ANWENDUNG DER MATRIZENRECHNUNG ZUR UNTERSUCHUNG VON SYSTEMEN ALLGEMEINER, EXPLIZITER, GEWÖHNLICHER DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN n-TER ORDNUNG

Von

P. BAJCSAY

Lehrstuhl für Mathematik (V.) der Technischen Universität, Budapest, Fakultät für Maschineningenieure

(Eingegangen am 5. Oktober 1959)

I. Das Anfangswertproblem

1. Iterationsverfahren zur Lösung allgemeiner (nichtlinearer) Differentialgleichungssysteme

Es sei das System von Differentialgleichungen[1]

$$y_i^{(n)} = f_i\,(x\,; y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)})\,; i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (1.1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_i^{(\nu)}(x_0) = y_{i0}^{(\nu)}, \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,; \quad i = 1, 2, \ldots, m\,; (y_{i0}^{(0)} = y_{i0}) \qquad (1.2)$$

gegeben.

Wir setzen voraus, daß die Funktionen f_i der Gleichungen (1.1) in dem abgeschlossenen, $(mn+1)$-dimensionalen Bereich

$$|x - x_0| \leqq a\,, |y_i^{(\nu)} - y_{i0}^{(\nu)}| \leqq b\,; (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,; \quad i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1.3)$$

hinsichtlich der Variablen x stetig (daher auch beschränkt) und nach den übrigen Argumenten mindestens dreimal stetig differenzierbar seien.[2]

Die Funktionen f_i wollen wir in linearer Näherung der Argumente $y_\mu^{(\nu)}$ und der entsprechenden Abweichungen g_i darstellen. Somit wird

$$\begin{aligned} y_i^{(n)} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{i,\mu\nu}(x)\, y_\mu^{(\nu)} + b_i(x) + \\ + g_i\,(x\,; y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)})\,; i = 1, 2, \ldots, m\,; \end{aligned} \qquad (1.4)$$

[1] Ist speziell $m = 1$, besteht (1.1) offenbar aus einer einzigen expliziten Differentialgleichung n-ter Ordnung.

[2] Offenbar genügt auch die Voraussetzung, die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion f_i seien stetig (und daher beschränkt) und erfüllten bezüglich der Argumente $y_i^{(\nu)}$, $\nu = 0,1,2,\ldots, n-1$, die Lipschitz-Bedingung mit derselben Lipschitz-Konstante L.

wobei nach der Taylorschen Entwicklung

$$a_{i,\mu\nu}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial y_\mu^{(\nu)}}(x; y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{m0}, \ldots, y_{10}^{(n-1)}, y_{20}^{(n-1)}, \ldots, y_{m0}^{(n-1)})$$

und

$$b_i(x) = f_i(x; y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{m0}, \ldots, y_{10}^{(n-1)}, y_{20}^{(n-1)}, \ldots, y_{m0}^{(n-1)}) - \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{i,\mu\nu}\, y_{\mu 0}^{(\nu)}$$

ist.

Nach Einführung der Bezeichnungen:

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_i(x) = \begin{bmatrix} y_i(x) \\ y_i^{(1)}(x) \\ y_i^{(2)}(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_i^{(n-2)}(x) \\ y_i^{(n-1)}(x) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{ik}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i,k0}(x) & a_{i,k1}(x) & \ldots & a_{i,k(n-1)}(x) \end{bmatrix}, \quad \text{wenn } i \neq k,$$

$$\mathbf{A}_{ii}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_{i,i0}(x) & a_{i,i1}(x) & a_{i,i2}(x) & a_{i,i3}(x) & \ldots & a_{i,i(n-2)}(x) & a_{i,i(n-1)}(x) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{b}_i(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b_i(x) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}_i(x; \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_m) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ g_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m^{(n-1)}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_{i0} = \mathbf{z}_i(x_0);$$

ferner

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{z}_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(x) & \mathbf{A}_{12}(x) & \dots & \mathbf{A}_{1m}(x) \\ \mathbf{A}_{21}(x) & \mathbf{A}_{22}(x) & \dots & \mathbf{A}_{2m}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{A}_{m1}(x) & \mathbf{A}_{m2}(x) & \dots & \mathbf{A}_{mm}(x) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(x) \\ \mathbf{b}_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_m(x) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}(x\,;\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(x\,;\,\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m) \\ \mathbf{g}_2(x\,;\,\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{g}_m(x\,;\,\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(x_0),$$

kann das System der Differentialgleichungen (1.4) in der Form

$$\frac{d}{dx}\,\mathbf{z} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{z} + \mathbf{b}(x) + \mathbf{g}(x\,;\mathbf{z}) \tag{1.5}$$

und die Anfangsbedingungen (1.2) zu

$$\mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_0 \tag{1.6}$$

geschrieben werden.

Zur Bestimmung der Lösung der Matrizendifferentialgleichung (1.5) mit der Anfangsbedingung (1.6) bilden wir die folgende Iterationsreihe:

$$\frac{d}{dx}\,\mathbf{z}_{(1)} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{z}_{(1)} + \mathbf{b}(x)\,; \qquad \mathbf{z}_{(1)}(x_0) = \mathbf{z}_0$$

$$\frac{d}{dx}\,\mathbf{z}_{(k)} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{z}_{(k)} + \{\mathbf{b}(x) + \mathbf{g}(x\,;\mathbf{z}_{(k-1)}(x))\}; \quad \mathbf{z}_{(k)}(x_0) = \mathbf{z}_0; \quad k \geqq 2. \tag{1.7}$$

Vermöge der Resolvente

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\,|_{x_0}^{x} = \mathbf{E} &+ \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi_1)\,d\xi_1 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi_2 + \\ &+ \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi_3) \int_{x_0}^{\xi_3} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3 + \dots \end{aligned} \tag{1.8}$$ [3]

[3] Hierbei bedeutet $\mathbf{E} = \langle 1,1, \dots, 1 \rangle$ die Einheitsmatrix, deren Ordnung mit derjenigen von $\mathbf{A}(x)$ übereinstimmt.

können die Lösungen der Differentialgleichungen (1.7) folgendermaßen dargestellt werden:[4]

$$\mathbf{z}_{(1)}(x) = \mathbf{M}\Big|_{x_0}^{x} \Big\{\mathbf{z}_0 + \int_{x_0}^{x} (\mathbf{M}\Big|_{x_0}^{\xi})^{-1}\, \mathbf{b}(\xi)\, d\xi\Big\},$$

$$\mathbf{z}_{(k)}(x) = \mathbf{M}\Big|_{x_0}^{x} \Big\{\mathbf{z}_0 + \int_{x_0}^{x} (\mathbf{M}\Big|_{x_0}^{\xi})^{-1}\, [\mathbf{b}(\xi) + \mathbf{g}(\xi\,; \mathbf{z}_{(k-1)}(\xi))]\, d\xi\Big\}. \qquad (1.9)^5$$

2. *Beweis der Konvergenz der angeführten Iterationsmethode*

Die Folge (1.9) der Spaltenmatrizen $\mathbf{z}_{(k)}(x)$ konvergiert im beschränkten Teilintervall $|x - x_0| < \alpha \leq a$ gleichmäßig gegen die Lösung der Matrizendifferentialgleichung (1.5), d. h.

