem Punkt Lichtstrahlen mit verschiedenen Phasenverschiebungen zusammentreffen, bedeutet aber, daß das Licht nicht mehr rein polarisiert ist. Nun wird aber von der lichtempfindlichen Schicht nicht der Polarisationszustand, sondern jene Beleuchtungsdichte registriert, die die

Schicht im untersuchten Punkte trifft. Um also auch diesen Abbildungsfehler zahlenmäßig erfassen zu können, genügt es nicht mehr, die Phasenverschiebung zu berechnen, sondern es muß die Leuchtdichte der einzelnen Strahlen berechnet und für alle Strahlen integriert werden.

Die Leuchtdichte eines durch Polarisatoren und Modell hindurchgegangenen Strahles ist, wenn die Isoklinen mit Hilfe von $\frac{\lambda}{4}$ -Blättchen ausgeschaltet werden, verhältnismäßig zu

$$I_a = I \sin^2(\pi m^\circ). \quad (29)$$

Hierin ist I eine von der Lichtquelle und der Lichtdurchlässigkeit von Polarisatoren, Modell, $\frac{\lambda}{4}$ -Blättchen und eventuellen Filtern abhängende Konstante, und m° die Phasenverschiebung. Um die Gesamtleuchtdichte in einem Punkt zu erhalten, müssen die Leuchtdichten über die ganze Eintrittspupille des Objektivs integriert werden:

$$I_{ag} = \int_F I \sin^2(\pi m^\circ) dF. \quad (30)$$

Im allgemeinen Fall dürfte diese Integration wohl kaum durchführbar sein. Eine Näherung führt jedoch zu einem Ausdruck, der besser zu behandeln ist.

Den Größtwert von b erhalten wir in einem bestimmten Fall, für die Randstrahlen, die eben noch abgebildet werden. Für diesen Fall ist $\xi = 1$, womit aus Gl. (27a)

$$\left(\frac{b}{v}\right)_{\max} \cong \frac{1}{2 n L \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (31)$$

wird. Um Aufschluß über die praktisch vorkommenden Werte von $\left(\frac{b}{v}\right)_{\max}$ zu erhalten, wurden sie für verschiedene Werte von β in Abhängigkeit von der Lichtstärke L für $n = 1,5$ berechnet und in Abb. 13 graphisch dargestellt.

Die Abbildung zeigt, daß $\left(\frac{b}{v}\right)_{\max}$ auch bei ganz geöffneter Blende eines lichtstarken Objektivs kaum den Wert 0,03 überschreitet und schon bei mäßiger Ablendung unter 0,02 sinkt. Für 1 cm Modelldicke ergibt dies für b den Wert von 0,3–0,2 mm. Für einen derartig kleinen Bereich kann man annähernd annehmen, daß die Isochromaten gerade Linien sind, d. h. daß sich die Hauptspannungsdifferenz nur in einer Koordinatenrichtung ändert. Fällt diese

Richtung mit der Papierebene in Abb. 12 zusammen, so schreibt sich Gl. (30) zu

$$I_{ag} = \int_{-r}^{+r} I \sin^2(\pi m^\circ) \sqrt{r_1^2 - x^2} dx. \quad (32)$$

Anhand dieser Formel wurde wieder der Fall eines breiten Zugstabes mit einer zentrischen Bohrung vom Durchmesser $2a$ behandelt, wobei zur numeri-

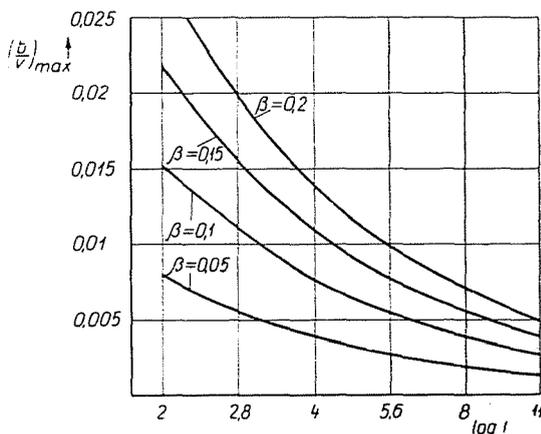


Abb. 13. Die Größe b/v in Abhängigkeit von der Lichtstärke

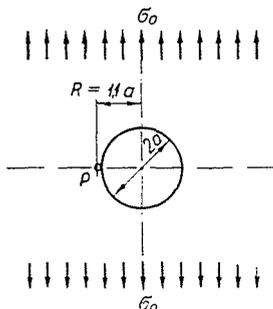


Abb. 14. Die Stelle P , für die die Leuchtdichte des Isochromatenbildes berechnet wurde