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{z}_{(k)}(x) = \mathbf{z}(x), \qquad (2.1)$$

wobei

$$\alpha = \min\left(a, \frac{\sqrt{mn}\, b - (e^{aG(\mathbf{A})} - 1)\,\beta}{A + B}\, e^{-2aG(\mathbf{A})}\right). \qquad (2.2)$$

Im folgenden wollen wir mit $G(\mathbf{A})$ das Maximum der sogenannten G-Norm der Matrix $\mathbf{A}(x)$ im abgeschlossenen Intervall $|x - x_0| \leq a$ bezeichnen.[6]

[4] Siehe z. B. [1] S. 141.

[5] Eine zur praktischen Behandlung der Systeme gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten geeignete Iterationsmethode ist z. B. in [2] angegeben.

[6] Die G-Norm einer Matrix $\mathbf{K}$ wird durch $G(\mathbf{K}) \geq |\mathbf{Ke}|$ definiert, wobei $\mathbf{e}$ ein beliebiger Einheitsvektor ist. Diese G-Norm besitzt folgende Eigenschaften:

$$G(\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2) \leq G(\mathbf{K}_1)\, G(\mathbf{K}_2),$$

$$G(\mathbf{K}_1 \pm \mathbf{K}_2) \leq G(\mathbf{K}_1) + G(\mathbf{K}_2),$$

$$G(\mathbf{K}) \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N} |K_{ij}|^2},$$

wobei K_{ij} ein beliebiges Element der Matrix $\mathbf{K}$, und N ihre Ordnungszahl ist. Es gilt

$M \geq |K_{ij}|;\ i, j = 1,2, \ldots, N$ und $M \leq G(\mathbf{K}) \leq NM$. (Vgl. z. B. [3] S. 38.)

Unter dem Betrag einer beliebigen N-reihigen Spaltenmatrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}$$

verstehen wir das Folgende:

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |c_i|^2} \leq \sqrt{N}\, C,$$

wobei $|c_i| \leq C$.

Aus der Definition (1.8) der Resolvente $\mathbf{M}|_{x_0}^{x}$ folgt, daß

$$G\,(\mathbf{M}|_{x_0}^{x}) \leqq e^{G(\mathbf{A})|x-x_0|} < e^{G(\mathbf{A})\alpha} \leqq e^{G(\mathbf{A})a}, \tag{2.3}$$

Die Resolvente $\mathbf{M}|_{x_0}^{x}$ besitzt — unter anderen — folgende Eigenschaften:

1. $\mathbf{M}|_{x_0}^{x_0} = \mathbf{E}$.

2. Aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Elemente der Matrix $\mathbf{A}(x)$ folgt, daß $\mathbf{M}|_{x_0}^{x}$ nichtsingulär ist, d. h. ein Reziprokes besitzt.

3. Die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\,\mathbf{y} = \mathbf{A}\,(x)\,\mathbf{y};\ \ \mathbf{y}\,(x_0) = \mathbf{y}_0$$

läßt sich in der Form

$$\mathbf{y}\,(x) = \mathbf{M}|_{x_0}^{x}\,\mathbf{y}\,(x_0)$$

darstellen. Hieraus ergibt sich

$$\mathbf{y}\,(x_0) = \mathbf{M}|_{x}^{x_0}\,\mathbf{y}\,(x),$$

also

$$\mathbf{M}|_{x_0}^{x}\,\mathbf{M}|_{x}^{x_0} = \mathbf{E},$$

d. h.

$$(\mathbf{M}|_{x_0}^{x})^{-1} = \mathbf{M}|_{x}^{x_0}. \tag{2.4}$$

Aus den Gleichungen (1.8) und (2.4) ist leicht einzusehen, daß

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}|_{x_0}^{x})^{-1} = \mathbf{E} - \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}\,(\xi_1)\,d\xi_1 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}\,(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}\,(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi_2 - \\ - \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}\,(\xi_3) \int_{x_0}^{\xi_3} \mathbf{A}\,(\xi_2) \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}\,(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3 + - \cdots.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Daraus folgt aber

$$G\left[(\mathbf{M}|_{x_0}^{x})^{-1}\right] \leqq e^{G(\mathbf{A})|x-x_0|} < e^{G(\mathbf{A})\alpha} \leqq e^{G(\mathbf{A})a}. \tag{2.6}$$

Auf Grund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit der Funktionen f_i im Bereich (1.3) gilt offensichtlich

$$\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}\,\partial y_\mu^{(\nu)}}\right| \leqq L; \qquad \left|\frac{\partial^3 f_i}{\partial y_\varkappa^{(\lambda)}\,\partial y_\mu^{(\nu)}\,\partial y_\varrho^{(\sigma)}}\right| \leqq L, \tag{2.7}$$

wobei L eine positive Konstante ist.

Da $\mathbf{g}$ höchstens m von Null verschiedene Elemente besitzt, gilt

$$|\mathbf{g}(x;\mathbf{z})| \leqq \frac{\sqrt{m}}{2} L\,(mnb)^2 = A. \tag{2.8}$$

Da ferner

$$\left|\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{z}}\right| = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\frac{\partial g_i}{\partial y_\mu^{(\nu)}}\right|^2} \leqq \frac{\sqrt{mn}}{2\,!} L\left\{(mn+1)\,b + (mnb)^2\right\} = \frac{M}{\sqrt{m}}, \tag{2.9}$$

(wobei M eine geeignete Konstante ist), gilt

$$|\mathbf{g}(x;\tilde{\mathbf{z}}) - \mathbf{g}(x;\mathbf{z})| \leqq M\,|\tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{z}|. \tag{2.10}$$

Wir setzen endlich voraus, daß im Bereich (1.3)

$$|\mathbf{b}(x)| \leqq B, \qquad (2.11)\,; \qquad \text{und} \qquad |\mathbf{z}_0| \leqq \beta. \tag{2.12}$$

Auf Grund der angegebenen Beziehungen gelten nun folgende Abschätzungen:

$$|\mathbf{z}_{(1)}(x) - \mathbf{z}_0| = \left|(\mathbf{M}|_{x_0}^{x} - \mathbf{E})\,\mathbf{z}_0 + \mathbf{M}|_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(\mathbf{M}|_{x_0}^{\xi})^{-1}\,\mathbf{b}(\xi)\,d\xi\right| \leqq$$
$$\leqq (e^{aG(A)} - 1)\,\beta + e^{2aG(A)}\,B\,|x - x_0|; \tag{2.13}$$

$$|\mathbf{z}_{(k)}(x) - \mathbf{z}_{(k-1)}(x)| = \left|\mathbf{M}|_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(\mathbf{M}|_{x_0}^{\xi})^{-1}\left[\mathbf{g}(\xi;\mathbf{z}_{(k-1)}(\xi)) - \mathbf{g}(\xi;\mathbf{z}_{(k-2)}(\xi))\right]d\xi\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{A}{M}\,\frac{(Me^{2aG(A)}\,|x - x_0|)^{k-1}}{(k-1)\,!} = u_k; \quad k \geqq 2. \tag{2.14}$$

Da

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = Me^{2aG(A)}\,\frac{|x - x_0|}{k} = 0, \tag{2.15}$$

so ist offenbar die Reihe

$$\mathbf{z}_0 + (\mathbf{z}_{(1)}(x) - \mathbf{z}_0) + (\mathbf{z}_{(2)}(x) - \mathbf{z}_{(1)}(x)) + (\mathbf{z}_{(3)}(x) - \mathbf{z}_{(2)}(x)) + \ldots \tag{2.16}$$

im Intervall $|x - x_0| < a$ absolut und gleichmäßig konvergent. Die Summe dieser unendlichen Reihe ist aber nichts anderes als $\lim_{k\to\infty} \mathbf{z}_{(k)}(x)$. Daher existiert gewiß

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{z}_{(k)}(x) = \mathbf{z}(x), \tag{2.17}$$

für $|x-x_0|<a$, und diese Spaltenmatrix-Funktion ist stetig. Aus der vorausgesetzten (2.10) Stetigkeit von $\mathbf{g}$ folgt aber, daß

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{g}\left(x\,;\,\mathbf{z}_{(k)}(x)\right)=\mathbf{g}\left(x\,;\,\mathbf{z}\,(x)\right). \tag{2.18}$$

Somit ist für $|\,x-x_0\,|<a$

$$\mathbf{z}\,(x)=\mathbf{M}|_{x_0}^{x}\Big\{\mathbf{z}_0+\int_{x_0}^{x}(\mathbf{M}|_{x_0}^{\xi})^{-1}\left[\mathbf{b}\,(\xi)+\mathbf{g}\left(\xi\,;\,\mathbf{z}\,(\xi)\right)\right]d\xi\Big\}. \tag{2.19}$$

Da infolge der Stetigkeit des Integranden, die rechte, also auch die linke Seite von (2.19) gewiß nach x differenzierbar ist, gilt

$$\frac{d}{dx}\mathbf{z}\,(x)=\mathbf{A}(x)\,\mathbf{M}|_{x_0}^{x}\Big\{\mathbf{z}_0+\int_{x_0}^{x}(\mathbf{M}|_{x_0}^{\xi})^{-1}\left[\mathbf{b}\,(\xi)+\mathbf{g}\left(\xi\,;\,\mathbf{z}\,(\xi)\right)\right]d\xi\Big\}+$$

$$+\,\mathbf{M}|_{x_0}^{x}\,(\mathbf{M}|_{x_0}^{x})^{-1}\left[\mathbf{b}\,(x)+\mathbf{g}\left(x\,;\,\mathbf{z}\,(x)\right)\right]=\mathbf{A}(x)\,\mathbf{z}(x)+\mathbf{b}(x)+\mathbf{g}(x\,;\,\mathbf{z}(x));$$

ferner

$$\mathbf{z}\,(x_0)=\mathbf{z}_0,$$

d. h. (2.19) erfüllt die Differentialgleichung (1.5) und die Anfangsbedingung (1.6).

Da für $|\,x-x_0\,|<a$ und jedes k

$$|\,\mathbf{z}_{(k)}(x)-\mathbf{z}_0\,|=\Big|\,(\mathbf{M}|_{x_0}^{x}-\mathbf{E})\,\mathbf{z}_0+\mathbf{M}|_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(\mathbf{M}|_{x_0}^{\xi})^{-1}\left[\mathbf{b}(\xi)+\mathbf{g}\left(\xi;\mathbf{z}_{(k-1)}\,(\xi)\right)\right]d\xi\,\Big|\leqq$$

$$\leqq(e^{aG(\mathbf{A})}-1)\,\beta+e^{2aG(\mathbf{A})}\,(A+B)\,|\,x-x_0\,|<$$

$$<(e^{aG(\mathbf{A})}-1)\,\beta+e^{2aG(\mathbf{A})}(A+B)\,a\leqq\sqrt{mn}\;b$$

ist, so gilt (2.2).

Der beim k-ten Iterationsschritt auftretende Fehler der Näherungslösung kann auf Grund der Beziehung (2.14) abgeschätzt werden:

$$|\,\mathbf{z}(x)-\mathbf{z}_{(k)}(x)\,|\leqq\frac{A}{M}\sum_{\varkappa=k}^{\infty}\frac{(Me^{2aG(\mathbf{A})}\,|\,x-x_0\,|\,)^{\varkappa}}{\varkappa\,!}<$$

$$<\frac{A}{M}\,\frac{(Ma\,e^{2aG(\mathbf{A})})^{k}}{k\,!}\,\frac{k+1}{k+1-Ma\,e^{2aG(\mathbf{A})}}\,, \tag{2,20}$$

falls $|\,x-x_0\,|<a$ und $k+1>Ma\,e^{2aG(\mathbf{A})}$ ist.

II. Das allgemeine Anfangswertproblem[7]

3. *Anwendung der angegebenen Iterationsmethode zur Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems*

Das angegebene Iterationsverfahren ist auch zur Lösung des folgenden allgemeinen Anfangswertproblems geeignet.

Es sei die Matrizendifferentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\mathbf{z} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{z} + \mathbf{b}(x) + \mathbf{g}(x;\mathbf{z}) \tag{1.5}$$

mit den vorgeschriebenen (inhomogenen) Bedingungen

$$\mathbf{e}^*_{a_i}\,\mathbf{z}(x_i) = z_{i0}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, mn \tag{3.1}$$

zu lösen. Dabei ist

$$\mathbf{e}^*_{a_i} = \left[\underset{\hat{1}}{0},\ \underset{\hat{2}}{0},\ \ldots,\ \underset{\widehat{a_i-1}}{0},\ \underset{\hat{a}_i}{1},\ \underset{\widehat{a_i+1}}{0},\ \ldots,\ \underset{\widehat{mn}}{0}\right], \tag{3.2}$$

mit ganzzahligen, nicht notwendigerweise verschiedenen a_i,[8] und es gelte

$$-a \leqq x_i \leqq a\,.$$

Die die Bedingungen (3.1) erfüllende Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\mathbf{z} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{z} + \mathbf{f}(x) \tag{3.3}$$

wird bekanntlich[9] durch die Summe der Lösungen dargestellt, die der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\mathbf{z}_h = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{z}_h \tag{3,4}$$

[7] Die Bedingungen, bei denen die unbekannten Funktionen bzw. ihre Ableitungen (d. h. die entsprechenden Elemente der unbekannten Spaltenmatrix) bei verschiedenen gegebenen Werten der unabhängigen Veränderlichen vorgeschrieben sind, nennen wir im folgenden »allgemeine« Anfangsbedingungen. (Die allgemeinen Anfangsbedingungen können daher auch die sogenannten Randbedingungen enthalten.)

[8] Unter den Werten x_i können auch gleiche sein, wenn aber alle x_i gleich sind, dann müssen alle a_i verschieden sein, und umgekehrt.

[9] Siehe [4].

mit den inhomogenen Bedingungen

$$\mathbf{e}^*_{a_i}\,\mathbf{z}_h(x_i) = \mathbf{z}_{i0}\,,\quad i = 1, 2, \ldots, mn \tag{3.5}$$

und zur inhomogenen Differentialgleichung (3.3), mit den homogenen Bedingungen

$$\mathbf{e}^*_{a_i}\,\mathbf{z}(x_i) = 0\,,\quad i = 1, 2, \ldots, mn \tag{3,6}$$

zugehören.

Diese Aufgabe ist dann — und nur dann — eindeutig lösbar, wenn die Matrix der — nach (1.8) definierten — Resolventen

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*_{a_1}\;\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x_1} \\ \mathbf{e}^*_{a_2}\;\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}^*_{a_{mn}}\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x_{mn}} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$ [10]

nichtsingulär ($\det \mathbf{X} \neq 0$), also auch das Reziproke $\mathbf{X}^{-1}$ vorhanden ist.