sehen Auswertung wieder die Formeln von KIRSCH benutzt wurden. Als Ausgangspunkt für die Berechnung galt die Annahme, daß durch den Punkt P in Abb. 14 der auf der senkrecht zur Zugrichtung verlaufenden Symmetrieachse in einer Entfernung $R = 1,1a$ vom Bohrungsmittelpunkt liegt, gerade die k -te dunkle Isochromatenlinie hindurchgeht. Mit Hilfe von Gl. (32) wurde die Leuchtdichte im Punkte P für verschiedene Werte von k und die Leuchtdichte der daneben liegenden nächst höheren, (der $\frac{2k+1}{2}$ -ten) halben

Isochromatenordnung entsprechenden, hellen Linie berechnet. Der Gang der Rechnung war folgender:

Die optische Achse gehe durch den Punkt P (Abb. 15). Die Phasenverschiebung eines Teilstrahles ergibt sich zu

mit

$$\left. \begin{aligned} m^\circ &= \frac{c}{\lambda} v \sqrt{1 + \left(\frac{b}{v}\right)^2} \frac{1}{b} \int^R S dr \\ S &= \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r}\right)^4 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

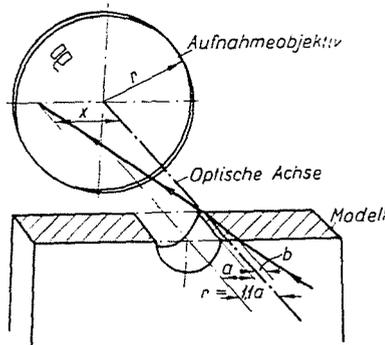


Abb. 15. Strahlengang durch ein Zugstabmodell mit Bohrung bei endlicher Lichtstärke des Objektivs

Nach Einführung der Bezeichnungen $\frac{a}{R} = z = 1,1$ und $\frac{b}{R} = \chi$ wird Gl. (33)

$$m^\circ = \frac{c}{\lambda} v \sqrt{1 + \left(\frac{b}{v}\right)^2} \sigma_0 \left[1 - z^2 \frac{1}{1 + \chi} + 3z^4 \frac{1 + \chi + \frac{1}{3}\chi^2}{(1 + \chi)^3} \right]. \quad (34)$$

Die zahlenmäßige Berechnung wurde für $a = 1$ cm, $v = 1$ cm, und $\frac{b}{v} = 0,02$

durchgeführt, wobei $\frac{c}{\lambda} \sigma_0$ so angenommen wurde, daß sich für m im Punkt P für $\chi = 0$ stets eine ganze Zahl ($m = k = 2; 3; 5; 8; 10; 15$) ergab. Die Integration nach Gl. (32) wurde graphisch durchgeführt. Als Ergebnis ist in Abb. 16 die Leuchtdichte im Punkt P (Stelle der dunklen Isochromatenlinie) und der daneben liegenden hellen Isochromatenlinie als Funktion der Isochromatenordnung im Punkt P aufgetragen, wobei der Proportionalitätsfaktor $I = \frac{1}{r^2 \pi}$ gesetzt wurde. Aus dem Diagramm geht hervor, daß der Unterschied in der Leucht-

dichte der hellen und dunklen Linien mit zunehmender Belastung (oder bei aktiveren Modellwerkstoffen) abnimmt und bei 15 Isochromatenordnungen nur noch ungefähr 15% des ursprünglichen Unterschiedes in der Leuchtdichte beträgt. Da aber in diesem Fall am Rande der Bohrung die 20,3-te Isochromatenordnung auftreten würde, kann gesagt werden, daß eine so hohe Isochromatenordnung in der Praxis wohl recht selten vorkommt, und würde durch hochaktive Modellwerkstoffe dieser Wert doch erreicht werden, kann durch geeignetes Abblenden der Schwund im Kontrast zwischen den hellen und dunklen Linien immer noch ausgeglichen werden.