Führen wir noch die Bezeichnungen

$$\bar{\mathbf{z}}_0 = \begin{bmatrix} z_{10} \\ \\ z_{20} \\ \vdots \\ z_{mn0} \end{bmatrix};\quad \bar{\mathbf{z}}(x;\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*_{a_1}\,\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x_1} \int\limits_{x_1}^{x} (\mathbf{M}\big|_{x_0}^{\xi})^{-1}\,\mathbf{f}(\xi)\,d\xi \\ \mathbf{e}^*_{a_2}\,\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x_2} \int\limits_{x_2}^{x} (\mathbf{M}\big|_{x_0}^{\xi})^{-1}\,\mathbf{f}(\xi)\,d\xi \\ \vdots \\ \mathbf{e}^*_{a_{mn}}\,\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x_{mn}} \int\limits_{x_{mn}}^{x} (\mathbf{M}\big|_{x_0}^{\xi})^{-1}\,\mathbf{f}(\xi)\,d\xi \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

ein, so wird die Lösung der Differentialgleichung (3.3), die den Bedingungen (3.1) Folge leistet, durch die Gleichung

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{M}\big|_{x_0}^{x}\,\mathbf{X}^{-1}\left\{\bar{\mathbf{z}}_0 + \bar{\mathbf{z}}(x;\mathbf{f})\right\} \tag{3.9}$$ [11]

dargestellt.

[10] $x_0 \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, mn$; $-a \leqq x_0 \leqq a$.

[11] (3.9) erfüllt die Differentialgleichung (3.3), da

$$\frac{d}{dx}\,\mathbf{z}(x) = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x}\,\mathbf{X}^{-1}\left\{\bar{\mathbf{z}}_0 + \bar{\mathbf{z}}(x;\mathbf{f})\right\} + \mathbf{M}\big|_{x_0}^{x}\,\mathbf{X}^{-1}\,\mathbf{X}\,(\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x})^{-1}\,\mathbf{f}(x) = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{z}(x) + \mathbf{f}(x)\,;$$

und erfüllt auch die Bedingungen (3.1), da

$$\mathbf{e}^*_{a_i}\,\mathbf{z}(x_i) = \mathbf{e}^*_{a_i}\,\mathbf{M}\big|_{x_0}^{x}\,\mathbf{X}^{-1}\left\{\bar{\mathbf{z}}_0 + \bar{\mathbf{z}}(x_i;\mathbf{f})\right\} = \mathbf{e}^*_i\,\bar{\mathbf{z}}_0 = z_{i0}\,;\; i = 1, 2, \ldots, mn.$$

Da unser Iterationsverfahren (Punkt 1) sich darauf gründet, daß die einzelnen Differentialgleichungen der Iterationsreihe (1.7) inhomogene lineare Differentialgleichungen sind, ist die durch (3.9) angegebene Formel auch zur Lösung der Differentialgleichung (1.5) mit den Bedingungen (3.1) anwendbar. Somit erhält man die Lösung dieser Aufgabe als Grenzwert der Folge

$$\begin{gathered}\mathbf{z}_{(1)}(x) = \mathbf{M}|_{x_0}^{x}\mathbf{X}^{-1}\{\mathbf{z}_0 + \bar{\mathbf{z}}\,(x;\mathbf{b})\}\\ \mathbf{z}_{(k)}(x) = \mathbf{M}|_{x_0}^{x}\mathbf{X}^{-1}\{\bar{\mathbf{z}}_0 + \bar{\mathbf{z}}(x;\mathbf{b}+\mathbf{g}\,(\mathbf{z}_{(k-1)}))\}, \qquad k \geq 2\,,\end{gathered} \tag{3.10}$$

mit

$$\bar{\mathbf{z}}(x;\mathbf{b}+\mathbf{g}\,(\mathbf{z}_{(j)})) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*_{\alpha_1}\mathbf{M}|_{x_0}^{x_1} \int\limits_{x_1}^{x} (\mathbf{M}|_{x_0}^{\xi})^{-1}\left[\mathbf{b}\,(\xi) + \mathbf{g}\,(\xi;\mathbf{z}_{(j)}(\xi))\right] d\xi \\ \mathbf{e}^*_{\alpha_2}\mathbf{M}|_{x_0}^{x_2} \int\limits_{x_2}^{x} (\mathbf{M}|_{x_0}^{\xi})^{-1}\left[\mathbf{b}\,(\xi) + \mathbf{g}\,(\xi;\mathbf{z}_{(j)}(\xi))\right] d\xi \\ \vdots \\ \mathbf{e}^*_{\alpha_{mn}}\mathbf{M}|_{x_0}^{x_{mn}} \int\limits_{x_{mn}}^{x} (\mathbf{M}|_{x_0}^{\xi})^{-1}\left[\mathbf{b}\,(\xi) + \mathbf{g}\,(\xi;\mathbf{z}_{(j)}(\xi))\right] d\xi \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

III. Über die näherungsweise Darstellung der Lösung einer homogenen linearen Matrizendifferentialgleichung

4. *Abschätzung des Fehlers der Näherung*

Die praktische Ausführung unseres Iterationsverfahrens ist mit der Bestimmung der Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\mathbf{z} = \mathbf{A}\,(x)\,\mathbf{z} \tag{4.1}$$

nach der Anfangsbedingung

$$\mathbf{z}\,(x_0) = \mathbf{z}_0 \tag{4.2}$$

eng verknüpft.

Diese Lösung lautet:

$$\mathbf{z}\,(x) = \mathbf{M}|_{x_0}^{x}\,\mathbf{z}_0\,, \tag{4.3}$$

wobei die Resolvente $\mathbf{M}|_{x_0}^{x}$ durch die unendliche Matrizenreihe (1.8) definiert ist.

Bekanntlich[12] gilt, unter der Voraussetzung

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < x_p \equiv x\,,$$

[12] Siehe z. B. [1] S. 141.

die Produktdarstellung der Resolvente:

$$\mathbf{M}|_{x_0}^{x} = \mathbf{M}|_{x_{p-1}}^{x} \mathbf{M}|_{x_{p-2}}^{x_{p-1}} \dots \mathbf{M}|_{x_1}^{x_2} \mathbf{M}|_{x_0}^{x_1} = \prod_{i=p}^{1} \mathbf{M}|_{x_{i-1}}^{x_i} . \tag{4.4}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathbf{M}|_{x_{i-1}} = \mathbf{E} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{A}(\xi_1)\, d\xi_1 + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_{i-1}}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2 + \\ + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{A}(\xi_3) \int_{x_{i-1}}^{\xi_3} \mathbf{A}(\xi_2) \int_{x_{i-1}}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 + \dots \end{aligned} \tag{4.5}$$

Es sei nun die exakte Lösung der Differentialgleichung (4.1) mit der Bedingung (4.2) auf Grund der Produktdarstellung (4.4) durch die Gleichung

$$\mathbf{z}(x) \equiv \mathbf{z}(x_p) = \prod_{=p}^{1} \mathbf{M}|_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{z}_0 \tag{4.6}$$

dargestellt. Eine Nährungslösung sei durch die Gleichung

$$\mathbf{z}_{(p)} = \prod_{i=p}^{1} \widetilde{M}|_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{z}_0 \tag{4.7}$$

gegeben, wobei $\widetilde{\mathbf{M}}|_{x_{i-1}}^{x_i}$ eine Näherung der (exakten) Resolvente bedeuten möge.

Zur Abschätzung des Fehlers zwischen der exakten und der Näherungslösung setzen wir

$$\max |x_i - x_{i-1}| \leqq h , \tag{4.8}$$

ferner — mit Hilfe der Beziehung (2.3) —

$$G(\mathbf{M}|_{x_{i-1}}^{x_i}) \leqq e^{hG(\mathbf{A})} = \omega(h) ; \tag{4.9}$$

bzw.

$$G(\widetilde{\mathbf{M}}|_{x_{i-1}}^{x_i}) \leqq \widetilde{\omega}(h) , \tag{4.10}$$

und schließlich

$$G(\mathbf{M}|_{x_{i-1}}^{x_i} - \widetilde{\mathbf{M}}|_{x_{-1}}^{x_i}) \leqq \delta(h) . \tag{4.11}$$

Somit ergibt sich — wenn wir auch noch (2.12) in Betracht ziehen —,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_p| = |\mathbf{z}(x_p) - \mathbf{z}_{(p)}| \leqq \left| \mathbf{M}|_{x_{p-1}}^{x_p} (\mathbf{z}(x_{p-1}) - \mathbf{z}_{(p-1)}) + (\mathbf{M}|_{x_{p-1}}^{x_p} - \widetilde{\mathbf{M}}|_{x_{p-1}}^{x_p}) \mathbf{z}_{(p-1)} \right| \leqq \\ \leqq \omega(h) |\varepsilon_{p-1}| + \delta(h) (\widetilde{\omega}(h))^{p-1} \beta , \end{aligned} \tag{4.12}$$

und daraus

$$|\varepsilon_p| \leqq \beta(h) \frac{\omega^p(h) - \widetilde{\omega}^p(h)}{\omega(h) - \widetilde{\omega}(h)} . \tag{4.13}$$

Die Tatsache der Näherung ist durch

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ p\to\infty}} |\varepsilon_p| = 0 \qquad (4.14)^{13}$$

festgesetzt und die einer Näherung k-ter Ordnung[14] durch

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varepsilon_p|}{h^{k+1}} = H > 0 \qquad (4.15)$$

wobei H eine Konstante, und k eine positive ganze Zahl bedeutet.

5. Näherung durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

Im folgenden werden wir zwei Umformungen verwenden, deren Gültigkeit leicht einzusehen ist:

a) $$\int_a^\beta \mathbf{B}(\xi)\,\mathbf{A}(\xi)\,d\xi = \mathbf{B}(\beta)\int_a^\beta \mathbf{A}(\xi_1)\,d\xi_1 - \mathbf{B}^{(1)}(\beta)\int_a^\beta\int_a^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi_2 +$$
$$+ \mathbf{B}^{(2)}(\beta)\int_a^\beta\int_a^{\xi_3}\int_a^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3 + \dots \qquad (5.1)$$

Wenn speziell

$$\mathbf{B}(\xi) = (\beta-\xi)^{k-1}\mathbf{E},$$

gilt

$$\mathbf{B}(\beta) = \mathbf{B}^{(1)}(\beta) = \mathbf{B}^{(2)}(\beta) = \dots = \mathbf{B}^{(k-2)}(\beta) = 0,$$

und

$$\mathbf{B}^{(k-1)}(\xi) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,\mathbf{E},$$

d. h.

$$\frac{1}{(k-1)!}\int_a^\beta (\beta-\xi)^{k-1}\mathbf{A}(\xi)\,d\xi = \int_a^\beta\int_a^{\xi_k}\cdots\int_a^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\,d\xi_1\dots d\xi_{k-1}\,d\xi_k\,. \qquad (5.2)$$

b) Ist jedes Element der Matrix $\mathbf{A}(\xi)$ im Intervall $a \leqq \xi \leqq \beta$ stetig und wechselt sein Vorzeichen nicht, dann gilt näherungsweise mit einem einheitlichen Θ unter der Voraussetzung $|\beta - a| < \varepsilon$, wobei $0 < \varepsilon$ genügend klein ist,

$$\int_a^\beta \mathbf{A}(\xi)\,\mathbf{B}(\xi)\,d\xi \approx \mathbf{A}(\Theta)\int_a^\beta \mathbf{B}(\xi)\,d\xi, \qquad a \leqq \Theta \leqq \beta. \qquad (5.3)$$

[13] Bei der Bestimmung des Grenzwertes muß man in Betracht ziehen, daß

$$|x_p - x_0| \leqq ph = \gamma,$$

wobei $0 < \gamma$ eine Konstante ist.

[14] Zur Definition der Ordnung der Näherung siehe z. B. [5] S. 5.

Ist speziell

$$\mathbf{B}\,(\xi) = \frac{(\beta - \xi)^{k-1}}{(k-1)\,!}\,\mathbf{E}\,,$$

dann gilt

$$\frac{1}{(k-1)\,!} \int_{\alpha}^{\beta} (\beta - \xi)^{k-1}\,\mathbf{A}\,(\xi)\,d\xi \approx \mathbf{A}\,(\Theta)\;\frac{(\beta - \alpha)^k}{k\,!}\,, \qquad \alpha \leqq \Theta \leqq \beta. \quad (5.4)$$

Wir wollen nun aus der Produktdarstellung (4.4) der Resolvente ausgehen und setzen voraus, daß

$$\max |\,x_i - x_{i-1}\,| \leqq h\,, \qquad i = 1, 2, \cdots, p$$

und $h > 0$ genügend klein ist, damit wir den Mittelwertsatz (5.3) bzw. (5.4) anwenden können. Auf Grund der Beziehungen (5.2), (5.3) und (5.4) erhalten wir näherungsweise

$$\int_{x_{i-1}}^{x} \mathbf{A}\,(\xi_k) \int_{-1}^{\xi_k} \cdot\,(\xi_{k-1}) \cdots \int_{x_{i-1}}^{\xi_2} \mathbf{A}\,(\xi_1)\,d\xi_1 \ldots d\xi_{k-1}\,d\xi_k \approx \frac{(x_i - x_{i-1})^k}{k\,!}\,\mathbf{A}^k(x_{i-1})\,. \quad (5{,}5)^{15}$$

Setzen wir (5.5) in die Gleichung (4.5) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{M}\,|_{x_{i-1}}^{x_i} \approx \widetilde{\mathbf{M}}\,|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_i - x_{i-1})^k}{k\,!}\,\mathbf{A}^k\,(x_{i-1}) = e^{(x_i - x_{i-1})\,\mathbf{A}\,(x_{i-1})}\,, \qquad (5.6)^{16}$$

d. h.

$$\mathbf{M}|_{x_0}^{x} \approx \widetilde{\mathbf{M}}|_{x_0}^{x} = \prod_{i=p}^{1} e^{(x_i - x_{i-1})\mathbf{A}(x_{i-1})}. \qquad (5.7)^{17-18}$$

[15] Wir gelangen zu demselben Ergebnis, wenn wir voraussetzen, daß $\mathbf{A}\,(x) \approx \mathbf{A}\,(x_{i-1})$ im Intervall $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$ ist. Siehe z. B. [6] S. 232.

[16] $\mathbf{A}^{\circ} = \mathbf{E}$.

[17] Wenn speziell

$$\mathbf{A}\,(x_j)\,\mathbf{A}\,(x_k) = \mathbf{A}\,(x_k)\,\mathbf{A}\,(x_j)$$

(das trifft z. B. zu, wenn $\mathbf{A}\,(x)$ eine zyklische Matrix ist), wird

$$\prod_{i=p}^{1} e^{(x_i - x_{i-1})\mathbf{A}(x_{i-1})} = e^{\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i - x_{i-1})\,\mathbf{A}\,(x_{i-1})}\,,$$

und folglich

$$\mathbf{M}|_{x_0}^{x} = \lim_{p \to \infty} e^{\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i - x_{i-1})\,\mathbf{A}(x_{i-1})} = e^{\int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi)d\xi}\,,$$

was auch unmittelbar einzusehen ist.