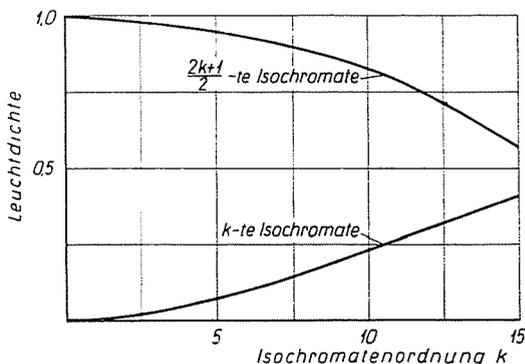


Abb. 16. Die Leuchtdichte im Punkte P und an der Stelle der danebenliegenden höheren halben Isochromatenlinie

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß der Abbildungsfehler durch die endliche Lichtstärke des Objektivs bei dicht liegenden Isochromaten in einer Abnahme des Kontrastes zwischen den hellen und dunklen Linien in Erscheinung tritt. Er ist jedoch weit weniger störend und durch Abblenden viel leichter zu beheben als der durch die schiefe Durchstrahlung verursachte Fehler. Dies um so mehr, als Objektive längerer Brennweite, die zur Kleinhaltung der Fehler durch die schiefe Durchleuchtung ohnehin benötigt werden, fast immer weniger lichtstark sind als die Normalobjektive der Kleinbildkameras.

Zusammenfassung

Der konvergente Strahlengang im einfachen spannungsoptischen Gerät bedingt Abbildungsfehler. Die eine Art dieser Fehler entsteht infolge des schiefen Durchgangs der am Bildaufbau beteiligten Strahlen durch das Modell, und äußert sich in einer Verschiebung der Isochromaten gegenüber jenen, die bei parallelem Licht aufgenommen wurden. Die andere Art der Bildfehler ist bedingt durch die endliche Lichtstärke des Aufnahmeobjektivs. Er hat die Abnahme des Helligkeitskontrastes zwischen hellen und dunklen Isochromatenlinien nach den höheren Isochromatenordnungen zur Folge. Für beide Bildfehler werden zahlenmäßige Zusammenhänge abgeleitet und diese an Hand einiger Zahlenbeispiele ausgewertet.

Schrifttum

1. HILTSCHER: Polarisationsoptische Untersuchung des räumlichen Spannungszustandes im konvergenten Licht. *Forschung* **9**, 2. 91—103 (1938).
2. L. FÖPPL—MÜLLER-LUFFT: Spannungsoptische Einrichtung mit Polarisationsfiltern. *ATM V* 137—1 (1939).
3. FROCHT: Photoelasticity, John Wiley & Sons, New York, 1941—48.
4. DRUCKER: Photoelastic Separation of Principal Stresses by Oblique Incidence, Jr. *Appl. Mech.* September (1943).
5. L. FÖPPL—MÖNCH: Praktische Spannungsoptik. Springer, Berlin, 1950.
6. BEZUHOV: Bevezetés a rugalmasságtanba és a képlékenységtanba (Einführung in die Elastizitäts- und Plastizitätstheorie). Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
7. HEYWOOD: Designing by Photoelasticity, Chapman & Hall, London, 1952.
8. HILTSCHER: Gütebeurteilung spannungsoptischer Modellwerkstoffe, *Forschung* **20**, 66—76 (1954).
9. MÖNCH—FICKER: Ein Polariskop von großem Gesichtsfeld für die Spannungsoptik mit einigen technischen Neuerungen, *Forschung* **23**, 1/2, 61—64 (1957).
10. MACEK: Fortschritte der Spannungsoptik. *ATM. V* 1371—2. 189—192 (1957).
11. THAMM, F.: Egyszerű optikai feszültségvizsgáló berendezés (Eine einfache spannungsoptische Apparatur). *Mérés és Automatika* **7/8** (1958).
12. KIRSCH: Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre *VDI 797—807* (1898).

F. THAMM, Budapest XI. Műegyetem rakpart 3. Ungarn.