[18] Auf Grund der Beziehung (2.5) ist offenbar

$$(\mathbf{M}|_{x_0}^{x})^{-1} \approx \prod_{i=1}^{p} e^{-(x_i - x_{i-1})\mathbf{A}(x_{i-1})}\,.$$

Die Ordnung der Näherung (5.7) werden wir nach den Festsetzungen des Punktes 4 abschätzen.

Zuerst setzen wir voraus, daß — bei einer praktischen Rechnung — die Gleichung (5.6) durch folgende Teilsumme angenähert werden soll:

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \approx \sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{(x_i - x_{i-1})^\varkappa}{\varkappa!} \mathbf{A}^\varkappa(x_{i-1}) ; \quad r \geqq 1. \tag{5.8}$$

Damit ist

$$\widetilde{\omega}(h) = \sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{(hG(\mathbf{A}))^\varkappa}{\varkappa!} . \tag{5.9}$$

Zweitens soll angenommen werden, daß im Intervall $|x - x_0| < a$, die Beziehung

$$\left|(\mathbf{A}(\xi_1))_{jk} - (\mathbf{A}(\xi_2))_{jk}\right| \leqq Kh$$

gelte,[19] wobei $(\mathbf{A})_{jk}$ ein beliebiges (in der j-ten Reihe und k-ten Spalte enthaltenes) Element der Matrix $\mathbf{A}$ bedeutet, und daß

$$\left|\left(\frac{d\mathbf{A}}{dx}\right)_{jk}\right| \leqq K$$

ist. Dann wird

$$\left|\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{A}(\xi_\varkappa) \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_\varkappa} \mathbf{A}(\xi_{\varkappa-1}) \ldots \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\, d\xi_1 \ldots d\xi_{\varkappa-1}\, d\xi_\varkappa\right)_{jk} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{(x_i - x_{i-1})^\varkappa}{\varkappa!} \mathbf{A}^\varkappa(x_{i-1})\right)_{jk}\right| \leqq (mn)^{\varkappa-1} \frac{(Kh^2)^\varkappa}{\varkappa\,!}$$

und somit

$$G\left(\mathbf{M}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{(x_i - x_{i-1})^\varkappa}{\varkappa\,!} \mathbf{A}^\varkappa(x_{i-1})\right) \leqq \sum_{\varkappa=1}^{r} \frac{(mnKh^2)^\varkappa}{\varkappa\,!} + \sum_{\varkappa=r+1}^{\infty} \frac{(hG(\mathbf{A}))^\varkappa}{\varkappa\,!} \leqq$$
$$\leqq mnKh^2 \frac{1 - (mnKh^2)^r}{1 - mnKh^2} + e^{hG(\mathbf{A})} - \sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{(hG(\mathbf{A}))^\varkappa}{\varkappa\,!} = \delta(h). \tag{5.10}$$

Auf Grund der Gleichung (4.13) ergibt sich — unter Berücksichtigung von (4.9), (5.9) und (5.10) —

[19] $j, k = 1, 2, \ldots, mn$; ξ_1 und ξ_2 sind zwei beliebige in dem Intervall $|x - x_0| < a$ liegende Werte.

$$|\varepsilon_p| \leqq \beta \left\{ mnKh^2 \frac{1-(mnKh^2)^r}{1-mnKh^2} + \right.$$

$$\left. + e^{hG(\mathbf{A})} - \sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{(hG(\mathbf{A}))^\varkappa}{\varkappa\,!} \right\} \frac{e^{\gamma G(\mathbf{A})} - \left\{ \sum\limits_{\varkappa=0}^{r} \frac{(hG(\mathbf{A}))^\varkappa}{\varkappa\,!} \right\}^{\frac{\gamma}{h}}}{e^{hG(\mathbf{A})} - \sum\limits_{\varkappa=0}^{r} \frac{(hG(\mathbf{A}))^\varkappa}{\varkappa\,!}} . \tag{5.11}$$ [20]

Es gilt also

$$\lim_{h\to 0} |\varepsilon_p| = 0,$$

ferner

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varepsilon_p|}{h} = \beta\, mnK\, \gamma\, e^{\gamma G(\mathbf{A})}, \text{ wenn } r > 1$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varepsilon_p|}{h} = \beta\, \gamma e^{\gamma G(\mathbf{A})} \left\{ mnK + \frac{G^2(\mathbf{A})}{2} \right\}, \text{ wenn } r = 1.$$

Demzufolge ist

$$|\varepsilon_p| = O(h).$$

6. *Näherung durch Teilsummen der erzeugenden unendlichen Matrizenreihe der Resolvente*

Ersetzen wir jeden Faktor der Produktdarstellung (4.4) der Resolvente durch die ersten $r+2$ Glieder ($r \geqq 0$) der unendlichen Reihe (4.5), d. h.

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} &= \mathbf{E} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{A}(\xi_1)\, d\xi_1 + \ldots + \\ &+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{A}(\xi_{r+1}) \int_{x_{i-1}}^{\xi_{r+1}} \mathbf{A}(\xi_r) \ldots \int_{x_{i-1}}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1)\, d\xi_1 \ldots d\xi_r\, d\xi_{r+1}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

so wird

$$\widetilde{\omega}(h) = \sum_{\varkappa=0}^{r+1} \frac{(hG(\mathbf{A}))^\varkappa}{\varkappa\,!}; \quad \delta(h) = e^{hG(\mathbf{A})} - \sum_{\varkappa=0}^{r+1} \frac{(hG(\mathbf{A}))^\varkappa}{\varkappa\,!};$$

und

$$|\varepsilon_p| \leqq \beta \left\{ e^{\gamma G(\mathbf{A})} - \left(\sum_{\varkappa=0}^{r+1} \frac{(hG(\mathbf{A}))^\varkappa}{\varkappa\,!} \right)^{\frac{\gamma}{h}} \right\}. \tag{6.2}$$

[20] $\gamma = ph$. Siehe Fußnote 13.

Es gilt

$$\lim_{h\to 0} |\varepsilon_p| = 0,$$

ferner

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\varepsilon_p|}{h^{r+1}} = \beta \, \frac{\gamma G^{r+2}(\mathbf{A})}{(r+2)\,!} \, e^{\gamma G(\mathbf{A})},$$

folglich

$$|\varepsilon_p| = O\,(h^{r+1})\,,$$

d. h. die Näherung ist von r-ter Ordnung. [21]

7. *Näherung durch Teilsummen einer Potenzreihe*

Die Lösung

$$\mathbf{z}(x_i) = \mathbf{M}\,|_{x_{i-1}}^{x_i}\, \mathbf{z}(x_{i-1}) \tag{7.1}$$

der Differentialgleichung (4.1), mit den Anfangswerten

$$\mathbf{z}(x_{i-1}) = \mathbf{z}_{i-1} \tag{7.2}$$

kann in der Form

$$\mathbf{z}(x_i) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \mathbf{B}_\varkappa(x_{i-1}) \, \frac{(x_i - x_{i-1})^\varkappa}{\varkappa\,!} \, \mathbf{z}(x_{i-1}) \tag{7.3}$$

dargestellt werden, vorausgesetzt, daß $\mathbf{A}(x)$ die im Intervall $|\, x - x_{i-1} \,| \leqq s$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \mathbf{A}^{(\varkappa)}(x_{i-1}) \, \frac{(x - x_{i-1})^\varkappa}{\varkappa\,!} \tag{7.4}$$

zuläßt, und

$$|\, x_i - x_{i-1} \,| \leqq h = \min \left(s \,, \frac{b}{P} \right)$$

mit

$$P \geqq b^{mn} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} G(\mathbf{A}^{(\varkappa)}(x_{i-1})) \, \frac{s^\varkappa}{\varkappa\,!}\,.$$

gilt, wenn also die Reihe

$$\mathbf{M}\,|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \mathbf{B}_\varkappa(x_{i-1}) \, \frac{(x_i - x_{i-1})^\varkappa}{\varkappa\,!} \tag{7.5}$$

die Potenzreihenentwicklung der Resolvente ist.

[21] Die in [1] S. 141—142, bzw. in [6] S. 222, angegebenen Näherungen entsprechen dem Fall $r = 0$.

Man erhält diese Reihe z. B. dadurch, daß in der Formel (4.5) überall $\mathbf{A}(x)$ durch die Reihe (7.4) ersetzt wird. Damit wird

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = {} & \mathbf{E} + \sum_{j_1=1}^{\infty} \mathbf{A}^{(j_1-1)}(x_{i-1}) \frac{(x_i - x_{i-1})^{j_1}}{j_1!} + \\
& + \sum_{j_2=2}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{j_2-2} \binom{j_2-1}{j_1} \mathbf{A}^{(j_1)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(j_2-j_1-2)}(x_{i-1}) \frac{(x_i - x_{i-1})^{j_2}}{j_2!} + \\
& + \sum_{j_3=3}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{j_3-3} \sum_{j_1=0}^{j_3-j_2-3} \binom{j_3-1}{j_2} \binom{j_3-j_2-2}{j_1} \mathbf{A}^{(j_2)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(j_1)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(j_3-j_2-j_1-3)}(x_{i-1}) \cdot \\
& \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})^{j_3}}{j_3!} + \ldots + \sum_{j_k=k}^{\infty} \sum_{j_{k-1}=0}^{j_k-k} \sum_{j_{k-2}=0}^{j_k-j_{k-1}-k} \ldots \\
& \ldots \sum_{j_1=0}^{j_k-\ldots-j_2-k} \binom{j_k-1}{j_{k-1}} \binom{j_k-j_{k-1}-2}{j_{k-2}} \ldots \\
& \ldots \binom{j_k-j_{k-1}-\ldots-j_2-k+1}{j_1} \mathbf{A}^{(j_{k-1})}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(j_{k-2})}(x_{i-1}) \ldots \\
& \ldots \mathbf{A}^{(j_1)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(j_k-\ldots-j_1-k)}(x_{i-1}) \frac{(x_i - x_{i-1})^{j_k}}{j_k!} + \ldots
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$
[22]

Wenn man nun die Reihe (7.6) nach gleichen Potenzen umordnet, erhält man für die Koeffizienten der steigenden Potenzen der Reihe (7.5):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_0(x_{i-1}) &= \mathbf{E}\,; \\
\mathbf{B}_1(x_{i-1}) &= \mathbf{A}^{(0)}(x_{i-1})\,; \\
\mathbf{B}_2(x_{i-1}) &= \mathbf{A}^{(1)}(x_{i-1}) + \mathbf{A}^{(0)2}(x_{i-1})\,; \\
\mathbf{B}_3(x_{i-1}) &= \mathbf{A}^{(2)}(x_{i-1}) + \sum_{j_1=0}^{1} \binom{2}{j_1} \mathbf{A}^{(j_1)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(1-j_1)}(x_{i-1}) + \mathbf{A}^{(0)^3}(x_{i-1})\,; \\
\mathbf{B}_4(x_{i-1}) &= \mathbf{A}^{(3)}(x_{i-1}) + \sum_{j_1=0}^{2} \binom{3}{j_1} \mathbf{A}^{(j_1)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(2-j_1)}(x_{i-1}) + \\
& + \sum_{j_2=0}^{1} \sum_{j_1=0}^{1-j_2} \binom{3}{j_2} \binom{2-j_2}{j_1} \mathbf{A}^{(j_2)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(j_1)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(1-j_2-j_1)}(x_{i-1}) + \mathbf{A}^{(0)^4}(x_{i-1};)
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

[22] *Anmerkungen* — 1. Die Einzelnen unendlichen Summen der Formel (7.6) sind die Potenzreihen der entsprechenden Integrale der Formel (4.5).

2. Wenn speziell die Vertauschbarkeit $\mathbf{A}^{(\varkappa)}(x)\,\mathbf{A}^{(\lambda)}(x) = \mathbf{A}^{(\lambda)}(x)\,\mathbf{A}^{(\varkappa)}(x)$ gilt (was z. B. zutrifft, wenn $\mathbf{A}(x)$ eine zyklische Matrix ist), dann geht die Formel (7.6) in die Form

$$
\mathbf{M}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \left\{ \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \mathbf{A}^{(\varkappa-1)}(x_{i-1}) \frac{(x_i - x_{i-1})^{\varkappa}}{\varkappa!} \right\}^{\mu}
$$

über, was auch unmittelbar durch Anwendung des Polynomialsatzes einzusehen ist.

3. Das Reziproke der Matrix $\mathbf{M}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}$ ergibt sich aus (7.6) — auf Grund der Beziehung (2.5) — durch Änderung des Vorzeichens jedes zweiten Gliedes.

$$\mathbf{B}_k(x_{i-1}) = \mathbf{A}^{(k-1)}(x_{i-1}) + \sum_{j_1=0}^{k-2} \binom{k-1}{j_1} \mathbf{A}^{(j_1)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(k-2-j_1)}(x_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{j_2=0}^{k-3} \sum_{j_1=0}^{k-3-j_2} \binom{k-1}{j_2} \binom{k-1-j_2}{j_1} \mathbf{A}^{(j_2)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(j_1)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(k-3-j_2-j_1)}(x_{i-1}) +$$

$$+ \dots + \sum_{j_{k-2}=0}^{1} \sum_{j_{k-3}=0}^{1-j_{k-2}} \dots \sum_{j_1=0}^{1-j_{k-2}-\dots-j_2} \binom{k-1}{j_{k-2}} \binom{k-2-j_{k-2}}{j_{k-3}} \dots$$

$$\dots \binom{2-j_{k-2}-\dots-j_2}{j_1} \mathbf{A}^{(j_{k-2})}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(j_{k-3})}(x_{i-1}) \dots$$

$$\dots \mathbf{A}^{(j_1)}(x_{i-1})\, \mathbf{A}^{(1-j_{k-2}-\dots-j_1)}(x_{i-1}) + \mathbf{A}^{(0)^k}(x_{i-1})\,;$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Setzen wir nun voraus, daß die einzelnen Faktoren der Produktdarstellung (4.4) der Resolvente durch die Teilsummen $(r+1)$-ster Ordnung der Potenzreihe (7.5) ersetzt werden:

$$\widetilde{\mathbf{M}}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \sum_{\varkappa=0}^{r+1} \mathbf{B}_\varkappa(x_{i-1}) \frac{(x_i - x_{i-1})^\varkappa}{\varkappa!}\,. \tag{7.8}$$

dann wird

$$\widetilde{\omega}(h) = \max_{i=1,2,\dots,p} \sum_{\varkappa=0}^{r+1} G\left(\mathbf{B}_\varkappa(x_{i-1})\right) \frac{h^\varkappa}{\varkappa!}\,; \qquad \delta(h) = G(\mathbf{B}_{r+2}) \frac{h^{r+2}}{(r+2)!}\,,$$

wobei

$$G(\mathbf{B}_{r+2}) = \max_{|x-x_{i-1}|\le h} G(\mathbf{B}_{r+2}(x)),\ i = 1,2,\dots,p$$

ist.[23] Damit ergibt sich

$$|\varepsilon_p| \le \beta\, G(\mathbf{B}_{r+2}) \frac{h^{r+2}}{(r+2)!} \frac{e^{\gamma G(\mathrm{A})} - \left\{\max\limits_{i=1,2,\dots,p} \sum\limits_{\varkappa=0}^{r+1} G(\mathbf{B}_\varkappa(x_{i-1})) \frac{h^\varkappa}{\varkappa!}\right\}^{\frac{\gamma}{h}}}{e^{hG(\mathrm{A})} - \max\limits_{i=1,2,\dots,p} \sum\limits_{\varkappa=0}^{r+1} G(\mathbf{B}_\varkappa(x_{i-1})) \frac{h^\varkappa}{\varkappa!}}\,. \tag{7.9}$$

[23] Es sei

$$\Gamma = \max_{|x-x_{i-1}|\le h} G\left(\mathrm{A}^{(\varkappa)}(x)\right),\ i = 1, 2, \dots, p\,;\ \varkappa = 0, 1, 2, \dots, r+1.$$

Dann gilt auf Grund der Formeln (7.7):

$$G(\mathbf{B}_{r+2}) \le \Gamma + \sum_{j_1=0}^{r} \binom{r+1}{j_1} \Gamma^2 + \sum_{j_2=0}^{r-1} \sum_{j_1=0}^{r-1-j_2} \binom{r+1}{j_2} \binom{r-j_2}{j_1} \Gamma^3 + \dots +$$

$$+ \sum_{j_r=0}^{1} \sum_{j_{r-1}=0}^{1-j_r} \dots \sum_{j_1=0}^{1-j_r-\dots-j_2} \binom{r+1}{j_r} \binom{r-j_r}{j_{r-1}} \dots \binom{2-j_r-\dots-j_2}{j_1} \Gamma^{r+1} + \Gamma^{r+2}\,.$$

Es gilt

$$\lim_{h \to 0} | \varepsilon_p | = 0 ,$$

ferner

$$\lim_{h \to 0} \frac{| \varepsilon_p |}{h^{r+1}} = \beta \gamma e^{\gamma G(\mathbf{A})} \frac{G(\mathbf{B}_{r+2})}{(r+2)!} ,$$

folglich

$$| \varepsilon_p | = O(h^{r+1}) .$$

Anmerkung. — Wenn bei der näherungsweisen Berechnung der Lösung (4.3) der Differentialgleichung (4.1), mit der Anfangsbedingung (4.2), das in den Punkten 6 und 7 angegebene Verfahren benützt wird, so ist die Einteilung des Intervalls $[x_0, x]$ in p Teilintervalle von der Breite $\leqq h$ und die Benützung der Produktdarstellung (4.4) der Resolvente offenbar nicht unbedingt erforderlich. Die Näherungsformeln (6.1) bzw. (7. 8) können auch unmittelbar in der Weise angewandt werden, daß x_{i-1} durch x_0 und x_i durch x ersetzt wird.

Dementsprechend ist die der Gleichung (6.1) analoge Gleichung

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{M}} |_{x0}^{x} = \mathbf{E} + \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi_1) \, d\xi_1 + \ldots + \int_{x_0}^{x} \mathbf{A}(\xi_{r+1}) \int_{x_0}^{\xi_{r+1}} \mathbf{A}(\xi_r) \ldots \\ \ldots \int_{x_0}^{\xi_2} \mathbf{A}(\xi_1) \, d\xi_1 \ldots d\xi_r \, d\xi_{r+1} \end{aligned} \tag{7.10}$$

und der Fehler der Näherung

$$| \varepsilon | \leqq \beta \, \delta \, (a) = \beta \left\{ e^{aG(\mathbf{A})} - \sum_{\varkappa=0}^{r+1} \frac{(aG(\mathbf{A}))^{\varkappa}}{\varkappa \, !} \right\} \tag{7.11}$$

mit $|x - x_o| \leqq a$.

Die der Gleichung (7.8) analoge Gleichung ist

$$\widetilde{\mathbf{M}} |_{x0}^{x} = \sum_{\varkappa=0}^{r+1} \mathbf{B}_{\varkappa} (x_o) \frac{(x - x_0)^{\varkappa}}{\varkappa \, !} \tag{7.12}$$

und der Fehler der Näherung

$$| \varepsilon | \leqq \beta \, \delta \, (a) = \beta \, G \, (\mathbf{B}_{r+2}) \, \frac{a^{r+2}}{(r+2) \, !} , \tag{7.13}$$

wobei

$$| x - x_o | < a = \min \left(a , \frac{b}{P} \right) ,$$

mit

$$b^{mn} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} G\left(\mathbf{A}^{(\varkappa)}(x_0)\right) \frac{a^{\varkappa}}{\varkappa!} \leqq P\,;$$

$$G(\mathbf{B}_{r+2}) = \max_{|x-x_0| \leqq t} G\left(\mathbf{B}_{r+2}(x)\right).$$

Offenbar gilt sowohl im Fall (7.10), als im Fall (7.12):

$$\lim_{r \to \infty} |\varepsilon| = 0\,.$$

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz wird ein Iterationsverfahren zur Lösung von Systemen allgemeiner, expliziter, gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung angegeben; ferner wird die Konvergenz des Verfahrens untersucht und eine Abschätzungsformel für die Fehler der Näherungen abgeleitet. Das angegebene Iterationsverfahren besteht im wesentlichen darin, daß die Lösung des vorgelegten Differentialgleichungssystems durch eine Lösungsfolge gewisser inhomogener, linearer Matrizendifferentialgleichungen angenähert wird. Zur näherungsweisen Berechnung der Resolvente, die die Lösungen der erwähnten Folge von Matrizendifferentialgleichungen bestimmt, werden drei verschiedene Näherungsmethoden untersucht, Abschätzungen des Fehlers angegeben und die Ordnung der Näherungen bestimmt.

Literatur

1. Schmeidler, W.: Vorträge über Determinanten und Matrizen. Akademie-Verlag, Berlin, 1949.
2. Bajcsay, P.: Anwendung der Matrizenrechnung zur Lösung gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten. Periodica Polytechnica, Vol. 3. No 3. 1959. Budapest.
3. Bodewig, E.: Matrix Calculus. North-Holland Publishing Co., Amsterdam. 1956.
4. Rózsa, P.: Lineáris differenciál- és differenciaegyenletek általános kezdeti feltételeket kielégítő explicit megoldásáról. (Mit einer russischen bzw. englischen Zusammenfassung.) A MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, II. (1957).
5. Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1951.
6. Frazer, R. A.—Duncan, W. J.—Collar, A. R.: Elementary Matrices and some Applications to Dynamics and Differential Equations. University Press, Cambridge, 1938.

P. Bajcsay, Budapest XI. Sztoczek u. 2. Ungarn.